

Institut für Biomedizinische Technik,  
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1  
76131 Karlsruhe  
Tel.: 0721/608-42650

### **Lineare Elektrische Netze**

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel  
Tel: 0721 608-42650  
Olaf.Doessel@kit.edu

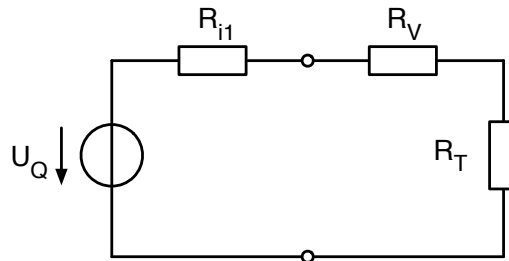
Übungsleiter: Dipl.-Ing. G. Lenis  
Tel: 0721 608-45478  
Gustavo.Lenis@kit.edu

---

Übungsblatt Nr. 1: Netzwerkanalyse  
Äquivalente Strom-/Spannungsquellen

**Aufgabe 1**

Ein Messwiderstand mit dem von seiner Umgebungstemperatur  $T$  abhängigen Widerstandswert  $R_T$  wird über einen temperaturunabhängigen Vorwiderstand  $R_V$  von einer Spannungsquelle mit der Quellenspannung  $U_Q$  und dem Innenwiderstand  $R_{i1}$  gespeist. Die Temperaturabhängigkeit des Widerstandswertes  $R_T$  ist durch folgende Gleichung gegeben:



$$R_T = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

mit  $R_0 = 40\Omega$ ,  $T_0 = 300K$

$$\alpha = 10^{-2}K^{-1} \quad U_Q = 50V, \quad R_{i1} = 25\Omega$$

Die Erwärmung des Photowiderstandes durch die zugeführte elektrische Energie darf im Rahmen dieser Aufgabe vernachlässigt werden.

- (a) Für welchen Wert von  $T$  nimmt  $R_T$  die maximale elektrische Leistung  $P_{RT}$  auf ( $R_V = 35\Omega$ )?  
*Hinweis* : Nutzen Sie Ihre Kenntnis über  $P_{RT}$ , um hinreichende Bedingungen für das Maximum zu erhalten.
- (b) Wie groß muss  $R_V$  gewählt werden, wenn die im Messwiderstand umgesetzte Leistung bei keiner Umgebungstemperatur  $T_G$  den Grenzwert  $P_G = 10W$  übersteigen darf?

Nun soll die Spannungsquelle durch die zu ihr äquivalente Gleichstromquelle ersetzt werden.

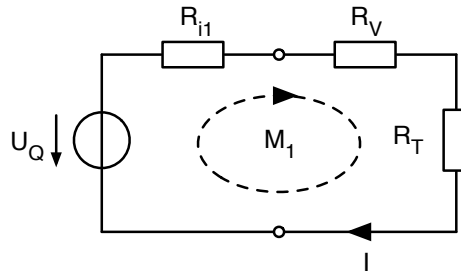
- (c) Berechnen Sie  $I_Q$ .
- (d) Bestimmen Sie die maximale Leistung  $P_{RT}$ , wenn man stattdessen  $I_Q$  zu  $3.5A$  und  $R_V$  zu  $10\Omega$  setzt und die Schaltung weiterhin bei  $T_G$  betreibt.

**Lösung:**

- (a) Die vom Widerstand  $R_T$  aufgenommene Leistung ist

$$P_{RT} = U \cdot I = R_T \cdot I^2$$

Den Strom  $I$  erhält man über der Maschengleichung für  $M_1$ :



$$U_Q = (R_{i1} + R_V + R_T) \cdot I$$

$$\text{bzw. } I = \frac{U_Q}{R_{i1} + R_V + R_T}$$

Somit wird  $P_{R_T}$  zu

$$P_{R_T} = U_Q^2 \cdot \frac{R_T}{(R_{i1} + R_V + R_T)^2}$$

Ein Extremum der Leistung erhält man als Nullstelle der ersten Ableitung von  $P_{R_T}$ .

$$\begin{aligned} \frac{dP_{R_T}}{dR_T} &\stackrel{!}{=} U_Q^2 \left( \frac{1 \cdot (R_{i1} + R_V + R_T)^2 - 2R_T \cdot (R_{i1} + R_V + R_T)}{(R_{i1} + R_V + R_T)^4} \right) \\ &= U_Q^2 \left( \frac{R_{i1} + R_V + R_T - 2R_T}{(R_{i1} + R_V + R_T)^3} \right) = U_Q^2 \frac{R_{i1} + R_V - R_T}{(R_{i1} + R_V + R_T)^3} \end{aligned}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite wird zu Null für  $R_T = R_{i1} + R_V$ . Da  $P_{R_T}$  positiv ist und aus dem Wissen, dass  $P_{R_T}(R_T)$  für große wie kleine  $R_T$  gegen Null geht, schließen wir auf ein Maximum an dieser Stelle (hinreichende Bedingung).

Das Einsetzen der in der Aufgabenstellung angeführten Temperaturabhängigkeit liefert

$$\begin{aligned} R_0[1 + \alpha(T - T_0)] &= R_{i1} + R_V \\ \alpha(T - T_0) &= \frac{R_{i1} + R_V}{R_0} - 1 \\ T &= \frac{R_{i1} + R_V}{R_0\alpha} - \frac{1}{\alpha} + T_0 \end{aligned}$$

Für die gegebenen Werte ergibt sich schliesslich das gesuchte  $T$  zu:

$$T = 150K - 100K + 300K = 350K$$

sowie

$$\begin{aligned} R_T(350K) &= 40\Omega \left( 1 + \frac{350 - 300}{100} \right) = 60\Omega \\ P_{R_T}(350K) &= (50V)^2 \frac{60\Omega}{(25\Omega + 35\Omega + 60\Omega)^2} \approx 10.42W \end{aligned}$$

(b) gesucht wird  $R_V$  so, dass  $P_{RT}$  maximal  $10W$  annimmt.

Aus a) folgt

$$P_{RT} = U_Q^2 \frac{R_T}{(R_{i1} + R_V + R_T)^2} \leq 10W$$

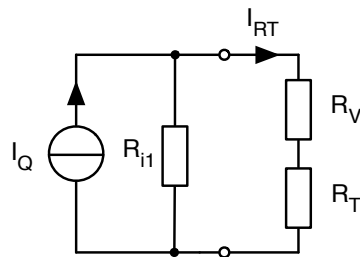
Die maximale Leistung tritt bei Leistungsanpassung auf, d.h.

$$R_T = R_{i1} + R_V$$

$$\begin{aligned} P_{RT} &= U_Q^2 \frac{R_{i1} + R_V}{(2R_{i1} + 2R_V)^2} = U_Q^2 \frac{R_{i1} + R_V}{4(R_{i1} + R_V)^2} \\ &= U_Q^2 \frac{1}{4(R_{i1} + R_V)} \leq 10W \quad \frac{U_Q^2}{4 \cdot 10W} \leq R_{i1} + R_V \\ R_V &\leq \frac{U_Q^2}{40W} - R_{i1} = 37.5\Omega \end{aligned}$$

(c)  $I_Q$  ergibt sich über

$$I_Q = \frac{U_Q}{R_{i1}} = \frac{50V}{25\Omega} = 2A$$



und das dazu nötige  $I_{RT}$  wiederum über

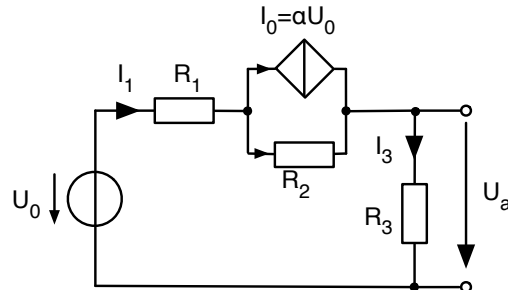
$$\begin{aligned} U_{R_{i1}} &= U_{R_V} + U_{R_T} \\ (I_Q - I_{RT}) \cdot R_{i1} &= I_{RT} \cdot (R_V + R_T) \\ I_{RT} &= I_Q \frac{R_{i1}}{R_V + R_T + R_{i1}} \\ &\stackrel{a) R_T = R_V + R_{i1}}{=} I_Q \frac{R_{i1}}{2R_V + 2R_{i1}} \\ &= 1.25A \end{aligned}$$

bestimmt werden, woraus schliesslich das gesuchte  $P_{RT}$  folgt

$$P_{RT} = I_{RT}^2 \cdot R_T = (1.25A)^2 \cdot (10\Omega + 25\Omega) = 54.69W$$

**Aufgabe 2**

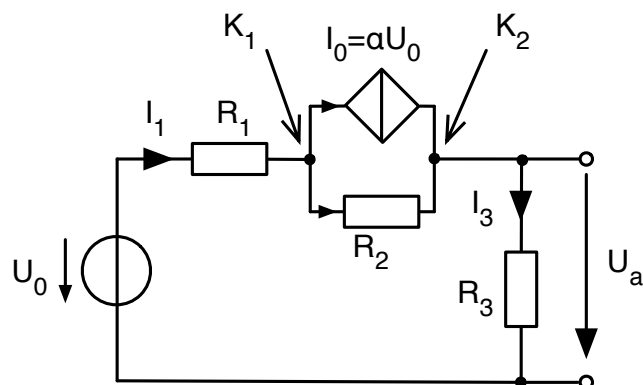
Gegeben sei folgende Schaltung aus idealen Bauelementen, die über eine ideale Gleichspannungsquelle  $U_0$  und eine spannungsgesteuerte Gleichstromquelle  $\alpha U_0$  versorgt wird.



- Berechnen Sie die Spannung  $U_a$  im Leerlauf.
- Bestimmen Sie den Kurzschlussstrom  $I_K$ .
- Für welches  $\alpha$  wird im Kurzschlussfall in  $R_1$  keine Wirkleistung verbraucht?
- Wie groß ist der Innenwiderstand  $R_i$  der Gesamtschaltung?

**Lösung:**

- Die Lösung lässt sich auf zwei Wegen bestimmen. Einmal direkt, und einmal durch Umwandlung der gesteuerten Stromquelle in die zu ihr äquivalente Spannungsquelle.



Als erstes folgt die Berechnung anhand des vorliegenden Layouts. Im Leerlauf ist  $U_a$  gleich der Spannung über dem Widerstand  $R_3$ .

Am Knoten  $K_1$  gilt  $I_1 - I_0 - I_2 = 0$ , an  $K_2$  :  $I_0 + I_2 - I_3 = 0$ . Die dritte Gleichung lautet  $U_0 = I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3$

Das Gleichsetzen der ersten beiden liefert  $I_1 = I_3$

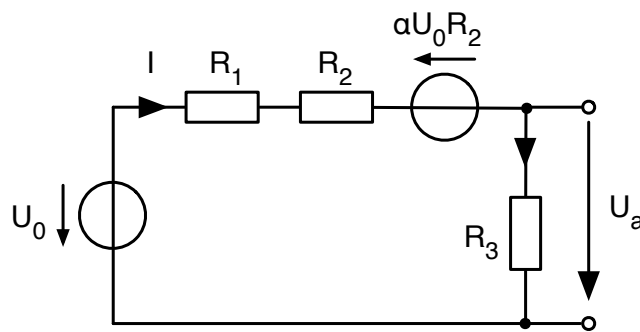
Löst man die zweite nach  $I_2$  auf und setzt dies zusammen mit  $I_1 = I_3$  in die dritte ein, erhält man

$$\begin{aligned} U_0 &= I_3 R_3 + (I_3 - I_0) R_2 + I_3 R_3 \\ U_0 + I_0 R_2 &= I_3 (R_1 + R_2 + R_3) \\ I_3 &= \frac{U_0 + I_0 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \end{aligned}$$

Damit lässt sich nun das gesuchte  $U_a$  berechnen:

$$U_a = I_3 R_3 = \frac{(U_0 + I_0 R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} R_3 = \frac{U_0 + \alpha U_0 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} R_3 = \frac{(1 + \alpha R_2) R_3}{R_1 + R_2 + R_3} U_0$$

Wesentlich schneller findet man die Lösung, wenn  $R_2$  als Innenwiderstand der Quelle  $I_0$  interpretiert wird und man diese zuerst in eine Spannungsquelle umwandelt, wobei der neue Spannungspfeil dem alten Strompfeil entgegengerichtet (vgl. Abb 1.37). In der verbleibenden Masche gilt



$$\begin{aligned} U_0 &= I(R_1 + R_2 + R_3) - \alpha U_0 R_2 \\ I &= \frac{U_0 + \alpha U_0 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{1 + \alpha R_2}{R_1 + R_2 + R_3} U_0 \\ U_a &= U_{R_3} = I R_3 \\ &= \frac{1 + \alpha R_2}{R_1 + R_2 + R_3} U_0 R_3 \end{aligned}$$

- (b) Durch den Kurzschluss am Ausgang wird  $R_3$  wirkungslos und kann somit vernachlässigt werden.

Unter Verwendung des zweiten Weges aus a) ergibt sich

$$\begin{aligned} U_0 &= I_K (R_1 + R_2) - \alpha U_0 R_2 \\ I_K &= \frac{U_0 + \alpha U_0 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1 + \alpha R_2}{R_1 + R_2} U_0 \end{aligned}$$

- (c) Die im Kurzschlussfall in  $R_1$  verbrauchte Leistung ist  
 $P_{R_1} = I_K^2 R_1$

aus b) erhält man

$$P_{R_1} = \left( \frac{1 + \alpha R_2}{R_1 + R_2} U_0 \right)^2 R_1 \stackrel{!}{=} 0$$

Diese Bedingung wird erfüllt, wenn  $1 + \alpha R_2 = 0$ , und damit folgt

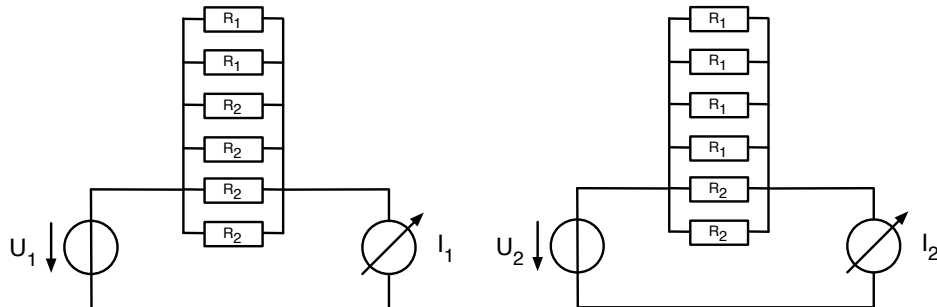
$$\alpha = -\frac{1}{R_2}$$

(d) Der Innenwiderstand der Schaltung lässt sich als Quotient von Leerlaufspannung und Kurzschlussstrom berechnen:

$$\begin{aligned} R_i &= \frac{U_L}{I_K} \\ &= \frac{\frac{1 + \alpha R_2}{R_1 + R_2 + R_3} U_0 R_3}{\frac{1 + \alpha R_2}{R_1 + R_2} U_0} \end{aligned}$$

**Aufgabe 3**

Wie groß sind  $R_1$  und  $R_2$ , wenn bei den folgenden Anordnungen bei einer Gleichspannung von  $U_1 = U_2 = 100V$  der Strom  $I_1 = 4A$  bzw.  $I_2 = 3.2A$  gemessen wurde? Das Amperemeter kann als ideal angenommen werden, d.h. der Innenwiderstand ist gleich Null.

**Lösung:**

Die linke Schaltung lässt sich folgendermaßen zusammenfassen

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_a} &= \frac{2}{R_1} + \frac{4}{R_2} = \frac{2R_2 + 4R_1}{R_1R_2} \\ R_a &= \frac{U_1}{I_1} \rightarrow \frac{1}{R_a} = \frac{I_1}{U_1} \\ \frac{2R_2 + 4R_1}{R_1R_2} &= \frac{4A}{100V} \\ 2R_2 + 4R_1 &= \frac{R_1R_2}{25\Omega} \\ R_1 &= \frac{R_1R_2}{100\Omega} - \frac{1}{2}R_2\end{aligned}$$

Analog dazu die rechte Schaltung

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_b} &= \frac{4}{R_1} + \frac{2}{R_2} = \frac{4R_2 + 2R_1}{R_1R_2} \\ R_b &= \frac{U_2}{I_2} \rightarrow \frac{1}{R_b} = \frac{I_2}{U_2} \\ \frac{4R_2 + 2R_1}{R_1R_2} &= \frac{R_1R_2}{31.25\Omega} \\ R_1 &= \frac{R_1R_2}{62.5} - 2R_2\end{aligned}$$

Setzt man beide gleich, folgt



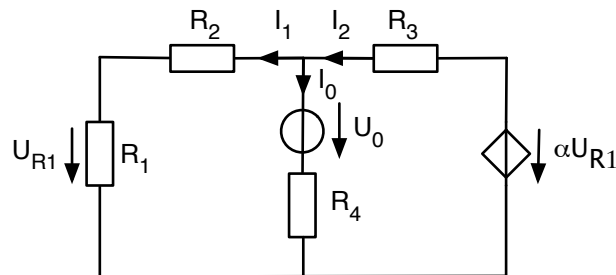
$$\begin{aligned}\frac{R_1 R_2}{100\Omega} - \frac{1}{2} R_2 &= \frac{R_1 R_2}{62.5\Omega} - 2 R_2 \\ \frac{R_1}{100\Omega} - \frac{1}{2} &= \frac{R_1}{62.5\Omega} - 2 \\ \left( \frac{1}{100\Omega} - \frac{1}{62.5\Omega} \right) R_1 &= -\frac{3}{2} \\ R_1 &= -\frac{3}{2} \cdot -\frac{500\Omega}{3} = 250\Omega\end{aligned}$$

und Rückeinsetzen in die allererste Gleichung liefert schliesslich

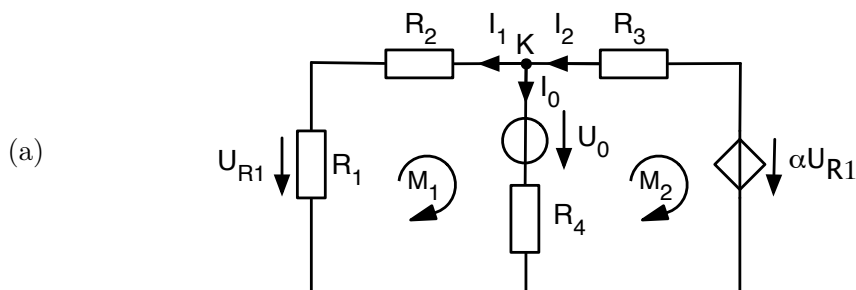
$$\begin{aligned}\frac{I_1}{U_1} &= \frac{2}{R_1} + \frac{4}{R_2} \\ \frac{4}{R_2} &= \frac{I_1}{U_1} - \frac{2}{R_1} \\ &= \frac{4A}{100V} - \frac{2}{250\Omega} \\ &= \frac{4}{125\Omega} \\ R_2 &= 125\Omega\end{aligned}$$

**Aufgabe 4**

Gegeben sei das folgende Widerstandsnetzwerk:



- (a) Geben Sie die zwei Maschengleichungen und die Knotengleichung, die das Verhalten dieser Schaltung beschreiben.
- (b) Bestimmen Sie den Strom  $I_0$  in allgemeiner Form. In der Gleichung dürfen nur die vier Widerstände, die Spannungsquelle  $U_0$  und den Faktor  $\alpha$  vorkommen.
- (c) Bestimmen Sie den Faktor  $\alpha$ , bei dem  $I_0 = 0$  wird.

**Lösung:**

$$\begin{aligned}
 K &: I_2 = I_1 + I_0 \\
 M_1 &: I_1 \cdot R_2 + I_1 \cdot R_1 - I_0 \cdot R_4 - U_0 = 0 \\
 M_2 &: -\alpha U_{R1} + I_2 R_3 + U_0 + I_0 R_4 = 0; \quad U_{R1} = I_1 R_1
 \end{aligned}$$

(b) Aus  $M_1$  folgt:

$$M_1: I_1 = \frac{U_0 + I_0 R_4}{R_1 + R_2}$$

Das Einsetzen von  $I_1$  und  $I_2$  in  $M_2$  liefert:

$M_2$ :

$$-\alpha \left( \frac{U_0 + I_0 R_4}{R_1 + R_2} \right) \cdot R_1 + \left( \frac{U_0 + I_0 R_4}{R_1 + R_2} + I_0 \right) R_3 + U_0 + I_0 R_4 = 0$$

$$I_0 \left( \frac{-\alpha R_1 R_4}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_1 + R_2} + R_3 + R_4 \right) = U_0 \left( \frac{\alpha R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_1 + R_2} - 1 \right)$$

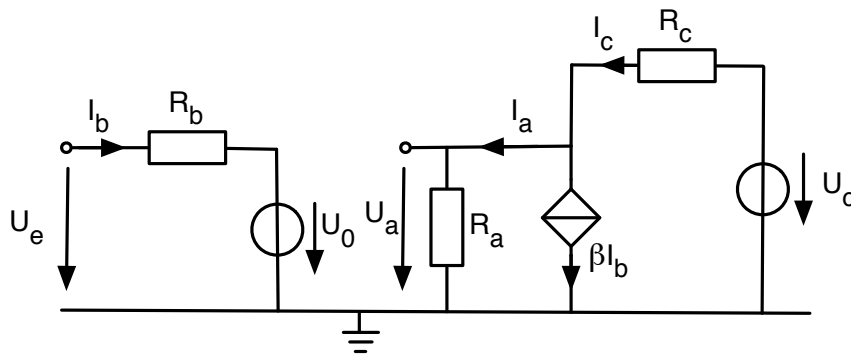
$$\begin{aligned} \Rightarrow I_0 &= \frac{U_0 \left( \frac{1}{R_1 + R_2} (\alpha R_1 - R_3) - 1 \right)}{\frac{R_4}{R_1 + R_2} (R_3 - \alpha R_1) + R_3 + R_4} \\ I_0 &= \frac{U_0 (R_1 (\alpha - 1) - R_2 - R_3)}{R_4 (R_3 - \alpha R_1) + (R_1 + R_2) (R_3 + R_4)} \end{aligned}$$

(c)  $I_0$  verschwindet beim folgenden Faktor  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} I_0 = 0 &\Leftrightarrow R_1 (\alpha - 1) - R_2 - R_3 = 0 \\ &\Rightarrow \alpha = 1 + \frac{R_2 + R_3}{R_1} \end{aligned}$$

**Aufgabe 5**

Gegeben sei die folgende Schaltung:



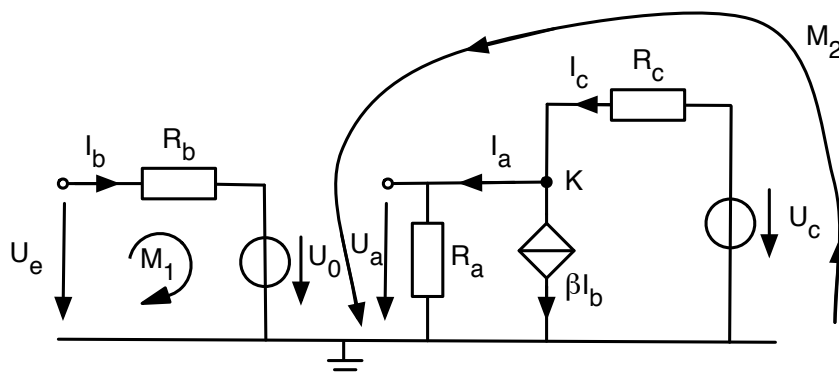
- (a) Geben Sie zwei Maschengleichungen und eine Knotengleichung, die das Verhalten dieser Schaltung beschreiben.
- (b) Bestimmen Sie  $U_a$  in allgemeiner Form. In der Gleichung dürfen keine Ströme vorkommen.

(c) Nun sei:

- $\beta = 100$
- $U_e = 1V$
- $U_0 = 0,7V$
- $U_c = 10V$
- $R_a = 40k\Omega$
- $R_b = 30k\Omega$
- $R_c = 40k\Omega$

Bestimmen Sie  $U_a$ ,  $I_a$ ,  $I_b$  und  $I_c$ .

**Lösung:**



(a)

$$M_1 : -U_e + I_b \cdot R_b + U_0 = 0$$

$$M_2 : -U_c + I_c R_c + U_a = 0; \quad U_a = I_a \cdot R_a$$

$$K : I_c = I_a + \beta I_b; \quad I_a = \frac{U_a}{R_a}$$

(b) Aus  $M_1$  folgt:

$$M_1 : I_b = \frac{U_e - U_0}{R_b}$$

Aus  $K$  und  $M_1$  folgt:

$$K : I_c = \frac{U_a}{R_a} + \beta \cdot \frac{(U_e - U_0)}{R_b}$$

Dadurch gilt für  $U_a$  Folgendes:

$M_2$  :

$$\begin{aligned} U_a &= U_c - I_c \cdot R_c \\ &= U_c - R_c \left( \frac{U_a}{R_a} + \beta \cdot \frac{(U_e - U_0)}{R_b} \right) \\ U_a + \frac{R_c}{R_a} \cdot U_a &= U_c - \beta \cdot \frac{R_c}{R_b} \cdot (U_e - U_0) \\ U_a &= \left( \frac{R_a}{R_a + R_c} \right) \left( U_c - \beta \cdot \frac{R_c}{R_b} \cdot (U_e - U_0) \right) \end{aligned}$$

(c) Einsetzen in die obige Gleichung liefert:

$$\begin{aligned} U_a &= \left( \frac{40}{40 + 40} \right) \left( 10V - 100 \cdot \frac{40}{30} \cdot (1V - 0,7V) \right) \\ U_a &= -15V \end{aligned}$$

Einsetzen in die für  $I_b$  bestimmte Gleichung liefert:

$$\begin{aligned} I_b &= \frac{U_e - U_0}{R_b} = \frac{1V - 0,7V}{30k\Omega} \\ I_b &= 10\mu A \end{aligned}$$

Für  $I_a$  gilt Folgendes:

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{U_a}{R_a} = \frac{-15V}{40k\Omega} \\ I_a &= -375\mu A \end{aligned}$$

Für  $I_c$  gilt Folgendes:

$$\begin{aligned} I_c &= I_a + \beta \cdot I_b \\ I_c &= 625\mu A \end{aligned}$$