

Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel
Tel: 0721 608-42650
Olaf.Doessel@kit.edu

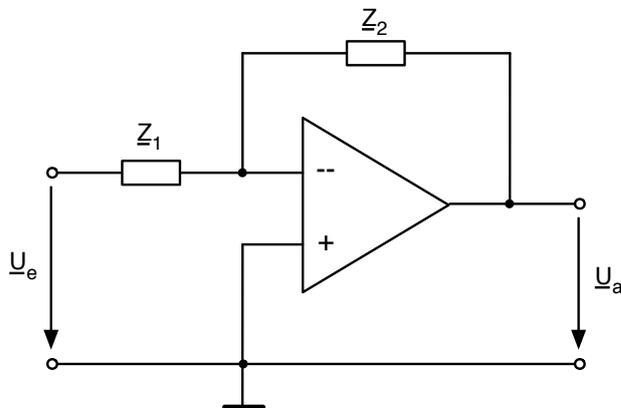
Übungsleiter: Dipl.-Ing. G. Lenis
Tel: 0721 608-45478
Gustavo.Lenis@kit.edu

Übungsblatt Nr. 3: Operationsverstärker

Einige der folgenden Aufgaben entstammen alten Klausuren. Darin kommen zum Teil komplexe Zahlen vor. Die komplexen Zahlen werden in der Vorlesung in Kapitel 4 eingeführt und im dritten Tutorium ausführlich behandelt. Um dieses Übungsblatt zu lösen, ist kein tiefergehendes Wissen über die komplexen Zahlen notwendig.

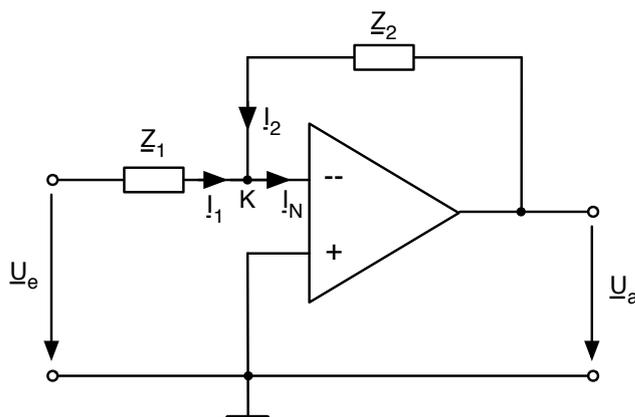
Aufgabe 1 (Klausuraufgabe)

Gegeben ist folgende Operationsverstärkerschaltung (idealer OP):



Leiten Sie das Spannungsverhältnis $\frac{U_a}{U_e}$ her. Verwenden Sie Z so, als sei es ein Widerstand.

Lösung:



Wegen $I_N = 0$ (in einen idealen OP fließt kein Strom) gilt $I_1 = -I_2$. Formuliert man diese Bedingung mit Spannungen und Widerständen:

$$\frac{U_e - U_n}{Z_1} + \frac{U_a - U_n}{Z_2} = 0$$

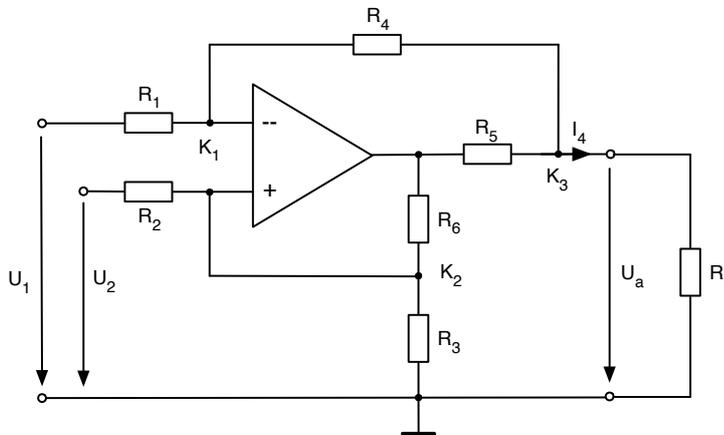
$U_P = 0$, wegen $U_D = 0$ (idealer OP) folgt, dass auch $U_N = 0$ ist. Die obige Formel vereinfacht sich dadurch zu

$$\begin{aligned} \frac{U_e}{Z_1} + \frac{U_a}{Z_2} &= 0 \\ \frac{U_a}{Z_2} &= -\frac{U_e}{Z_1} \\ \frac{U_a}{U_e} &= -\frac{Z_2}{Z_1} \end{aligned}$$

Es handelt sich hierbei um eine der klassischen Grundschaltungen, die mit OPs realisiert werden: den invertierenden Verstärker.

Aufgabe 2

Betrachtet wird die folgende Operationsverstärker-Schaltung, bestehend aus einem idealen Operationsverstärker und den Widerständen R_1 und R_6 und R_L .



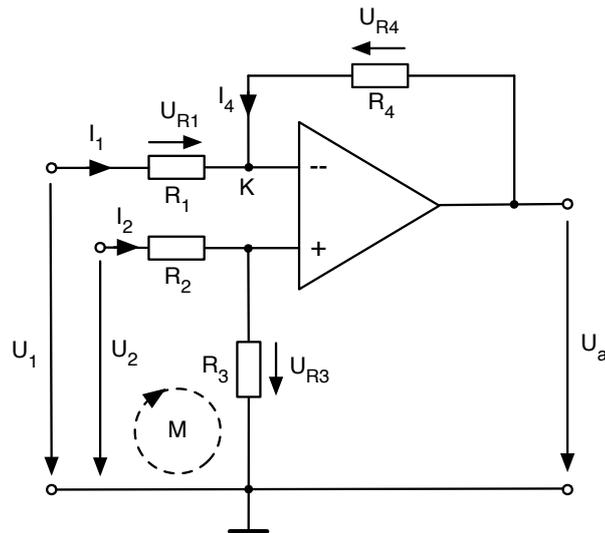
Hinweis : Gehen Sie in allen Operationsverstärker-Aufgaben dieser Vorlesung von vorherrschender Gegenkopplung aus.

- (a) Die Schaltung ist nicht belastet ($R_L \rightarrow \infty$). Für die Widerstände R_5 und R_6 gilt:
 $R_5 = 0\Omega$, $R_6 \rightarrow \infty$. Berechnen Sie für die entstehende Schaltung die Ausgangsspannung $U_a = f(U_1, U_2)$ als Funktion der beiden Eingangsspannungen U_1 und U_2 .
- (b) Finden Sie eine Bedingung für die Widerstände R_1 , R_2 , R_3 und R_4 so, dass die Ausgangsspannung $U_a = f(U_1, U_2)$ aus Aufgabenteil a) nur die Differenz der Eingangsspannungen verstärkt (Beweis).
 Wie sieht dann die Ausgangsspannung $U_a = f(U_1, U_2)$ aus?
- (c) Nun ist R_6 endlich und R_5 von Null verschieden, es gilt $R_1 = R_4 = R_6$ und $R_2 = R_3$, U_2 wird mit Masse verbunden. Aus dieser Schaltung soll eine Konstantstromquelle entstehen, d.h. der Ausgangsstrom $I_a = f(U_1, U_a)$ soll unabhängig von der Ausgangsspannung sein.
 Berechnen Sie zunächst den Ausgangsstrom $I_a = f(U_1, U_a)$ bei angeschlossener Last R_L .
 Wie muss nun R_2 gewählt werden, damit eine Konstantstromquelle vorliegt?

Hinweis : Betrachten Sie die Knoten K_1 , K_2 , und K_3 , bestimmen Sie die Ströme und finden Sie dadurch $I_a = f(U_1, U_a)$.

Lösung:

- (a) Ausgangsspannung U_a berechnen:



Betrachtet wird der Knoten K : $I_1 + I_4 = 0$

Da ein idealer OP vorliegt, hat man am invertierenden und nichtinvertierenden Eingang dasselbe Potential U_{R3} .

Somit gelten folgende Beziehungen: $I_1 = \frac{U_{R1}}{R_1} = \frac{U_1 - U_{R3}}{R_1}$ und

$$I_4 = \frac{U_{R4}}{R_4} = \frac{U_a - U_{R3}}{R_4}.$$

Aus der Spannungsteilerregel (in Masche M) kann man U_3 berechnen:

$$U_3 = U_2 \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

Eingesetzt in die Knotengleichung liefert dies:

$$\begin{aligned} 0 &= I_1 + I_4 = \frac{U_1 - U_{R3}}{R_1} + \frac{U_a - U_{R3}}{R_4} \\ &= \frac{U_1}{R_1} - \frac{U_2 \frac{R_3}{R_2 + R_3}}{R_1} + \frac{U_a}{R_4} - \frac{U_2 \frac{R_3}{R_2 + R_3}}{R_4} \\ &= \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_a}{R_4} - \frac{U_2 R_3}{R_1(R_2 + R_3)} - \frac{U_2 R_3}{R_4(R_2 + R_3)} \\ &= \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_a}{R_4} - U_2 \left(\frac{R_3}{R_1(R_2 + R_3)} \cdot \frac{R_4}{R_4} + \frac{R_3}{R_4(R_2 + R_3)} \cdot \frac{R_1}{R_1} \right) \\ &= \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_a}{R_4} - U_2 \left(\frac{R_3(R_1 + R_4)}{R_1 R_4 (R_2 + R_3)} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{U_a}{R_4} &= U_2 \left(\frac{R_3(R_1 + R_4)}{R_1 R_4 (R_2 + R_3)} \right) - \frac{U_1}{R_1} \\ U_a &= U_2 \left(\frac{R_3(R_1 + R_4)}{R_1(R_2 + R_3)} \right) - R_4 \frac{U_1}{R_1} \\ &= U_2 \left(\frac{R_3(R_1 + R_4)}{R_1(R_2 + R_3)} \right) - U_1 \frac{R_4}{R_1} \end{aligned}$$

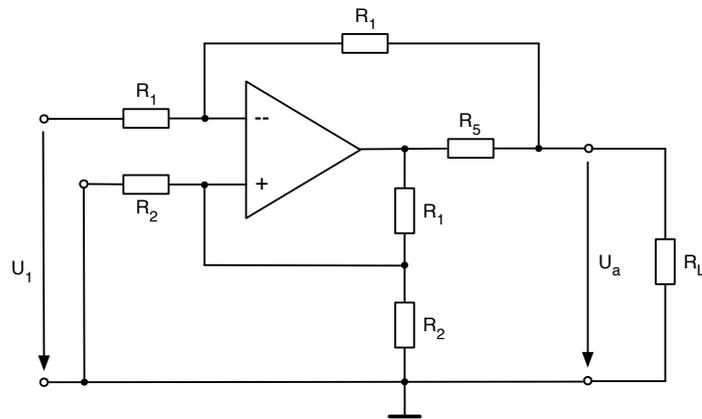
- (b) Differenzverstärkung liegt vor, wenn die Koeffizienten bei U_a vor den Spannungen U_1 und U_2 gleich sind.

$$\begin{aligned}\frac{R_3(R_1 + R_4)}{R_1(R_2 + R_3)} &= \frac{R_4}{R_1} \\ R_3(R_1 + R_4) &= R_4(R_2 + R_3) \\ R_3R_1 + R_3R_4 &= R_4R_2 + R_4R_3 \\ \frac{R_4}{R_1} &= \frac{R_3}{R_2}\end{aligned}$$

Die Spannung U_a hat dann folgende Gestalt:

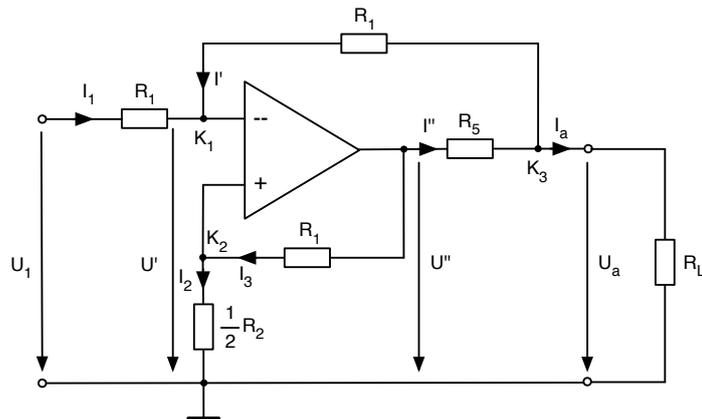
$$U_a = U_2 \frac{R_4}{R_1} - U_1 \frac{R_4}{R_1} = \frac{R_4}{R_1}(U_2 - U_1) = \frac{R_3}{R_2}(U_2 - U_1)$$

- (c) Jetzt ist R_6 endlich und R_5 von Null verschieden, $R_4 = R_6 = R_1$ und $R_3 = R_2$, U_2 wird mit Masse verbunden. Damit wird die Schaltung zu:



Die beiden parallelen R_2 können zusammengefasst werden:

$$R_2 \parallel R_2 = \frac{R_2 R_2}{R_2 + R_2} = \frac{1}{2} R_2$$



In dem sich so ergebenden Bild wurden noch die Spannung U' und U'' hinzugefügt. Betrachtet werden nun die Knoten K_1 , K_2 und K_3 .

$$\begin{aligned}K_1 : I_1 + I' &= 0 \iff \frac{U_1 - U'}{R_1} + \frac{U_a - U'}{R_1} = 0 \\ K_2 : I_2 &= I_3 \iff \frac{U'}{\frac{1}{2}R_2} = \frac{U'' - U'}{R_1} \\ K_3 : I'' &= I' + I_a \iff \frac{U'' - U_a}{R_5} = \frac{U_a - U'}{R_1} + I_a\end{aligned}$$

Um den Ausgangsstrom zu berechnen, fehlen die Ströme I' und $I''(K_3)$ bzw. die Spannungen U' und U'' . Die Spannung U' kann mit K_1 bestimmt werden,

$$\begin{aligned}\frac{U_1 - U'}{R_1} + \frac{U_a - U'}{R_1} &= 0 \\ U_1 - U' + U_a - U' &= 0 \\ U' &= \frac{1}{2}(U_1 + U_a)\end{aligned}$$

U'' dann mit Hilfe von K_2 :

$$\begin{aligned}\frac{U'}{\frac{1}{2}R_2} &= \frac{U'' - U'}{R_1} \\ \frac{U''}{R_1} &= \frac{2U'}{R_2} + \frac{U'}{R_1} = U' \left(\frac{2}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) \\ U'' &= U' \left(\frac{2R_1}{R_2} + 1 \right) \stackrel{U' = \frac{1}{2}(U_1 + U_a)}{=} \frac{1}{2}(U_1 + U_a) \left(\frac{2R_1}{R_2} + 1 \right)\end{aligned}$$

Diese beiden Spannungen kann man nun in K_3 einsetzen und erhält so einen Ausdruck für I_a :

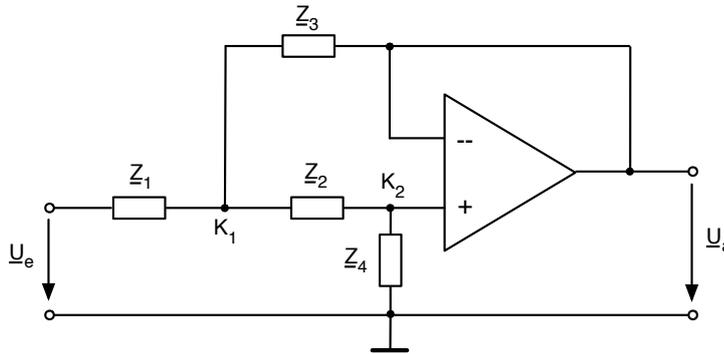
$$\begin{aligned}\frac{U'' - U_a}{R_5} &= \frac{U_a - U'}{R_1} + I_a \\ I_a &= \frac{U'' - U_a}{R_5} - \frac{U_a - U'}{R_1} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(U_1 + U_a) \left(\frac{2R_1}{R_2} + 1 \right) - U_a}{R_5} - \frac{U_a - \frac{1}{2}(U_1 + U_a)}{R_1} \\ &= \frac{1}{2R_5}(U_1 + U_a) \left(\frac{2R_1}{R_2} + 1 \right) - \frac{U_a}{R_5} - \frac{U_a}{R_1} + \frac{1}{2R_1}(U_1 + U_a) \\ &= U_1 \left[\frac{1}{2R_5} \left(\frac{2R_1}{R_2} + 1 \right) + \frac{1}{2R_1} \right] \\ &\quad + U_a \left[\frac{1}{2R_5} \left(\frac{2R_1}{R_2} + 1 \right) - \frac{1}{R_5} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2R_1} \right] \\ &= U_1 \left(\frac{R_1}{R_2 R_5} + \frac{1}{2R_5} + \frac{1}{2R_1} \right) \\ &\quad + U_a \left(\frac{R_1}{R_2 R_5} + \frac{1}{2R_5} - \frac{1}{R_5} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2R_1} \right) \\ &= U_1 \left(\frac{2R_1^2 + R_1 R_2 + R_2 R_5}{2R_1 R_2 R_5} \right) + U_a \left(\frac{2R_1^2 - R_1 R_2 - R_2 R_5}{2R_1 R_2 R_5} \right) \\ &= U_1 \left(\frac{2R_1^2 + R_2(R_1 + R_5)}{2R_1 R_2 R_5} \right) + U_a \left(\frac{2R_1^2 - R_2(R_1 + R_5)}{2R_1 R_2 R_5} \right)\end{aligned}$$

Um eine Konstantstromquelle zu beschreiben, muss der Ausgangsstrom unabhängig von der Ausgangsspannung werden. Dies ist dann der Fall, wenn der Ausdruck neben U_a zu Null wird.

$$\begin{aligned}\frac{2R_1^2 - R_2(R_1 + R_5)}{2R_1R_2R_5} &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow 2R_1^2 - R_2(R_1 + R_5) &= 0 \\ R_2 &= \frac{2R_1^2}{R_1 + R_5}\end{aligned}$$

eingesetzt in den obigen Ausdruck für I_a : $I_a = U_1 \left(\frac{R_1 + R_5}{R_1 R_5} \right) = \frac{U_a}{R_L}$ bzw.
 $U_a = I_a R_L$.

Aufgabe 3
(Klausuraufgabe)



- (a) Berechnen Sie das Spannungsverhältnis $\frac{U_a}{U_e}$ in Abhängigkeit von Z_1 , Z_2 , Z_3 und Z_4 .
Verwenden Sie Z so, als sei es ein Widerstand.
(Hinweis : Stellen Sie die Knotengleichungen für K_1 und K_2 auf.)

Im folgenden sind Z_1 , Z_2 , Z_3 und Z_4 durch folgende Bauteile bestimmt:
 $R_1 = 33k\Omega$, $R_2 = 1k\Omega$, $C_3 = 10nF$ und $C_4 = 22nF$. Dabei gilt $Z_1 = R_1$,
 $Z_2 = R_2$, $Z_3 = \frac{1}{j\omega C_3}$ und $Z_4 = \frac{1}{j\omega C_4}$.

- (c) Setzen Sie die Bauteilwerte in das Spannungsverhältnis $\frac{U_a}{U_e}$ ein. Vereinfachen Sie das Verhältnis, wenn die Frequenz im Bereich $f \in [1; 500]Hz$ bleiben soll. Beachten Sie dabei den Zusammenhang $\omega = 2\pi f$.

Lösung:

$$K1 : \frac{U_e - U_{K1}}{Z_1} - \frac{U_{K1} - U_a}{Z_3} - \frac{U_{K1} - U_a}{Z_2} = 0$$

$$K2 : \frac{U_{K1} - U_{K2}}{Z_2} - \frac{U_{K2}}{Z_4} = 0$$

$$U_d = 0 \Rightarrow U_{K2} = U_p = U_n = U_a$$

$$\begin{aligned}
 K_2 : \frac{U_{K_1} - U_a}{Z_2} - \frac{U_a}{Z_4} &= 0 \\
 \frac{U_{K_1} - U_a}{Z_2} - \frac{U_a}{Z_4} &= 0 \\
 \frac{U_{K_1}}{Z_2} &= \frac{U_a}{Z_2} + \frac{U_a}{Z_4} \\
 U_{K_1} &= \left(1 + \frac{Z_2}{Z_4}\right) U_a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_1 : \frac{U_e}{Z_1} + U_{K_1} \left(-\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_3} - \frac{1}{Z_2}\right) + U_a \left(\frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_2}\right) &= 0 \\
 \frac{U_e}{Z_1} + \left[\left(1 + \frac{Z_2}{Z_4}\right) \left(-\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_3} - \frac{1}{Z_2}\right) + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_2}\right] U_a &= 0 \\
 \frac{U_e}{Z_1} + \left[-\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_3} - \frac{1}{Z_2} - \frac{Z_2}{Z_4 Z_1} - \frac{Z_2}{Z_4 Z_3} - \frac{Z_2}{Z_4 Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_2}\right] U_a &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{U_e}{Z_1} &= U_a \left[\frac{1}{Z_1} + \frac{Z_2}{Z_4 Z_1} + \frac{Z_2}{Z_4 Z_3} + \frac{Z_2}{Z_4 Z_2}\right] \\
 \frac{U_e}{U_a} &= 1 + \frac{Z_2}{Z_4} + \frac{Z_1 Z_2}{Z_4} \left(\frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_2}\right) \\
 \frac{U_a}{U_e} &= \frac{1}{1 + \frac{Z_2}{Z_4} + \frac{Z_1 Z_2}{Z_4} \left(\frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_2}\right)}
 \end{aligned}$$

(b) Das Einsetzen der gegebenen Impedanzen liefert die folgende Übertragungsfunktion:

$$\begin{aligned}
 \frac{U_a}{U_e} &= \frac{1}{1 + \frac{R_2}{j\omega C_4} + \frac{R_1 R_2}{j\omega C_4} \left(\frac{1}{j\omega C_3} + \frac{1}{R_2}\right)} \\
 &= \frac{1}{1 + j\omega C_4 R_2 + j\omega C_4 R_1 R_2 \left(j\omega C_3 + \frac{1}{R_2}\right)} \\
 &= \frac{1}{1 - \omega^2 C_3 C_4 R_1 R_2 + j\omega C_4 (R_1 + R_2)}
 \end{aligned}$$

Für die gegebenen Bauteilwerte:

$$C_4 = 22nF, C_3 = 10nF, R_1 = 33k\Omega, R_2 = 1k\Omega$$

und den gewählten Frequenzbereich befindet sich das Produkt $\omega^2 C_3 C_4 R_1 R_2$ im folgenden Intervall:

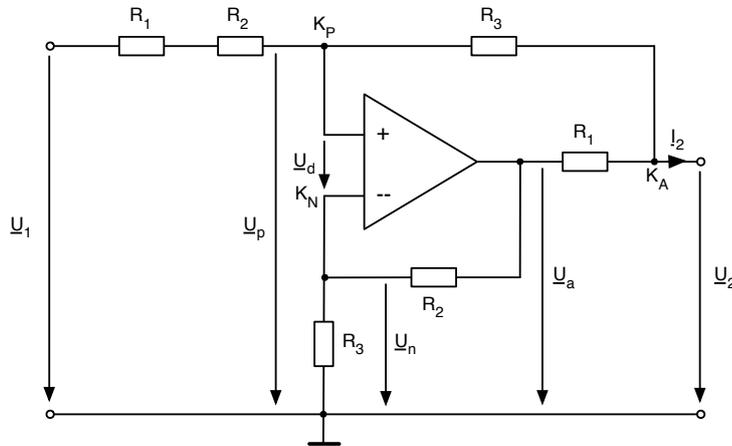
$$\omega^2 C_3 C_4 R_1 R_2 \in [2.866 \cdot 10^{-7}; 0.072],$$

was gegenüber 1 vernachlässigbar klein ist. Dadurch reduziert sich die Übertragungsfunktion auf:

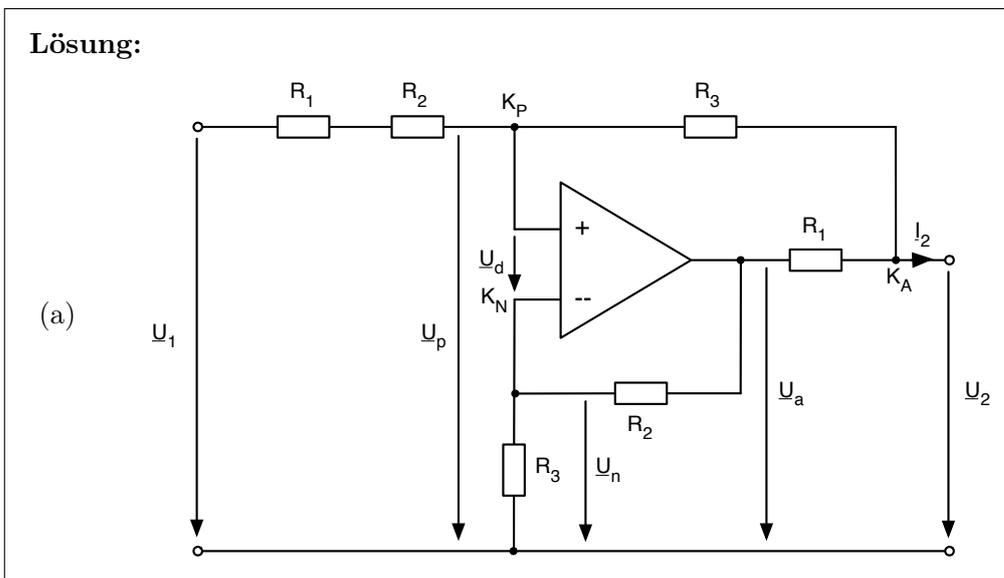
$$\frac{U_a}{U_e} \approx \frac{1}{1 + j\omega C_4 (R_1 + R_2)}$$

Aufgabe 4
(Klausuraufgabe)

Folgende ideale Operationsverstärkerschaltung sei gegeben:



- (a) Beschreiben Sie, ausgehend von den Knotengleichungen an den Knoten K_P , K_N und K_A , die Abhängigkeit von I_2 als Funktion von U_1 und U_2 . Nehmen Sie an, dass der Ausgang belastet sei.
- (b) Welche Bedingung muss gelten, damit I_2 unabhängig von U_2 wird?
- (c) Nun gelte $I_2 = \frac{U_1}{Z_1} + \frac{U_2(Z_2 - Z_3)}{Z_1 \cdot Z_3}$. Der Ausgang sei dabei nicht belastet. Ausserdem gilt $Z_2 \neq Z_3 \neq Z_1$. Bestimmen Sie das Verhältnis $\frac{U_2}{U_1}$.
- (d) Es sei nun $Z_1 = j\Omega$, $Z_2 = -j11\Omega$, $Z_3 = (1 - j)\Omega$. Berechnen Sie nun $\frac{U_2}{U_1}$.



$$\begin{aligned}
 K_P: \frac{U_1 - U_p}{R_1 + R_2} + \frac{U_2 - U_p}{R_3} &= 0 \\
 K_N: \frac{U_a - U_n}{R_2} - \frac{U_n}{R_3} &= 0 \\
 K_A: \frac{U_a - U_2}{R_1} + \frac{U_p - U_2}{R_3} - I_2 &= 0
 \end{aligned}$$

Mit $\underline{U}_n = \underline{U}_p = \underline{U}$:

$$K_A \Rightarrow I_2 = \frac{U_a}{R_1} - \frac{U_2}{R_1} + \frac{U}{R_3} - \frac{U_2}{R_3} \quad U_a = \underline{U} + \frac{R_2}{R_3} \underline{U}$$

\underline{U}_a in K_A einsetzen:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{U}{R_1} + \frac{R_2}{R_1 R_3} \underline{U} - \frac{U_2}{R_1} + \frac{U}{R_3} - \frac{U_2}{R_3} \\
 &= \underline{U} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{R_2}{R_1 R_3} + \frac{1}{R_3} \right) - \frac{U_2}{R_3} - \frac{U_2}{R_1}
 \end{aligned}$$

Aus K_P bekommt man:

$$\begin{aligned}
 \frac{R_3(\underline{U}_1 + \underline{U}) + (R_1 + R_2)(\underline{U}_2 - \underline{U})}{(R_1 + R_2)R_3} &= 0 \\
 R_3 \underline{U}_1 - R_3 \underline{U} + (R_1 + R_2) \underline{U}_2 - (R_1 + R_2) \underline{U} &= 0 \\
 \underline{U}(R_1 + R_2 + R_3) &= R_3 \underline{U}_1 + (R_1 + R_2) \underline{U}_2 \\
 \underline{U} &= \frac{R_3 \underline{U}_1 + (R_1 + R_2) \underline{U}_2}{R_1 + R_2 + R_3}
 \end{aligned}$$

\underline{U} in K_A einsetzen:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \left(\frac{R_3 \underline{U}_1 + (R_1 + R_2) \underline{U}_2}{R_1 + R_2 + R_3} \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{R_2}{R_1 R_3} + \frac{1}{R_3} \right) - \frac{U_2}{R_3} - \frac{U_2}{R_1} \\
 &= \left(\frac{R_3 \underline{U}_1 + (R_1 + R_2) \underline{U}_2}{R_1 + R_2 + R_3} \right) \left(\frac{R_3 + R_2 + R_1}{R_1 R_3} \right) - \frac{U_2}{R_3} - \frac{U_2}{R_1} \\
 &= \frac{R_3 \underline{U}_1}{R_1 R_3} + \frac{(R_1 + R_2) \underline{U}_2}{R_1 R_3} - \frac{U_2}{R_3} - \frac{U_2}{R_1} \\
 &= \frac{\underline{U}_1}{R_1} + \underline{U}_2 \frac{R_1 + R_2 - R_1 - R_3}{R_1 R_3} \\
 &= \frac{\underline{U}_1}{R_1} + \underline{U}_2 \frac{R_2 - R_3}{R_1 R_3}
 \end{aligned}$$

- (b) Die geforderte Unabhängigkeit wird erfüllt, wenn $R_2 = R_3$, d.h. der Term neben \underline{U}_2 wird zu Null.

$$I_2 = \frac{\underline{U}_1}{R_1}$$

(c) Für den unbelasteten Fall wird der Strom \underline{I}_2 zu Null.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} + \underline{U}_2 \left(\frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3} \right) \\ \underline{U}_2 \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3} &= -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} \\ \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} &= -\frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2 - \underline{Z}_3)} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_3} \end{aligned}$$

(d) Das Einsetzen der vorgegebenen Werte in die Gleichung aus c) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} &= -\frac{(1-j)\Omega}{(-j11\Omega) - (1-j)\Omega} \\ &= -\frac{1-j}{-j11 - 1 + j} = \frac{1-j}{1+j10} = \frac{-9}{101} + j\frac{-11}{101} \end{aligned}$$