

Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel
Tel: 0721 608-42650
Olaf.Doessel@kit.edu

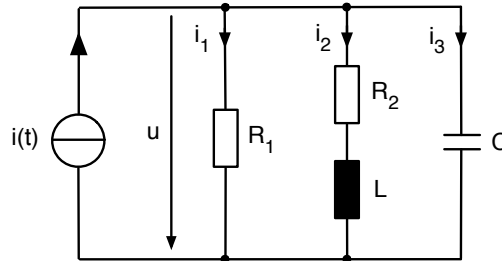
Übungsleiter: Dipl.-Ing. G. Lenis
Tel: 0721 608-45478
Gustavo.Lenis@kit.edu

Übungsblatt Nr. 4: komplexe Zahlen, Ströme, Spannungen, Impedanzen

Aufgabe 1

Gegeben ist folgender Stromkreis mit $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $L = 40\mu H$, $C = 1\mu F$. Die Stromquelle erzeugt den Strom $i(t) = 8\cos(\omega t)A$ mit $\omega = 2e5s^{-1}$.

Wenn sinusförmige Spannungen/Ströme vorliegen kann man auf eleganter Art und Weise mit Hilfe der komplexen Zahlen rechnen.



- Wandeln Sie zunächst die Stromquelle in ihre komplexe Darstellung um. Verwenden Sie dabei die komplexe Exponentialfunktion. Am Ende soll der reelle Strom $i(t)$ durch den Realteil des komplexen Stromes $\underline{i}(t)$ angegeben werden können ($Re\{\underline{i}(t)\} = i(t)$).
- Wandeln Sie die Bauteile in ihre komplexe Darstellung um. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der Bauteilimpedanzen.
- Berechnen Sie die reelle Spannung $u(t)$ und die reellen Ströme $i_1(t)$, $i_2(t)$ und $i_3(t)$.
Geben Sie die Größen in Abhängigkeit von nur einer Kosinus-Funktion an.

Lösung:

- Berechnen der Real- und Imaginärteile der Bauteilimpedanzen und der Stromquelle:

- Stromquelle: $i(t) = 8\cos(\omega t)A \rightarrow \underline{i}(t) = 8e^{j\omega t}A$

(wir nehmen an: rein reell, d.h. der Imaginärteil wird nicht beachtet).

- Widerstände: ebenfalls rein reell, d.h. Imaginärteil und Phase gleich null

- Induktivität/Spule: $\underline{Z}_L = j\omega L = j200000s^{-1} \cdot 40\mu H = j8\Omega$

($Re\{\underline{Z}\} = 0\Omega$, $Im\{\underline{Z}\} = 8\Omega \Rightarrow$ Phase: 90°)

- Kondensator: $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{200000s^{-1} \cdot 1\mu F} = -j5\Omega$

($Re\{\underline{Z}\} = 0\Omega$, $Im\{\underline{Z}\} = -5\Omega \Rightarrow$ Phase: -90°)

- Der Ersatzwiderstand der Gesamtschaltung:

$$\begin{aligned}
 \underline{Z} &= R_1 \parallel (R_2 + \underline{Z}_L) \parallel \underline{Z}_C \\
 &= \frac{R_1(R_2 + \underline{Z}_L)\underline{Z}_C}{R_1(R_2 + \underline{Z}_L) + R_1\underline{Z}_C + (R_2 + \underline{Z}_L)\underline{Z}_C} \\
 &= \frac{10(6 + j8)(-j5)}{10(6 + j8) + 10(-j5) + (6 + j8)(-j5)}\Omega \\
 &= \frac{400 - j300}{100}\Omega = (4 - j3)\Omega
 \end{aligned}$$

$$\arg(\underline{Z}) = -\arctan\left(\frac{3}{4}\right) \approx -36.87_{deg}$$

$$|\underline{Z}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

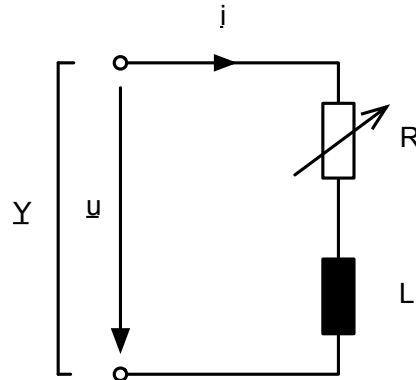
$$\begin{aligned}\underline{u}(t) &= \underline{Z} \cdot \underline{i}(t) = 5e^{j36.87_{deg}} \cdot 8e^{j\omega t} V \\ &= 40e^{j(\omega t - 36.87_{deg})} V = 40e^{j(\omega t - 0.64_{rad})} V \\ u(t) &= \operatorname{Re}\{\underline{u}(t)\} = \operatorname{Re}\{40e^{j(\omega t - 0.64_{rad})} V\} = 40\cos(\omega t - 0.64_{rad}) V\end{aligned}$$

Ströme:

$$\begin{aligned}i_1(t) &= \frac{u(t)}{R_1} = \frac{40\cos(\omega t - 0.64_{rad})}{10} A = 4\cos(\omega t - 0.64_{rad}) A \\ \underline{i}_2(t) &= \frac{\underline{u}(t)}{R_2 + \underline{Z}_L} = \frac{40e^{j(\omega t - 0.64_{rad})}}{6 + j8} A = \frac{40e^{j(\omega t - 0.64_{rad})}}{10e^{j0.93_{rad}}} A \\ &= 4e^{j(\omega t - 1.57_{rad})} A = 4e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} A \\ i_2(t) &= \operatorname{Re}\{\underline{i}_2(t)\} = 4\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) A \\ \underline{i}_3(t) &= \frac{\underline{u}(t)}{\underline{Z}_C} = \frac{40e^{j(\omega t - 0.64_{rad})}}{-j5} A = \frac{40e^{j(\omega t - 0.64_{rad})}}{5e^{-j\frac{\pi}{2}}} A \\ &= 8e^{j(\omega t + 0.93_{rad})} A \\ i_3(t) &= \operatorname{Re}\{\underline{i}_3(t)\} = 8\cos(\omega t + 0.93_{rad}) A\end{aligned}$$

Aufgabe 2

An der Serienschaltung aus einer verlustfreien Spule der Induktivität L und einem veränderbaren ohmschen Widerstand R liegt eine sinusförmige Wechselspannung $\underline{u}$ mit der komplexen Amplitude $\hat{\underline{U}}$ und der Kreisfrequenz ω_0 .



$$\begin{aligned}\omega_0 L &= 10\Omega \\ \hat{\underline{U}} &= 10V \cdot e^{j\pi} \\ \frac{R}{\Omega} &= 0 \dots \infty\end{aligned}$$

- (a) Wie groß ist die komplexe Amplitude des Klemmenstroms $\underline{i}$, wenn der Widerstand R auf 0Ω eingestellt wird? Geben Sie den Betrag der Amplitude und den Nullphasenwinkel φ zahlenmäßig an.

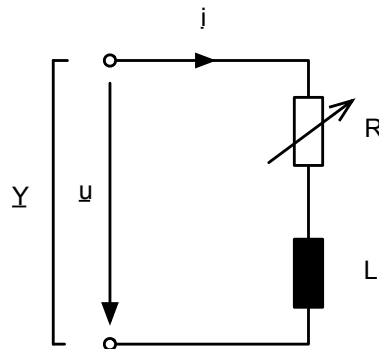
Hinweis : Berechnen Sie den Strom $\underline{i}$ komplex, d.h. wenden Sie das Ohmsche Gesetz an, wobei der komplexe Strom durch die komplexe Spannung und die komplexe Impedanz ($R = 0\Omega \Rightarrow \underline{Z} = \underline{Z}_L$) definiert wird. Die für die Rechnung benötigten Information finden sich in Kapitel 4.4.

- (b) Berechnen Sie allgemein die Admittanz $\underline{Y}$ als Funktion von ω_0 , R und L . Geben Sie Imaginär- (B) und Realteil (G) getrennt an.

Hinweis : Die Admittanz $\underline{Y}$ ist das Reziproke zur Impedanz $\underline{Z}$. Berechnen Sie also zuerst die Impedanz und bilden Sie dann den Kehrwert. Um G und B zu bestimmen, müssen Sie eventuell komplex-konjugiert erweitern.

- (c) Für welchen Wert von R nimmt die Schaltung die maximale Wirkleistung P_{max} auf? Wie groß ist dieses P_{max} ?

Lösung:



- (a) Für $R = 0\Omega$ verbleibt nur noch die komplexe Impedanz $\underline{Z} = j\omega L = j10\Omega$ im Stromkreis. Die komplexe Amplitude des Stroms $\underline{i}$ berechnet sich über den Ohmschen Zusammenhang von Spannung und Impedanz:

$$\underline{\hat{I}} = \frac{\underline{\hat{U}}}{\underline{\hat{Z}}} = \frac{10V \cdot e^{j\pi}}{j10\Omega} = -j1Ae^{j\pi} = e^{-j\frac{\pi}{2}}1Ae^{j\pi} = 1Ae^{j\frac{\pi}{2}}$$

Daraus können Betrag und Phasenwinkel direkt abgelesen werden:

$$|\underline{\hat{I}}| = 1A \text{ bzw. } \arg(\underline{\hat{I}}) = \frac{\pi}{2}$$

- (b) Die Impedanz der Gesamtschaltung besteht aus der Reihenschaltung von Spule und Widerstand:

$\underline{Z} = R + j\omega L$ und somit $\underline{Y} = \frac{1}{R + j\omega L}$. Für die Bestimmung von Real- und Imaginärteil muss der Bruch konjugiert-komplex erweitert werden:

$$\underline{Y} = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R - j\omega L}{(R + j\omega L)(R - j\omega L)} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\operatorname{Re}\{\underline{Y}\} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} \quad (\text{Wirkleitwert})$$

$$\operatorname{Im}\{\underline{Y}\} = -\frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \quad (\text{Blindleitwert})$$

- (c) Die Scheinleistung ist definiert durch die komplexen Amplituden (=Zeigerlängen) oder durch Effektivwerte. Letztere lassen sich aus den Amplituden der sinusförmigen Wechselgrößen durch eine Division durch $\sqrt{2}$ gewinnen: $U_{eff} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$.

Das ist auch der Wert, den ein Messinstrument bei einer Wechselstrommessung anzeigt.

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \underline{I}^* \\ &= \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{I}^*}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \hat{U} \left(\frac{\hat{U}}{\underline{Z}} \right)^* = \frac{1}{2} |\hat{U}|^2 \underline{Y}^* \\ &= \frac{1}{2} |\hat{U}|^2 \frac{R + j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \end{aligned}$$

Die Wirkleistung P ist der Realteil von $\underline{S}$: $P = \frac{|\hat{U}|^2 \cdot R}{2[R^2 + (\omega L)^2]}$,

(die Blindleistung Q der Imaginärteil: $Q = \frac{|\hat{U}|^2 \cdot \omega L}{2[R^2 + (\omega L)^2]}$)

Die Wirkleistung ist also eine Funktion von R . Das Maximum lässt sich daher durch die Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen.

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dR} \stackrel{!}{=} 0 &= \frac{|\hat{U}|^2 \cdot 2[R^2 + (\omega_0 L)^2] - |\hat{U}|^2 R \cdot 2(2R)}{4[R^2 + (\omega_0 L)^2]^2} \\ &= \frac{|\hat{U}|^2 \cdot [R^2 + (\omega_0 L)^2] - |\hat{U}|^2 R \cdot (2R)}{2[R^2 + (\omega_0 L)^2]^2}\end{aligned}$$

Nullstelle(n) des Zählers:

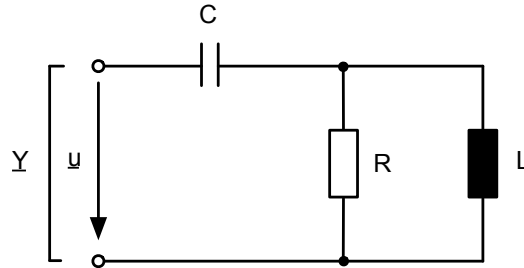
$$\begin{aligned}0 &= |\hat{U}|^2 \cdot [R^2 + (\omega_0 L)^2] - |\hat{U}|^2 R \cdot (2R) \\ &= [R^2 + (\omega_0 L)^2] - R \cdot (2R) = -R^2 + (\omega_0 L)^2 \\ R^2 &= (\omega_0 L)^2 \\ R &= \omega_0 L\end{aligned}$$

Substituieren von $\omega_0 L$ in der Gleichung von P und einsetzen der gegebenen Zahlenwerte:

$$P_{max} = \frac{100V^2 \cdot 10\Omega}{2(200\Omega^2)} = \frac{1000}{400}W = 2.5W$$

Aufgabe 3

Gegeben ist der abgebildete Zweipol aus einer verlustfreien Spule mit der Induktivität L , einem verlustfreien Kondensator mit der Kapazität C und einem ohmschen Widerstand R .



- (a) Berechnen Sie den komplexen Widerstand $\underline{Z}(j\omega)$, d.h. die Schaltung von links gesehen, den Realteil $\text{Re}\{\underline{Z}(j\omega)\}$ in allgemeiner Form, d.h. in Abhängigkeit von R , C , L und ω .

Der Zweipol wird nun von einer Wechselspannung mit dem komplexen Effektivwert $\underline{U} = (6 - j2)V$ und der Kreisfrequenz ω_1 gespeist. Bei ω_1 ist $\underline{Z} = (3 + j2)\Omega$.

Bestimmen Sie:

- (b) die reelle Amplitude $\hat{i}$ und die Phase φ des Stromes im Kondensator.
Hinweis : die Grundlagen dafür vermittelt Kap. 4.4.
- (c) die vom Zweipol aufgenommene Wirkleistung P , Blindleistung Q und Scheinleistung S .
Hinweis : Lesen Sie eventuell hierzu Kap. 5.5.

Lösung:

- (a) Berechnen des Gesamtwiderstandes:

$$\begin{aligned}
 \underline{Z} &= \underline{Z}_C + (R \parallel \underline{Z}_L) = \frac{1}{j\omega C} + \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L} \\
 &= \frac{1}{j\omega C} + \frac{j\omega LR(R - j\omega L)}{(R + j\omega L)(R - j\omega L)} \\
 &= -j\frac{1}{\omega C} + \frac{j\omega LR(R - j\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2} \\
 &= \frac{R(\omega L)^2}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left(\frac{\omega LR^2}{R^2 + (\omega L)^2} - \frac{1}{\omega C}\right)
 \end{aligned}$$

- (b) Betrag und Phase des Stromes können auf zwei Arten bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
\hat{\underline{I}} &= \frac{\hat{\underline{U}}}{\underline{Z}} = \frac{\sqrt{2}(6-j2)V}{(3+j2)\Omega} \\
&= \sqrt{2} \frac{(6-j2)(3-j2)}{(3+j2)(3-j2)} A = \sqrt{2} \frac{18-j12-j6-4}{9+4} A \\
&= \frac{\sqrt{2}}{13} (14-j18) A
\end{aligned}$$

- i) erweitern des Bruches mit dem konjugiert-komplexen des Nenners.
Daraus lassen sich dann direkt Betrag und Phase ableiten:

$$\begin{aligned}
|\hat{\underline{I}}| &= \frac{\sqrt{2}}{13} \sqrt{14^2 + 18^2} A = \frac{\sqrt{2}}{13} \sqrt{520} A \approx 2.48 A \\
\arg(\hat{\underline{I}}) &= -\arctan\left(\frac{18}{14}\right) \approx -0.91_{rad}
\end{aligned}$$

- ii) Umwandeln von Zähler und Nenner in Polardarstellung, dann Rechenregeln für die Division von komplexen Zahlen anwenden:

$$\begin{aligned}
\hat{\underline{I}} &= \frac{\hat{\underline{U}}}{\underline{Z}} = \frac{\sqrt{2}(6-j2)V}{(3+j2)\Omega} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{6^2+2^2} e^{j(-\arctan(\frac{2}{6}))}}{\sqrt{3^2+2^2} e^{j(\arctan(\frac{2}{3}))}} A \\
&\approx \sqrt{2} \frac{\sqrt{40} e^{-j0.32_{rad}}}{\sqrt{13} e^{j0.59_{rad}}} A = \sqrt{\frac{80}{13}} e^{j(-0.32_{rad}-0.59_{rad})} A \\
&= 2.48 e^{-j0.91_{rad}} A
\end{aligned}$$

- (c) Aus der komplexen Leistung $\underline{S}$ lassen sich Wirkleistung P und Blindleistung Q ablesen, daher zuerst die Berechnung von $\underline{S}$:

$$\begin{aligned}
\underline{S} &= \frac{1}{2} \hat{\underline{U}} \hat{\underline{I}}^* = \frac{1}{2} \sqrt{2} \underline{U} \cdot \sqrt{2} \underline{I}^* = \underline{U} \underline{I}^* = \frac{|\underline{U}|^2}{\underline{Z}^*} \\
&= \frac{(6^2 + 2^2)}{3-j2} VA = \frac{40(3+j2)}{(3-j2)(3+j2)} VA = \frac{40}{13} (3+j2) VA \\
&= \left(\frac{120}{13} + j \frac{80}{13} \right) VA
\end{aligned}$$

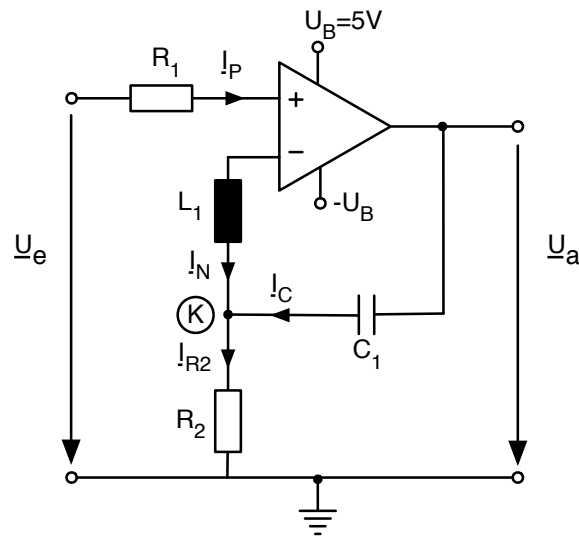
Die Scheinleistung ist ihr Betrag:

$$|\underline{S}| = \sqrt{\frac{120^2 + 80^2}{169}} VA \approx 11.1 VA$$

Die Wirkleistung P ist der Realteil von $\underline{S}$: $P = \frac{120}{13} W \approx 9.23 W$,
die Blindleistung Q der Imaginärteil: $Q = \frac{80}{13} var \approx 6.15 var$

Aufgabe 4

Gegeben sei folgendes Netzwerk:



- Nennen Sie 3 Regeln beim Umgang mit OP-Schaltungen.
- Stellen Sie die Knotengleichung für (K) auf.
- Bestimmen Sie $\underline{U}_L$ und $\underline{U}_{R2}$ in Abhängigkeit von $\underline{I}_C$.
- Bestimmen Sie $\underline{U}_C$ und die Phase der Spannung $\underline{U}_a$ am Ausgang für $\underline{U}_e = 1\text{mV}$, $R_2 = 250\Omega$ und $C_1 = 63\text{nF}$ bei $f = 10\text{kHz}$.
Rechnen Sie zunächst allgemein und setzen Sie erst zum Schluss die Zahlenwerte ein.
- Wie verhält sich die Phase der Spannung $\underline{U}_a$, wenn ω gegen Null geht?
- Wodurch wird die Amplitude des Ausgangssignals limitiert und welchen Wert kann sie im vorliegenden Fall maximal annehmen?

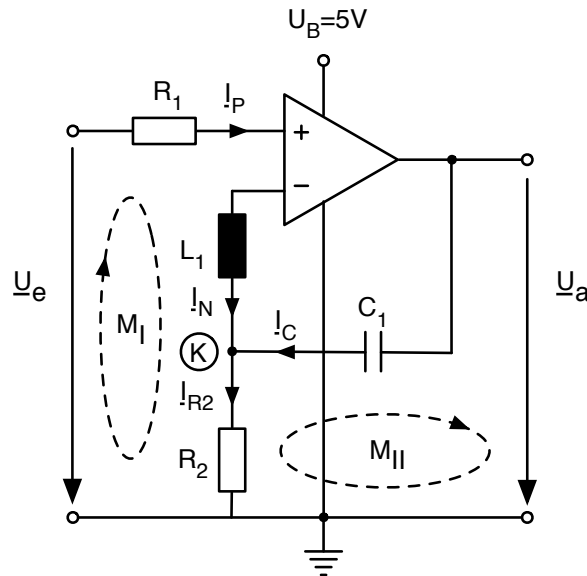
Lösung:

- keine Masche durch den OP
- $U_d \approx 0$
- keine Ströme in den OP
- Die Knotengleichung für K lautet: $\underline{I}_C + \underline{I}_N - \underline{I}_{R2} = 0$
Da keine Ströme in den OP fließen (s.a) ist $\underline{I}_N = 0$ und somit verein-

facht sich der Term zu

$$\begin{aligned}\underline{I}_C - \underline{I}_{R_2} &= 0 \\ \underline{I}_C &= \underline{I}_{R_2}\end{aligned}$$

- (c) Da $\underline{I}_N = 0$ ist, fällt über der Spule keine Spannung ab, d.h. $\underline{U}_L = 0$. Die Spannung über R_2 lässt sich über das Ohmsche Gesetz bestimmen:
 $\underline{U}_{R_2} = \underline{I}_{R_2} \cdot R_2$
- (d) Für die Bestimmung des Zusammenhangs zwischen Ein- und Ausgang können Maschen verwendet werden.



$$\begin{aligned}M_I : \underline{U}_e &= R_1 \underline{I}_P + \underline{Z}_L \underline{I}_N + R_2 \underline{I}_{R_2} \\ M_{II} : \underline{U}_a &= R_2 \underline{I}_{R_2} + \underline{Z}_C \underline{I}_C = R_2 \underline{I}_{R_2} + \underline{Z}_C \underline{I}_{R_2} = (R_2 + \underline{Z}_C) \underline{I}_{R_2}\end{aligned}$$

Anwenden der Ergebnisse aus b) und Auflösen von M_I nach $\underline{I}_{R_2}$

$$\begin{aligned}\underline{U}_e &= R_1 \underline{I}_P + \underline{Z}_L \underline{I}_N + R_2 \underline{I}_{R_2} \\ &= R_2 \underline{I}_{R_2} (= \underline{U}_{R_2}) \\ \underline{I}_{R_2} &= \frac{\underline{U}_e}{R_2}\end{aligned}$$

Setzt man dies in M_{II} ein, ergibt sich

$$\begin{aligned}\underline{U}_a &= (R_2 + \underline{Z}_C) \underline{I}_{R_2} = (R_2 + \underline{Z}_C) \frac{\underline{U}_e}{R_2} \\ \underline{U}_a &= \frac{R_2 + \underline{Z}_C}{R_2} \underline{U}_e \\ &= \frac{R_2 + \frac{1}{j\omega C_1}}{R_2} \underline{U}_e = \frac{j\omega C_1 R_2 + 1}{j\omega C_1 R_2} \underline{U}_e = \left(1 + \frac{1}{j\omega C_1 R_2}\right) \underline{U}_e \\ &= \left(1 - j \frac{1}{\omega C_1 R_2}\right) \underline{U}_e\end{aligned}$$

Einsetzen der Zahlwerte

$$\begin{aligned}\underline{U}_a &= \left(1 - j \frac{1}{2\pi \cdot 10\text{kHz} \cdot 63\text{nF} \cdot 250\Omega}\right) 1\text{mV} \\ &\approx (1 - j1)\text{mV}\end{aligned}$$

Der Winkel zwischen Real- und Imaginärteil von $\underline{U}_a$ beträgt somit $-\pi/4$ bzw. -45° .

- (e) Dieser Aufgabenteil lässt sich mit Hilfe des Zwischenergebnisses aus d) beantworten:

$$\underline{U}_a = \left(1 - j \frac{1}{\omega C_1 R_2}\right) \underline{U}_e$$

In diesem Term geht der Imaginärteil für $\omega \rightarrow 0$ gegen minus Unendlich und die Phase daher gegen -90° .

- (f) Die maximale Ausgangsspannung des OPs wird durch die Versorgungsspannung limitiert, in diesem Fall (s. Schaltbild) also 5V.