

Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Lineare Elektrische Netze

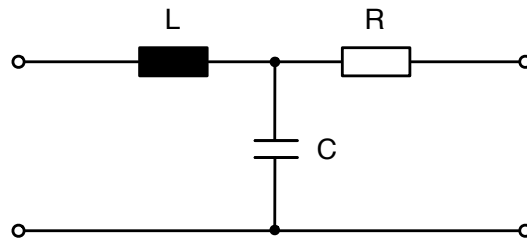
Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel
Tel: 0721 608-42650
Olaf.Doessel@kit.edu

Übungsleiter: Dipl.-Ing. G. Lenis
Tel: 0721 608-45478
Gustavo.Lenis@kit.edu

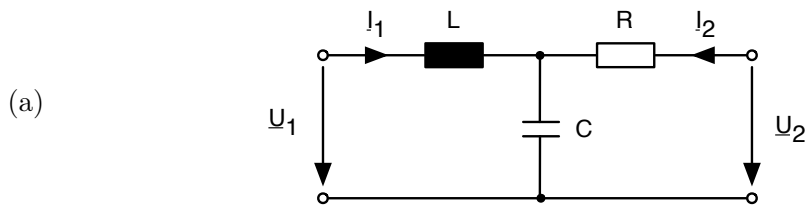
Übungsblatt Nr. 6: Vierpole/Zweitore

Aufgabe 1

Es sei folgende Schaltung gegeben:



- (a) Berechnen Sie die Impedanzmatrix $[Z]$.
- (b) Berechnen Sie die Admittanzmatrix $[Y]$ einmal direkt und einmal durch Transformation von $[Z]$.

Lösung:

Aufstellen der Impedanzmatrix:

$$\underline{Z}_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \quad (\text{Eingangs-Leerlaufimpedanz})$$

$$\underline{Z}_{22} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = R + \frac{1}{j\omega C} \quad (\text{Ausgangs-Leerlaufimpedanz})$$

$$\underline{Z}_{12} = \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{1}{j\omega C} \quad (\text{Leerlauf-Kernimpedanz, rückwärts})$$

$$\underline{Z}_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{j\omega C} \quad (\text{Leerlauf-Kernimpedanz, vorwärts})$$

und als ganzes:

$$[Z] = \begin{bmatrix} j\omega L + \frac{1}{j\omega C} & \frac{1}{j\omega C} \\ \frac{1}{j\omega C} & R + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix}$$

- (b) Die Admittanzmatrix kann auf zwei Arten bestimmt werden: zum einen erhält man sie als Inverse der Impedanzmatrix:

$$[Y] = [Z]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{Z_{22}}{\det Z} & -\frac{Z_{12}}{\det Z} \\ -\frac{Z_{21}}{\det Z} & \frac{Z_{11}}{\det Z} \end{bmatrix}$$

die dafür benötigte Determinante von $[Z]$ ist

$$\begin{aligned} \det[Z] &= \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) - \left(\frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{1}{j\omega C}\right) \\ &= j\omega LR + \frac{L}{C} - j\frac{R}{\omega C} + \frac{1}{(j\omega C)^2} - \frac{1}{(j\omega C)^2} \\ &= \frac{L}{C} + j\left(\omega LR - \frac{R}{\omega C}\right) = \frac{\omega L + j\omega^2 LCR - jR}{\omega C} \end{aligned}$$

und somit

$$[Y] = \begin{bmatrix} \frac{R + \frac{1}{j\omega C}}{\det Z} & -\frac{\frac{1}{j\omega C}}{\det Z} \\ -\frac{\frac{1}{j\omega C}}{\det Z} & \frac{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}{\det Z} \end{bmatrix}$$

Der andere Weg führt wie in a) über eine Analyse der Schaltung. Am Beispiel von $\underline{Y}_{11}$ soll dies einmal vorgestellt werden:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{11} &= \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} \right|_{\underline{U}_2=0} = \left(j\omega L + R \parallel \frac{1}{j\omega C} \right)^{-1} = \left(j\omega L + \frac{R \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \right)^{-1} \\ &= \left(j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega CR} \right)^{-1} = \left(\frac{j\omega L(1 + j\omega CR) + R}{1 + j\omega CR} \right)^{-1} \\ &= \frac{1 + j\omega CR}{j\omega L - \omega^2 LCR + R} = \frac{-j + \omega CR}{\omega L + j\omega^2 LCR - jR} \end{aligned}$$

Das ist genau das gleiche Ergebnis, das man auch aus $\frac{R \frac{1}{j\omega C}}{\det[Z]}$ erhält.

Zur weiteren Übung:

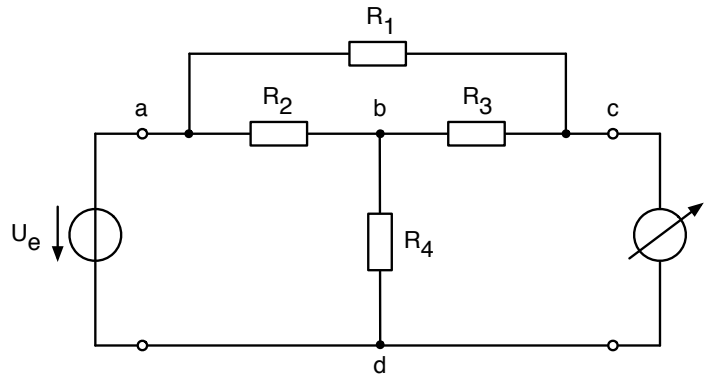
$\underline{Y}_{12}$ ergibt sich durch Kurzschließen von $\underline{U}_1$. Die Betrachtung von R in Reihe zu $L \parallel C$ ergibt einen Spannungsteiler, über dessen Parallelschaltung $L \parallel C$ die Spannung $\underline{I}_1 j\omega L$ abfällt.

$$\begin{aligned} \frac{-\underline{I}_1 j\omega L}{\underline{U}_2} &= \frac{j\omega L \parallel \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L \parallel \frac{1}{j\omega C} + R} \\ \underline{Y}_{12} = \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \right|_{\underline{U}_1=0} &= -\frac{1}{j\omega L} \frac{j\omega L \parallel \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L \parallel \frac{1}{j\omega C} + R} = -\frac{1}{j\omega L} \frac{\frac{j\omega L \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}}{\frac{j\omega L \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} + R} \\ &= -\frac{1}{j\omega L} \frac{\frac{\frac{L}{C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}}{\frac{\frac{L}{C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} + R} \\ &= -\frac{1}{j\omega L} \frac{1}{1 + R \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \frac{C}{L}} \\ &= -\frac{1}{j\omega CL} \frac{\omega C}{\omega + R \left(j\omega^2 L - \frac{j}{C} \right) \frac{C}{L}} \\ &= -\frac{1}{j\omega C} \frac{\omega C}{\omega L + j\omega^2 LCR - jR} \end{aligned}$$

Auch dieses Ergebnis entspricht dem Eintrag in der Admittanzmatrix
 $-\frac{1}{j\omega C} \frac{1}{\det \underline{Z}}.$

Aufgabe 2

Untersucht werden soll folgende Schaltung:



- (a) Berechnen Sie den vom Amperemeter rechts angezeigten Strom $\underline{I}$ für $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 30\Omega$, $R_3 = 20\Omega$, $R_4 = 60\Omega$ und $U_e = 15V$.
- (b) Nun werden Spannungsquelle und Amperemeter ausgetauscht, bestimmen Sie $\underline{I}$ für die neue Anordnung.

Lösung:

- (a) den gesuchten Strom kann man mit Hilfe einer Knotengleichung für (b) bestimmen:

$$\frac{U_{bd}}{R_4} + \frac{U_{bd} - U_e}{R_2} + \frac{U_{bd}}{R_3} = 0$$

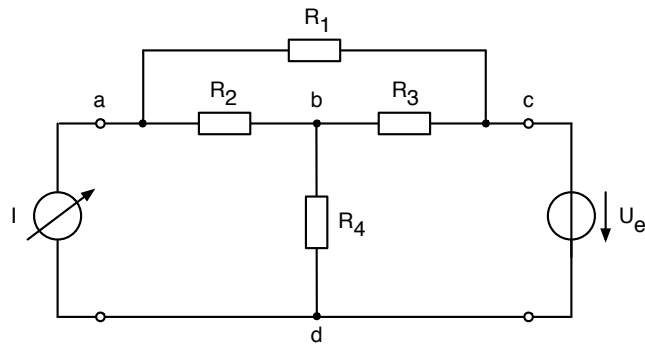
Über dem Amperemeter fällt keine Spannung ab (unendlich kleiner Innenwiderstand), daher liegt über R_3 ebenfalls U_{bd} an.

$$\begin{aligned} U_{bd} \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) &= \frac{U_e}{R_2} \\ U_{bd} \left(\frac{R_2 R_3 + R_4 R_3 + R_4 R_2}{R_2 R_3 R_4} \right) &= \frac{U_e}{R_2} \\ U_{bd} &= U_e \left(\frac{1}{R_2} \cdot \frac{R_2 R_3 R_4}{R_2 R_3 + R_4 R_3 + R_4 R_2} \right) \\ &= U_e \frac{R_3 R_4}{R_2 R_3 + R_4 R_3 + R_4 R_2} \\ &= 15V \frac{20 \cdot 60}{30 \cdot 20 + 60 \cdot 20 + 60 \cdot 30} \\ &= 15V \frac{1}{3} = 5V \end{aligned}$$

Der Strom I_a setzt sich folgendermassen zusammen:

$$\begin{aligned} I_a &= I_{R_1} + I_{R_3} = \frac{U_e}{R_1} + \frac{U_{bd}}{R_3} \\ &= \frac{15}{10} A + \frac{5}{20} A = \frac{7}{4} A = 1.75 A \end{aligned}$$

(b) die in der Aufgabenstellung geforderte Umstrukturierung führt zu



Der Strom am Knoten (b) wird somit zu

$$\frac{U_{bd}}{R_4 + \frac{U_{bd}}{R_2}} + \frac{U_{bd} - U_e}{R_3} = 0$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} U_{bd} \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) &= \frac{U_e}{R_3} \\ U_{bd} &= U_e \left(\frac{1}{R_3} \cdot \frac{R_2 R_3 R_4}{R_2 R_3 + R_4 R_3 + R_4 R_2} \right) \\ &= U_e \frac{R_2 R_4}{R_2 R_3 + R_4 R_3 + R_4 R_2} \\ &= 15V \frac{1}{2} = 7.5V \end{aligned}$$

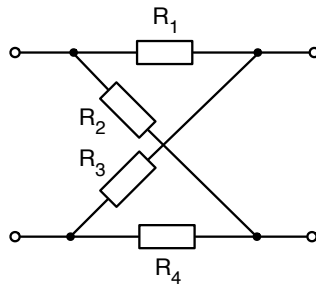
Damit lässt sich analog zu (a) der Strom I_b berechnen:

$$\begin{aligned} I_b &= I_{R1} + I_{R2} = \frac{U_e}{R_1} + \frac{U_{bd}}{R_2} \\ &= \frac{15}{10}A + \frac{7.5}{30}A = \frac{7}{4}A = 1.75A \end{aligned}$$

Ein solcher Vierpol wird als "reziprok" bezeichnet. Er weist, egal von welcher Seite her man ihn betrachtet, die gleichen Kernadmittanzen $\underline{Y}_{21} = \underline{Y}_{12}$ auf (vgl. Kap. 11.6).

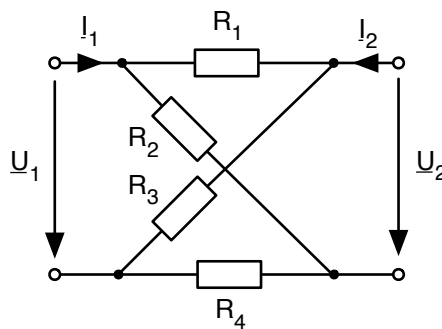
Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Y-Parameter der unten stehenden Schaltung



$$R_1 = 5\Omega, R_2 = 10\Omega, R_3 = 15\Omega, R_4 = 20\Omega$$

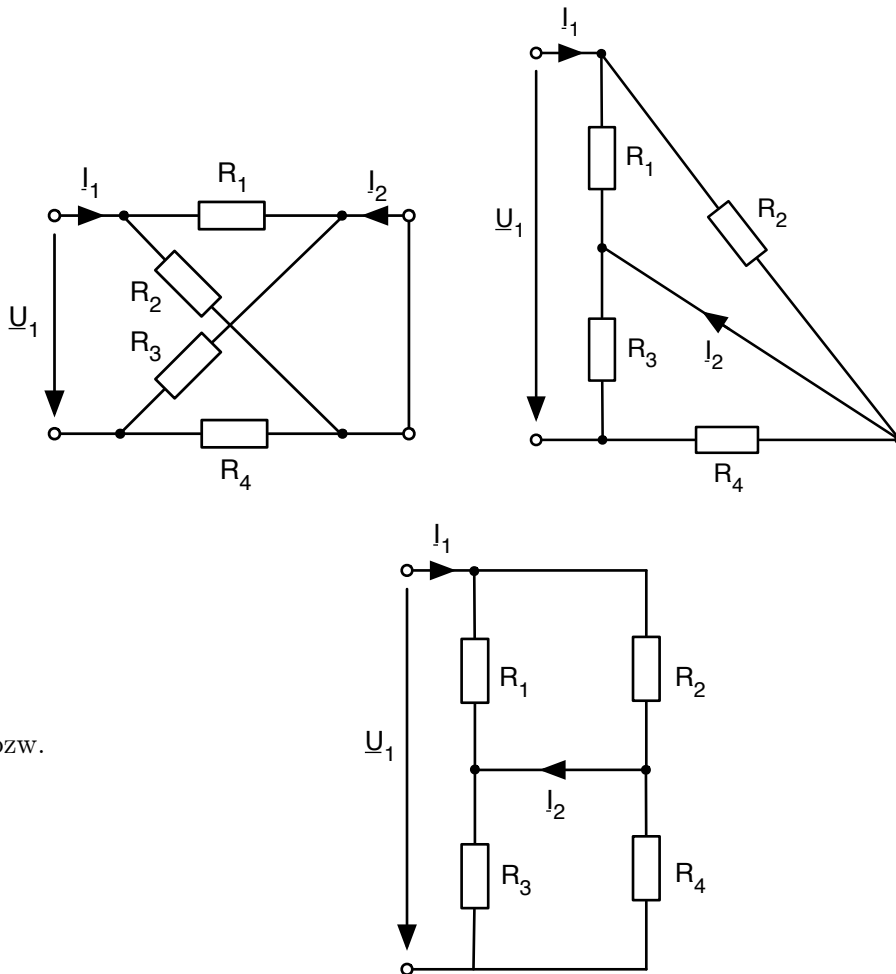
Lösung:



$$\begin{aligned} \underline{Y}_{11} &= \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} \right|_{\underline{U}_2=0} = \frac{1}{(R_1 \parallel R_2) + (R_3 \parallel R_4)} = \frac{1}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} \\ &= \frac{1}{\frac{R_1 R_2 (R_3 + R_4)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} + \frac{R_3 R_4 (R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}} \\ &= \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2)} = \frac{21}{250} S \\ \underline{Y}_{22} &= \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \right|_{\underline{U}_1=0} = \frac{1}{(R_1 \parallel R_3)(R_2 \parallel R_4)} = \frac{1}{\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}} \\ &= \frac{1}{\frac{R_1 R_3 (R_2 + R_4)}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)} + \frac{R_2 R_4 (R_1 + R_3)}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}} \\ &= \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}{R_1 R_3 (R_2 + R_4) + R_2 R_4 (R_1 + R_3)} = \frac{12}{125} S \end{aligned}$$

Für die Bestimmung von $\underline{Y}_{21}$ wird $\underline{U}_2$ zu Null gesetzt. Ein Zusammenziehen auf einen Punkt wie bei der Bestimmung von $\underline{Y}_{11}$ ist hier nicht sinnvoll. Es liegt daran, dass durch das Zusammenziehen der Strompfad für $\underline{I}_2$ verschwinden würde.

Deswegen ist ein Umzeichnen des Schaltplans in diesem Fall besser geeignet. Das Umzeichnen unter Berücksichtigung von $\underline{U}_2 = 0$ liefert Folgendes:



bzw.

Es handelt sich also um die aus Kap. 1.3 bekannte Brückenschaltung. Sollte der Spezialfall der abgeglichenen Brücke vorkommen, so gilt

$$\begin{aligned}\frac{R_1}{R_3} &= \frac{R_2}{R_4} \\ \underline{I}_2 &= 0\end{aligned}$$

Das ist hier aber leider nicht der Fall. Deshalb muss $\underline{I}_2$ mit Hilfe von Maschen- und Knotengleichungen bestimmt werden.

Die folgende Vorgehensweise wird dabei verwendet:

1. $\underline{I}_{R_3} = \underline{I}_2 + \underline{I}_{R_1}$
2. $\underline{I}_{R_1} = \frac{\underline{U}_{R_1}}{R_1} = \frac{\underline{I}_1(R_1 \parallel R_2)}{R_1}$
3. $\underline{I}_{R_3} = \frac{\underline{U}_{R_3}}{R_3} = \frac{\underline{I}_1(R_3 \parallel R_4)}{R_3}$

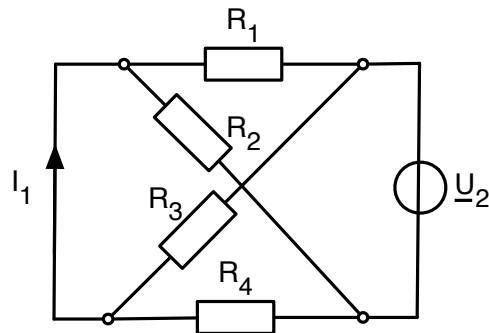
Einsetzen von 2. und 3. in 1. liefert:

$$\begin{aligned}\underline{I}_2 &= \underline{I}_{R_3} - \underline{I}_{R_1} \\ &= \underline{I}_1 \left(\frac{R_3 \parallel R_4}{R_3} - \frac{R_1 \parallel R_2}{R_2} \right) \\ &= \underline{I}_1 \left(\frac{R_4}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)\end{aligned}$$

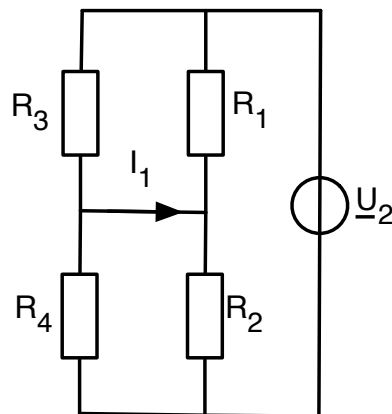
Für den Parameter $\underline{Y}_{21}$ gilt dann

$$\begin{aligned}\underline{Y}_{21} &= \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \right|_{\underline{U}_2=0} = \frac{\underline{I}_1 \cdot \left(\frac{R_4}{R_3+R_4} - \frac{R_2}{R_1+R_2} \right)}{\underline{U}_1} \\ &= \underline{Y}_{11} \cdot \left(\frac{R_4}{R_3+R_4} - \frac{R_2}{R_1+R_2} \right) \\ &= -\frac{1}{125} S\end{aligned}$$

Für den Parameter $\underline{Y}_{12}$ lässt sich die Schaltung folgendermaßen umzeichnen:



bzw.



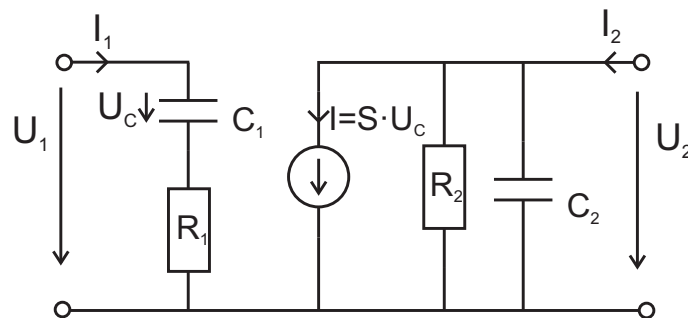
Die Bestimmung von $\underline{Y}_{12}$ läuft analog zu der von $\underline{Y}_{21}$. In diesem Fall gilt aber:

$$\begin{aligned}\underline{Y}_{12} &= \underline{Y}_{22} \left(\frac{R_4}{R_2+R_4} - \frac{R_3}{R_1+R_3} \right) \\ &= -\frac{1}{125} S\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Klausuraufgabe

Gegeben sei folgendes 2-Tor:



Bestimmen Sie die Y-Parameter des 2-Tors und zeichnen Sie zwei Ersatzschaltbilder (Bild 1: Y_{11}, Y_{21} ; Bild 2: Y_{12}, Y_{22}) mit sämtlichen Vereinfachungen.

Lösung:

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0} \Rightarrow Y_{11} = \frac{1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{j\omega C_1 R_1}{1 + j\omega C_1 R_1}$$

$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{U_1=0} \Rightarrow Y_{12} = 0$$

$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0} \Rightarrow Y_{21} = \frac{S U_c}{U_1} = S \frac{U_1 \frac{1}{j\omega C_1}}{U_1 \left(R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right)} = \frac{S}{1 + j\omega C_1 R_1}$$

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{U_1=0} \Rightarrow Y_{22} = \frac{1}{R_2} + j\omega C_2$$

Bild 1: $U_2 = 0$

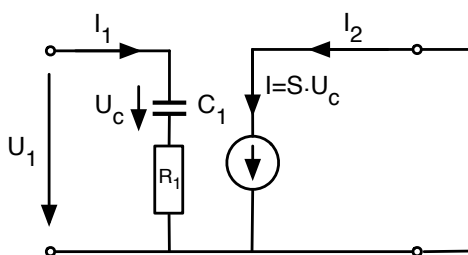


Bild 2: $U_1 = 0$

