

Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Lineare Elektrische Netze

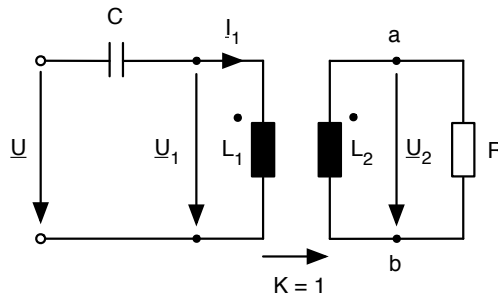
Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel
Tel: 0721 608-42650
Olaf.Doessel@kit.edu

Übungsleiter: Dipl.-Ing. G. Lenis
Tel: 0721 608-45478
Gustavo.Lenis@kit.edu

Übungsblatt Nr. 8: Transformatoren

Aufgabe 1

Die Abbildung zeigt einen verlustlosen, gekoppelten Transformator. Am Eingang wird ein Wechselstrom mit veränderbarer Frequenz ω angelegt.



- Wie lautet die komplexe Eingangsimpedanz $\underline{Z}$ als Funktion von L_1 , L_2 , R , C und ω ?
- Wie lautet die Resonanzfrequenz $\omega_0 = f(L_1, L_2, R, C)$, bei der die Eingangsimpedanz $\underline{Z}$ rein reell wird.
- Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild des Transformators in der Abbildung unter Verwendung von nur drei Elementen und bestimmen Sie deren Wert.
- Im folgenden sei $\omega = \omega_0$, d.h. die Schaltung wird bei Resonanz betrieben. Berechnen Sie die in der Schaltung umgesetzte Wirkleistung.

Lösung:

- (a) Die Eingangsimpedanz:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}_1} = \frac{(\underline{Z}_C + \underline{Z}_1)\underline{I}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_C + \underline{Z}_1$$

($\underline{Z}_1$: Eingangsimpedanz des Übertragers)

Trafogleichungen:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 \\ -\underline{I}_2 R &= j\omega M \underline{I}_1 + j\omega L_2 \underline{I}_2\end{aligned}$$

($\underline{U}_2$ ist hier schon substituiert: $\underline{U}_2 = -\underline{I}_2 R$)

$$-\underline{I}_2(R + j\omega L_2) = j\omega M \underline{I}_1$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_2 &= -\frac{j\omega M}{R + j\omega L_2} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_1 &= j\omega L_1 \underline{I}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R + j\omega L_2} \underline{I}_1 \\ \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R + j\omega L_2}\end{aligned}$$

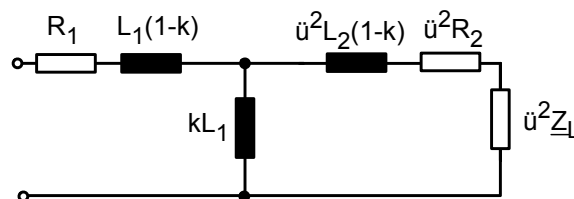
$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \frac{1}{j\omega C} + \underline{Z}_1 \\ &= \frac{1}{j\omega C} + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R + j\omega L_2} = \frac{1}{j\omega C} + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 L_1 L_2}{R + j\omega L_2} \\ &= \frac{1}{j\omega C} + \frac{j\omega L_1 R - \omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 L_1 L_2}{R + j\omega L_2} = \frac{1}{j\omega C} + \frac{j\omega L_1 R}{R + j\omega L_2} \\ &= -j\frac{1}{\omega C} + \frac{j\omega L_1 R(R - j\omega L_2)}{R^2 + \omega^2 L_2^2} = \frac{\omega^2 L_1 L_2 R}{R^2 + \omega^2 L_2^2 + j\left(\frac{\omega L_1 R^2}{R^2 + \omega^2 L_2^2} - \frac{1}{\omega C}\right)}\end{aligned}$$

(b) Resonanzfall:

$$\text{Im}\{\underline{Z}(\omega_0)\} = 0$$

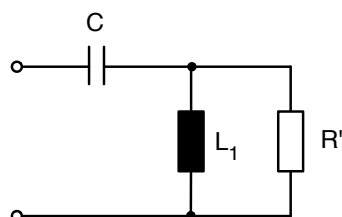
$$\begin{aligned}\frac{\omega_0 L_1 R^2}{R^2 + \omega_0^2 L_2^2} - \frac{1}{\omega_0 C} &= 0 \\ \frac{\omega_0 L_1 R^2}{R^2 + \omega_0^2 L_2^2} &= \frac{1}{\omega_0 C} \\ L_1 R^2 \omega_0^2 C &= R^2 + \omega_0^2 L_2^2 \\ \omega_0^2 &= \frac{R^2}{L_1 R^2 C - L_2^2} \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{L_1 C - \frac{L_2^2}{R^2}}}\end{aligned}$$

(c) für den Übertrager gilt das Ersatzschaltbild aus dem Skript, Abb. 14.13:



mit: $R_1 = R_2 = 0$, da verlustlos; $L_1(1 - k) = 0$ und $L_2(1 - k) = 0$, da $k=1$;

es ergibt sich für die Schaltung folgendes einfache Ersatzschaltbild:



wegen $\underline{Z}_L = R$ gilt $R' = \frac{L_1}{L_2} R$
 $C = C$ und $L_1 = L_1$

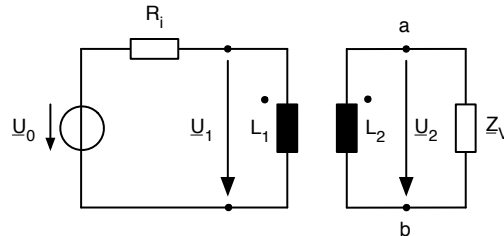
- (d) Zusatz: Im folgenden sei $\omega = \omega_0$, d.h. die Schaltung werde bei Resonanz betrieben.

I einprägt, Wirkleistung entsteht nur im Parallelkreis

$$P = \operatorname{Re}\{|\underline{I}|^2 \underline{Z}_{\text{parallel}}\} = |\underline{I}|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\frac{1}{R'} + \frac{1}{j\omega L_1}}\right) = \dots = |\underline{I}|^2 \frac{L_2}{RC}$$

Aufgabe 2

Eine Last $\underline{Z}_v = R_v + jX_v$ soll mittels eines verlustlosen, streulosen Transformators an eine Spannungsquelle mit der Quellenspannung $\underline{U}_0$ und dem Innenwiderstand R_i angepasst werden.



- Berechnen Sie bei sekundärem Kurzschluss den Kurzschlussstrom $\underline{I}_K$ (Zählpfeil von a nach b)
- Berechnen Sie bei sekundärem Leerlauf die Ausgangsspannung $\underline{U}_{a0}$ an den Klemmen a und b.
- Berechnen Sie bezüglich der Klemmen a und b die komplexe Innenimpedanz der Schaltung.
- Geben Sie bezüglich der Klemmen a und b die Ersatzspannungsquellschaltung an.

Vom Transformator und der Spannungsquelle seien folgende Daten bekannt:
 $L_1 = 10mH$, $L_2 = 100mH$, $R_i = 2\Omega$, $f = 15.916Hz$.

- Mit Hilfe welcher Bauelemente der Last kann eine Leistungsanpassung erfolgen?
Geben Sie die Werte der Bauelemente an.
- Berechnen Sie den Wirkungsgrad der Schaltung $\eta = \frac{P_v}{P_{ges}}$ für $f = 15.916Hz$.

Lösung:

Transformatorgleichungen:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= (R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= j\omega M \underline{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2)\underline{I}_2\end{aligned}$$

verlustfrei würde bedeuten, dass:

$$R_1 = R_2 = 0$$

aber hier:

$$\underline{U}_0 = (R_i + j\omega L_1)\underline{I}_1 + \omega M \underline{I}_2$$

streulos: $k = 1$ und

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

(a) Sekundärer Kurzschluss:

$$\underline{U}_2 = 0 \text{ und } \underline{I}_2 = -\underline{I}_K$$

$$\underline{U}_0 = (R_i + j\omega L_1)\underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_K$$

$$0 = j\omega M \underline{I}_1 - j\omega L_2 \underline{I}_K$$

zweite Gleichung nach $\underline{I}_1$ auflösen:

$$\underline{I}_1 = \frac{j\omega L_2}{j\omega M} \underline{I}_K = \frac{L_2}{M} \underline{I}_K$$

und in erste Gleichung einsetzen:

$$\underline{U}_0 = (R_i + j\omega L_1) \frac{L_2}{M} \underline{I}_K - j\omega M \underline{I}_K$$

$$\underline{I}_K = \frac{\underline{U}_0}{(R_i + j\omega L_1) \frac{L_2}{M} - j\omega M}$$

mit $M = \sqrt{L_1 L_2}$ folgt:

$$\begin{aligned} \underline{I}_K &= \frac{\underline{U}_0}{R_i \frac{L_2}{\sqrt{L_1 L_2}} + j\omega L_1 \frac{L_2}{\sqrt{L_1 L_2}} - j\omega \sqrt{L_1 L_2}} \\ &= \frac{\underline{U}_0}{R_i \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} + j\omega \sqrt{L_1 L_2} - j\omega \sqrt{L_1 L_2}} \\ &= \frac{\underline{U}_0}{R_i \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}} \end{aligned}$$

(b) Sekundärer Leerlauf:

$$\underline{I}_2 = 0$$

$$\underline{U}_0 = (R_i + j\omega L_1) \underline{I}_1$$

$$\underline{U}_{a0} = j\omega M \underline{I}_1$$

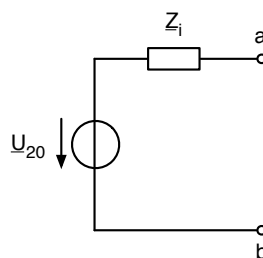
erste Gleichung in zweite einsetzen:

$$\underline{U}_{a0} = j\omega M \frac{\underline{U}_0}{R_i + j\omega L_1} = \frac{j\omega \sqrt{L_1 L_2}}{R_i + j\omega L_1} \underline{U}_0$$

(c) komplexe Innenimpedanz bzgl. a und b

$$\underline{Z}_i = \frac{\underline{U}_{a0}}{\underline{I}_K} = \frac{j\omega \sqrt{L_1 L_2}}{R_i + j\omega L_1} \underline{U}_0 \cdot \frac{R_i \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}}{\underline{U}_0} = \frac{j\omega R_i L_2}{R_i + j\omega L_1}$$

(d)



(e) Leistungsanpassung:

$$\underline{Z}_i = \underline{Z}_V^*$$

$$\underline{Z}_i = \frac{j\omega R_i L_2}{R_i + j\omega L_1}$$

mit $L_1 = 10mH$, $L_2 = 100mH$, $R_i = 2\Omega$, $f = 15.916Hz$ bzw.
 $\omega = 2\pi f = 100s^{-1}$

$$\underline{Z}_i|_{f=15.916Hz} = \frac{j20\Omega}{2 + j1} = (4 + j8)\Omega$$

$$\underline{Z}_i|_{f=15.916Hz} = (4 + j8)\Omega$$

$$\underline{Z}_V|_{f=15.916} = (4 - j8)\Omega$$

aus $\underline{Z}_i = \underline{Z}_V^*$ mit $\underline{Z}_V = R_V + jX_V$ folgt durch Koeffizientenvergleich:
 $R_V = 4\Omega$ und $X_V = -8\Omega$

Kondensator mit $\frac{1}{\omega C} = 8 \rightarrow C = \frac{1}{100 \cdot 8} F = 1.25mF$

(f) Wirkungsgrad der Schaltung:

Für $f = 15.916Hz$ bzw. $\omega = 100s^{-1}$

$$S_V = \underline{U}_V \underline{I}_V^* = \underline{Z}_V \underline{I}_V \underline{I}_V^* = \underline{Z}_V |\underline{I}_V|^2$$

$$P_V = \operatorname{Re}\{S_V\} = 4|\underline{I}_V|^2 \cdot \Omega$$

$$S_{ges} = \underline{U}_{a0} \underline{I}_V^* = (\underline{Z}_i || \underline{Z}_V) \underline{I}_V \underline{I}_V^* = (\underline{Z}_i + \underline{Z}_V) |\underline{I}_V|^2$$

$$P_{ges} = \operatorname{Re}\{S_{ges}\} = \operatorname{Re}\{\underline{Z}_i + \underline{Z}_V\} |\underline{I}_V|^2 = 8|\underline{I}_V|^2 \cdot \Omega$$

$$\eta = \frac{P_V}{P_{ges}} = \frac{4|\underline{I}_V|^2}{8|\underline{I}_V|^2} = \frac{1}{2}$$

(wie üblich bei Leistungsanpassung!)