Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Lineare Elektrische Netze

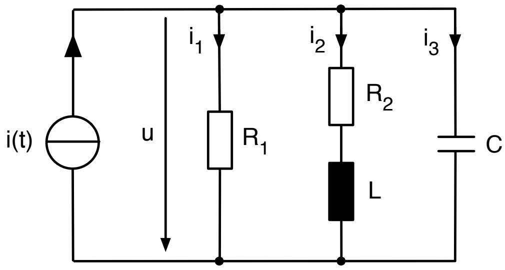
Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel
Tel: 0721 608-42650
Olaf.Doessel@kit.edu

Übungsleiter: Dipl.-Ing. G. Lenis
Tel: 0721 608-45478
Gustavo.Lenis@kit.edu

Übungsblatt Nr. 4: komplexe Zahlen, Ströme, Spannungen, Impedanzen

Aufgabe 1

Gegeben ist folgender Stromkreis mit $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $L = 40\mu H$, $C = 1\mu F$. Die Stromquelle erzeugt den Strom $i(t) = 8\cos(\omega t)A$ mit $\omega = 2e5s^{-1}$.
Wenn sinusförmige Spannungen/Ströme vorliegen kann man auf eleganter Art und Weise mit Hilfe der komplexen Zahlen rechnen.



(a) Wandeln Sie zunächst die Stromquelle in ihre komplexe Darstellung um. Verwenden Sie dabei die komplexe Exponentialfunktion. Am Ende soll der reelle Strom $i(t)$ durch den Realteil des komplexen Stromes $\underline{i}(t)$ angegeben werden können ($Re\{\underline{i}(t)\} = i(t)$).

(b) Wandeln Sie die Bauteile in ihre komplexe Darstellung um. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der Bauteilimpedanzen.

(c) Berechnen Sie die reelle Spannung $u(t)$ und die reellen Ströme $i_1(t)$, $i_2(t)$ und $i_3(t)$.
Geben Sie die Größen in Abhängigkeit von nur einer Kosinus-Funktion an.

Lösung:

(a) Berechnen der Real- und Imaginärteile der Bauteilimpedanzen und der Stromquelle:
- Stromquelle: $i(t) = 8cos(\omega t)A \rightarrow \underline{i}(t) = 8e^{j\omega t}A$
(wir nehmen an: rein reell, d.h. der Imaginärteil wird nicht beachtet).
- Widerstände: ebenfalls rein reel, d.h. Imaginärteil und Phase gleich null
- Induktivität/Spule: $\underline{Z}_L = j\omega L = j200000s^{-1} \cdot 40\mu H = j8\Omega$
($Re\{\underline{Z}\} = 0\Omega$, $Im\{\underline{Z}\} = 8\Omega$ => Phase: 90°)
- Kondensator: $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{200000s^{-1}\cdot 1\mu F} = -j5\Omega$
($Re\{\underline{Z}\} = 0\Omega$, $Im\{\underline{Z}\} = -5\Omega$ => Phase: -90°)

(b) Der Ersatzwiderstand der Gesamtschaltung:

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= R_1 \| (R_2 + \underline{Z}_L) \| \underline{Z}_C \\
&= \frac{R_1(R_2 + \underline{Z}_L)\underline{Z}_C}{R_1(R_2 + \underline{Z}_L) + R_1\underline{Z}_C + (R_2 + \underline{Z}_L)\underline{Z}_C} \\
&= \frac{10(6 + j8)(-j5)}{10(6 + j8) + 10(-j5) + (6 + j8)(-j5)}\Omega \\
&= \frac{400 - j300}{100}\Omega = (4 - j3)\Omega
\end{aligned}$$

$$arg(\underline{Z}) = -arctan\left(\frac{3}{4}\right) \approx -36.87_{deg}$$
$$|\underline{Z}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$$

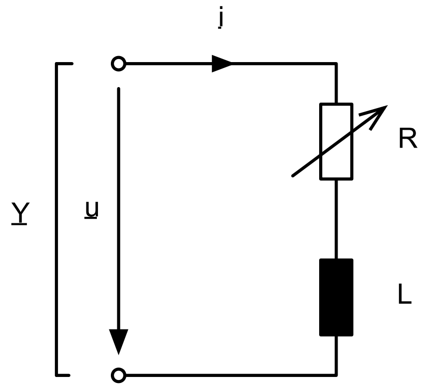
$$\begin{aligned}
\underline{u}(t) &= \underline{Z}\cdot\underline{i}(t) = 5e^{j36.87_{deg}}\cdot 8e^{j\omega t}V \\
&= 40e^{j(\omega t-36.87_{deg})}V = 40e^{j(\omega t-0.64_{rad})}V \\
u(t) &= Re\{\underline{u}(t)\} = Re\{40e^{j(\omega t-0.64_{rad})}V = 40cos(\omega t-0.64_{rad})V
\end{aligned}$$

Ströme:

$$\begin{aligned}
i_1(t) &= \frac{u(t)}{R_1} = \frac{40cos(\omega t-0.64_{rad})}{10}A = 4cos(\omega t-0.64_{rad})A \\
\underline{i}_2(t) &= \frac{\underline{u}(t)}{R_2+\underline{Z}_L} = \frac{40e^{j(\omega t-0.64_{rad})}}{6+j8}A = \frac{40e^{j(\omega t-0.64_{rad})}}{10e^{j0.93_{rad}}}A \\
&= 4e^{j(\omega t-1.57_{rad})}A = 4e^{j(\omega t-\frac{\pi}{2})}A \\
i_2(t) &= Re\{\underline{i}_2(t)\} = 4cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)A \\
\underline{i}_3(t) &= \frac{\underline{u}(t)}{\underline{Z}_C} = \frac{40e^{j(\omega t-0.64_{rad})}}{-j5}A = \frac{40e^{j(\omega t-0.64_{rad})}}{5e^{-j\frac{\pi}{2}}}A \\
&= 8e^{j(\omega t+0.93_{rad})}A \\
i_3(t) &= Re\{\underline{i}_3(t)\} = 8cos(\omega t+0.93_{rad})A
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

An der Serienschaltung aus einer verlustfreien Spule der Induktivität L und einem veränderbaren ohmschen Widerstand R liegt eine sinusförmige Wechselspannung u mit der Amplitude $\hat{U}$, der Phase π und der Kresifrequenz ω_0.



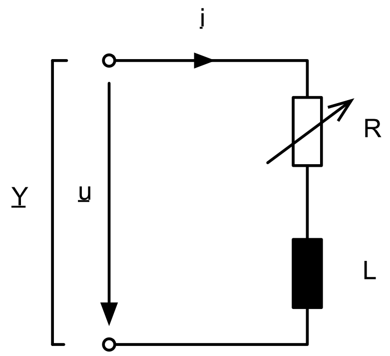
$$\begin{aligned} \omega_0 L &= 10\,\Omega \\ \underline{\hat{U}} &= 10\,V \cdot e^{j\pi} \\ R &\in [0\ldots\infty)\,\Omega \end{aligned}$$

(a) Wie groß ist der Zeiger des Klemmenstroms $\underline{i}$, wenn der Widerstand R auf 0Ω eingestellt wird? Geben Sie den Betrag des Zeigers und seine Phase φ zahlenmäßig an.
Hinweis : Berechnen Sie den komplexen Strom $\underline{i}$, d.h. wenden Sie das Ohmsche Gesetz an, wobei der komplexe Strom durch die komplexe Spannung und die komplexe Impedanz ($R = 0\Omega \Rightarrow \underline{Z} = \underline{Z}_L$) definiert wird. Die für die Rechnung benötigten Information finden sich in Kapitel 4.4.

(b) Berechnen Sie allgemein die Admittanz $\underline{Y}$ als Funktion von ω_0, R und L. Geben Sie Imaginär- (B) und Realteil (G) getrennt an.
Hinweis : Die Admitanz $\underline{Y}$ ist das Reziproke zur Impedanz $\underline{Z}$. Berechnen Sie also zuerst die Impedanz und bilden Sie dann den Kehrwert. Um G und B zu bestimmen, müssen Sie eventuell komplex-konjugiert erweitern.

(c) Für welchen Wert von R nimmt die Schaltung die maximale Wirkleistung P_{max} auf? Wie groß ist dieses P_{max}?

Lösung:



(a) Für $R = 0\Omega$ verbleibt nur noch die komplexe Impedanz $\underline{Z} = j\omega L = j10\Omega$ im Stromkreis. Die komplexe Amplitude des Stroms $\underline{i}$ berechnet sich über den Ohmschen Zusammenhang von Spannung und Impedanz:

$$\underline{\hat{I}} = \frac{\underline{\hat{U}}}{\underline{\hat{Z}}} = \frac{10V \cdot e^{j\pi}}{j10\Omega} = -j1Ae^{j\pi} = e^{-j\frac{\pi}{2}}1Ae^{j\pi} = 1Ae^{j\frac{\pi}{2}}$$

Daraus können Betrag und Phasenwinkel direkt abgelesen werden: $|\underline{\hat{I}}| = 1A$ bzw. $arg(\underline{\hat{I}}) = \frac{\pi}{2}$

(b) Die Impedanz der Gesamtschaltung besteht aus der Reihenschaltung von Spule und Widerstand:
$\underline{Z} = R + j\omega L$ und somit $\underline{Y} = \frac{1}{R+j\omega L}$. Für die Bestimmung von Real- und Imaginärteil muss der Bruch konjugiert-komplex erweitert werden:
$\underline{Y} = \frac{1}{R+j\omega L} = \frac{R-j\omega L}{(R+j\omega L)(R-j\omega L)} = \frac{R-j\omega L}{R^2+(\omega L)^2}$

$$Re\{\underline{Y}\} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} \quad \text{(Wirkleitwert)}$$
$$Im\{\underline{Y}\} = -\frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \quad \text{(Blindleitwert)}$$

(c) Die Scheinleistung kann sowohl über die komplexen Zeiger als auch über deren Effektivwerte berechnet werden. Letztere lassen sich aus den Zeigern durch eine Division durch $\sqrt{2}$ gewinnen. : $\underline{U}_{eff} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$.
Das ist auch der Wert, den ein Messinstrument bei einer Wechselstrommessung anzeigt.

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{UI^*} \\ &= \frac{\underline{\hat{U}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\underline{\hat{I}}^*}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\underline{\hat{U}}\left(\frac{\underline{\hat{U}}}{\underline{Z}}\right)^* = \frac{1}{2}|\underline{\hat{U}}|^2\underline{Y}^* \\ &= \frac{1}{2}|\underline{\hat{U}}|^2\frac{R + j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \end{aligned}$$

Die Wirkleistung P ist der Realteil von $\underline{S}$: $P = \frac{|\underline{\hat{U}}|^2 \cdot R}{2[R^2+(\omega L)^2]}$,
(die Blindleistung Q der Imaginärteil: $Q = \frac{|\underline{\hat{U}}|^2 \cdot \omega L}{2[R^2+(\omega L)^2]}$
Die Wirkleistung ist also eine Funktion von R. Das Maximum lässt sich daher durch die Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen.

$$\frac{dP}{dR} \stackrel{!}{=} 0 = \frac{|\underline{\hat{U}}|^2 \cdot 2[R^2 + (\omega_0 L)^2] - |\underline{\hat{U}}|^2 R \cdot 2(2R)}{4[R^2 + (\omega_0 L)^2]^2}$$
$$= \frac{|\underline{\hat{U}}|^2 \cdot [R^2 + (\omega_0 L)^2] - |\underline{\hat{U}}|^2 R \cdot (2R)}{2[R^2 + (\omega_0 L)^2]^2}$$

Nullstelle(n) des Zählers:

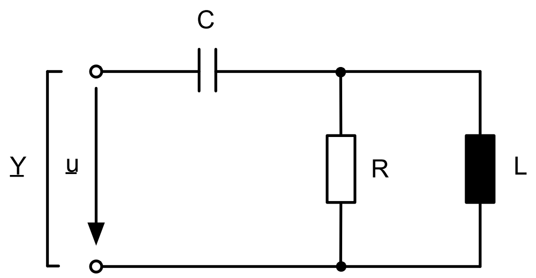
$$\begin{aligned} 0 &= |\underline{\hat{U}}|^2 \cdot [R^2 + (\omega_0 L)^2] - |\underline{\hat{U}}|^2 R \cdot (2R) \\ &= [R^2 + (\omega_0 L)^2] - R \cdot (2R) = -R^2 + (\omega_0 L)^2 \\ R^2 &= (\omega_0 L)^2 \\ R &= \omega_0 L \end{aligned}$$

Substituieren von $\omega_0 L$ in der Gleichung von P und einsetzen der gegebenen Zahlenwerte:

$$P_{max} = \frac{100V^2 \cdot 10\Omega}{2(200\Omega^2)} = \frac{1000}{400} W = 2.5W$$

Aufgabe 3

Gegeben ist der abgebildete Zweipol aus einer verlustfreien Spule mit der Induktivität L, einem verlustfreien Kondensator mit der Kapazität C und einem ohmschen Widerstand R.



(a) Berechnen Sie die komplexe Impedanz $\underline{Z}(j\omega)$, d.h. die Schaltung von links gesehen, den Realteil $Re\{\underline{Z}(j\omega)\}$ in allgemeiner Form, d.h. in Abhängigkeit von R, C, L und ω.

Der Zweipol wird nun von einer Wechselspannung mit dem komplexen Effektivwert $\underline{U} = (6 - j2)V$ und der Kreisfrequenz ω_1 gespeist. Bei ω_1 ist $\underline{Z} = (3 + j2)\Omega$.

Bestimmen Sie:

(b) die reelle Amplitude $\hat{i}$ und die Phase φ des Stromes im Kondensator.
Hinweis : die Grundlagen dafür vermittelt Kap. 4.4.

(c) die vom Zweipol aufgenommene Wirkleistung P, Blindleistung Q und Scheinleistung S.
Hinweis : Lesen Sie eventuell hierzu Kap. 5.5.

Lösung:

(a) Berechnen des Gesamtwiderstandes:

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \underline{Z}_C + (R \| \underline{Z}_L) = \frac{1}{j\omega C} + \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L} \\
&= \frac{1}{j\omega C} + \frac{j\omega L R(R - j\omega L)}{(R + j\omega L)(R - j\omega L)} \\
&= -j\frac{1}{\omega C} + \frac{j\omega L R(R - j\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2} \\
&= \frac{R(\omega L)^2}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left(\frac{\omega L R^2}{R^2 + (\omega L)^2} - \frac{1}{\omega C}\right)
\end{aligned}$$

(b) Betrag und Phase des Stromes können auf zwei Arten bestimmt werden.

$$\begin{aligned}\underline{\hat{I}} &= \frac{\underline{\hat{U}}}{\underline{Z}} = \frac{\sqrt{2}(6-j2)V}{(3+j2)\Omega} \\ &= \sqrt{2}\frac{(6-j2)(3-j2)}{(3+j2)(3-j2)}A = \sqrt{2}\frac{18-j12-j6-4}{9+4}A \\ &= \frac{\sqrt{2}}{13}(14-j18)A\end{aligned}$$

i) Durch Erweitern des Bruches mit dem konjugiert-komplexen des Nenners lassen sich direkt Betrag und Phase ablesen:

$$\begin{aligned}|\underline{\hat{I}}| &= \frac{\sqrt{2}}{13}\sqrt{14^2+18^2}A = \frac{\sqrt{2}}{13}\sqrt{520}A \approx 2.48A \\ arg(\underline{\hat{I}}) &= -arctan\left(\frac{18}{14}\right) \approx -0.91_{rad}\end{aligned}$$

ii) Zuerst werden Zähler und Nenner in Polardarstellung umwandelt. Dann werden die Rechenregeln für die Division von komplexen Zahlen angewandt:

$$\begin{aligned}\underline{\hat{I}} &= \frac{\underline{\hat{U}}}{\underline{Z}} = \frac{\sqrt{2}(6-j2)V}{(3+j2)\Omega} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{6^2+2^2}e^{j(-arctan(\frac{2}{6}))}}{\sqrt{3^2+2^2}e^{j(arctan(\frac{2}{3}))}}A \\ &\approx \sqrt{2}\frac{\sqrt{40}e^{-j0.32_{rad}}}{\sqrt{13}e^{j0.59_{rad}}}A = \sqrt{\frac{80}{13}}e^{j(-0.32_{rad}-0.59_{rad})}A \\ &= 2.48e^{-j0.91_{rad}}A\end{aligned}$$

(c) Aus der komplexen Leistung $\underline{S}$ lassen sich Wirkleistung P und Blindleistung Q ablesen. Daher zuerst die Berechnung von $\underline{S}$:

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \frac{1}{2}\underline{\hat{U}}\,\underline{\hat{I}}^* = \frac{1}{2}\sqrt{2}\underline{U}\cdot\sqrt{2}\underline{I}^* = \underline{U}\,\underline{I}^* = \frac{|\underline{U}|^2}{\underline{Z}^*} \\ &= \frac{(6^2+2^2)}{3-j2}VA = \frac{40(3+j2)}{(3-j2)(3+j2)}VA = \frac{40}{13}(3+j2)VA \\ &= \left(\frac{120}{13}+j\frac{80}{13}\right)VA\end{aligned}$$

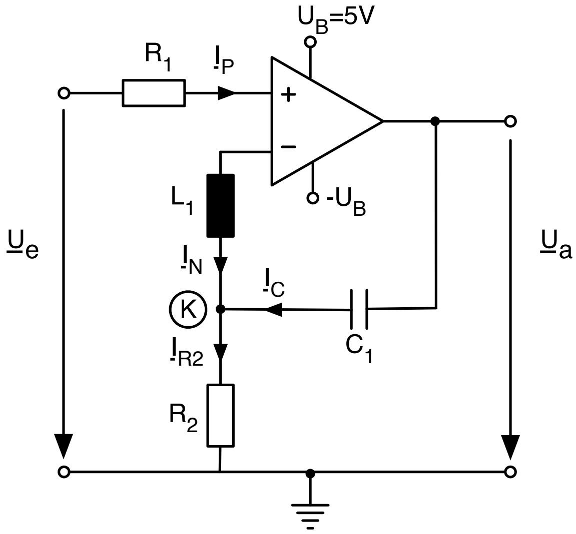
Die Scheinleistung ist ihr Betrag:

$$S = |\underline{S}| = \sqrt{\frac{120^2+80^2}{169}}VA \approx 11.1VA$$

Die Wirkleistung P ist der Realteil von $\underline{S}$: $P = \frac{120}{13}W \approx 9.23W$,
die Blindleistung Q der Imaginärteil von $\underline{S}$: $Q = \frac{80}{13}var \approx 6.15var$

Aufgabe 4

Gegeben sei folgendes Netzwerk:



(a) Nennen Sie 3 Regeln beim Umgang mit OP-Schaltungen.

(b) Stellen Sie die Knotengleichung für (K) auf.

(c) Bestimmen Sie $\underline{U}_{L1}$ und $\underline{U}_{R2}$ in Abhängigkeit von $\underline{I}_C$.

(d) Bestimmen Sie $\underline{U}_C$ und die Phase der Spannung $\underline{U}_a$ am Ausgang für $\underline{U}_e = 1mV$, $R_2 = 250\Omega$ und $C_1 = 63nF$ bei $f = 10kHz$.
Rechnen Sie zunächst allgemein und setzen Sie erst zum Schluss die Zahlenwerte ein.

(e) Wie verhält sich die Phase der Spannung $\underline{U}_a$, wenn ω gegen Null geht?

(f) Wodurch wird die Amplitude des Ausgangssignals limitiert und welchen Wert kann sie im vorliegenden Fall maximal annehmen?

Lösung:

(a) - keine Masche durch den OP
- $U_d \approx 0$
- keine Ströme in den OP

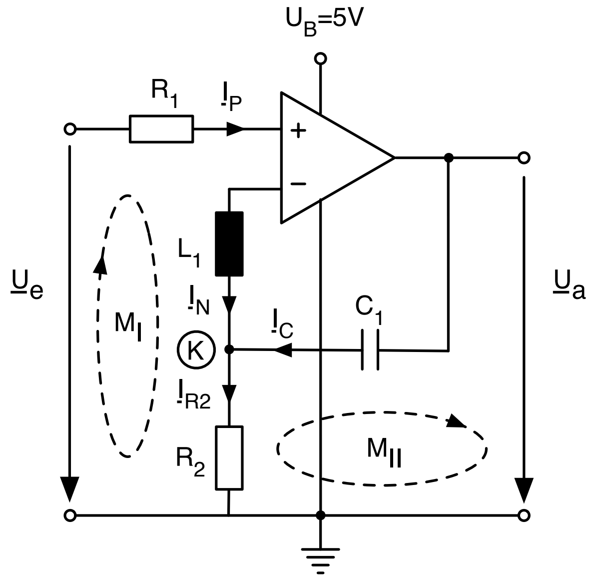
(b) Die Knotengleichung für K lautet: $\underline{I}_C + \underline{I}_N - \underline{I}_{R2} = 0$
Da keine Ströme in den OP fliessen (s.a) ist $\underline{I}_N = 0$ und somit verein-

facht sich der Term zu

$$\begin{aligned} \underline{I}_C - \underline{I}_{R_2} &= 0 \\ \underline{I}_C &= \underline{I}_{R_2} \end{aligned}$$

(c) Da $\underline{I}_N = 0$ ist, fällt über der Spule keine Spannung ab, d.h. $\underline{U}_{L1} = 0$. Die Spannung über R_2 lässt sich über das Ohmsche Gesetz bestimmen: $\underline{U}_{R2} = \underline{I}_{R2} \cdot R_2$

(d) Für die Bestimmung des Zusammenhangs zwischen Ein- und Ausgang können Maschen verwendet werden.



$$\begin{aligned} M_I : \underline{U}_e &= R_1 \underline{I}_P + \underline{Z}_L \underline{I}_N + R_2 \underline{I}_{R_2} \\ M_{II} : \underline{U}_a &= R_2 \underline{I}_{R_2} + \underline{Z}_C \underline{I}_C = R_2 \underline{I}_{R_2} + \underline{Z}_C \underline{I}_{R_2} = (R_2 + \underline{Z}_C) \underline{I}_{R_2} \end{aligned}$$

Anwenden der Ergebnisse aus b) und Auflösen von M_I nach $\underline{I}_{R2}$

$$\begin{aligned} \underline{U}_e &= R_1 \underline{I}_P + \underline{Z}_L \underline{I}_N + R_2 \underline{I}_{R_2} \\ &= R_2 \underline{I}_{R_2} (= \underline{U}_{R_2}) \\ \underline{I}_{R_2} &= \frac{\underline{U}_e}{R_2} \end{aligned}$$

Für U_C gilt dann:

$$\underline{U}_C = \underline{I}_{R_2} \cdot \underline{Z}_C = \frac{\underline{U}_e}{R_2} \cdot \frac{1}{j\omega C_1} \approx -j1\,mV$$

Setzt man dies in M_{II} ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\underline{U}_a &= (R_2 + \underline{Z}_C)\underline{I}_{R_2} = (R_2 + \underline{Z}_C)\frac{\underline{U}e}{R_2} \\
\underline{U}_a &= \frac{R_2 + \underline{Z}_C}{R_2}\underline{U}_e \\
&= \frac{R_2 + \frac{1}{j\omega C_1}}{R_2}\underline{U}_e = \frac{j\omega C_1 R_2 + 1}{j\omega C_1 R_2}\underline{U}_e = \left(1 + \frac{1}{j\omega C_1 R_2}\right)\underline{U}_e \\
&= \left(1 - j\frac{1}{\omega C_1 R_2}\right)\underline{U}_e
\end{aligned}$$

Einsetzen der Zahlwerte

$$\begin{aligned}
\underline{U}_a &= \left(1 - j\frac{1}{2\pi \cdot 10kHz \cdot 63nF \cdot 250\Omega}\right)1mV \\
&\approx (1 - j1)mV
\end{aligned}$$

Der Winkel zwischen Real- und Imaginärteil von $\underline{U}_a$ beträgt somit $-\pi/4$ bzw. -45°.

(e) Dieser Aufgabenteil lässt sich mit Hilfe des Zwischenergebnisses aus d) beantworten:
$\underline{U}_a = \left(1 - j\frac{1}{\omega C_1 R_2}\right)\underline{U}_e$
In diesem Term geht der Imaginärteil für $\omega \to 0$ gegen minus Unendlich und die Phase daher gegen -90°.

(f) Die maximale Ausgangsspannung des OPs wird durch die Versorgungsspannung limitiert, in diesem Fall (s. Schaltbild) also ±5V.