Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Lineare Elektrische Netze

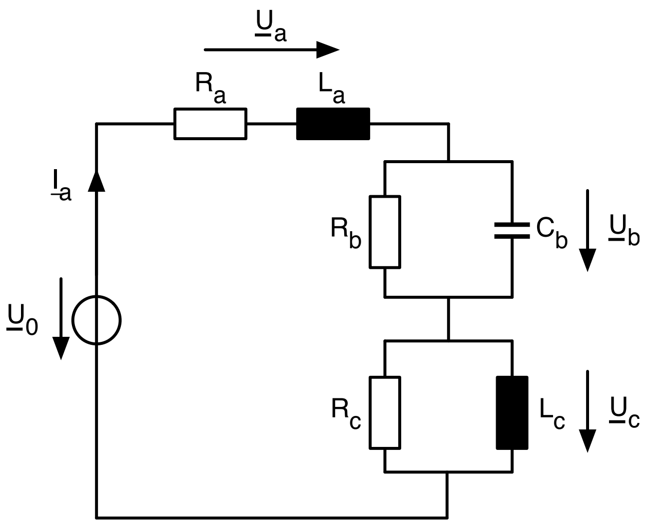
Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel
Tel: 0721 608-42650
Olaf.Doessel@kit.edu

Übungsleiter: Dipl.-Ing. G. Lenis
Tel: 0721 608-45478
Gustavo.Lenis@kit.edu

Übungsblatt Nr. 5: Zeigerdiagramme, Ortskurven

Aufgabe 1

Gegeben sei folgendes Netzwerk:



Für die Schaltung gilt Folgendes:

- $\omega = 1000 s^{-1}$
- $R_a = 2\Omega$
- $L_a = 2mH$
- $R_b = ?$
- $C_b = 140\mu F$
- $R_c = 20\Omega$
- $L_c = 10mH$

(a) Berechnen Sie $\underline{Z}_a$ und $\underline{Z}_c$.

(b) Nun sei $\underline{U}_a = 4\sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{j(\frac{3\pi}{4})} V$. Geben Sie $\underline{I}_a$ und $\underline{U}_{L_a}$ in der kartesischen und in der Eulerschen Darstellung.

(c) Bestimmen Sie $\underline{U}_c$ in der kartesischen Darstellung.

(d) Für die Gesamtschaltung ergibt sich eine Spannung $\underline{U}_0 = (-6 + j14)V$. Ermitteln Sie **grafisch** $\underline{U}_b$. Verwenden Sie dabei folgende die Skala:
Im{$\underline{\text{U}}$}: 1cm$\hat{=}$4V
Re{$\underline{\text{U}}$}: 1cm$\hat{=}$4V

(e) Bestimmen Sie rechnerisch $\underline{I}_{R_b}$ und den Wert des Widerstandes R_b, verwenden Sie dabei das Ergebnis aus d).

(f) Bestimmen Sie die von der Quelle abgegebene komplexe Leistung $\underline{S}$. Können Sie anhand von $\underline{S}$ sagen, ob die Schaltung eher induktives oder eher kapazitives Verhalten hat.
Hinweis: Spannungen und Ströme sind Effektivwerte.

Lösung:

(a) Für die Impedanzen gilt:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_a &= R_a + j\omega L_a = (2 + j2)\Omega \\ \underline{Z}_c &= \frac{R_c \cdot j\omega L_c}{R_c + j\omega L_c} = \frac{(20)(j10)}{20 + j10}\Omega = (4 + j8)\Omega \end{aligned}$$

(b) Für die kartesische Darstellung der Spannung $\underline{U}_a$ gilt:

$$\underline{U}_a = 4\sqrt{2}\left(cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + j\,sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = (-4 + j4)\,V$$

Für den Strom $\underline{I}_a$ gilt:

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_a} = \frac{4\sqrt{2}e^{j\left(\frac{3\pi}{4}\right)}}{(2 + j2)}A$$

kartesische Darstellung:

$$\begin{aligned} \underline{I}_a &= \frac{4\sqrt{2}\left(cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + jsin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)}{(2 + j2)}A \\ &= \frac{4\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(2 - j2)}{8}A \\ &= \frac{(-4 + j4)(2 - j2)}{8}A = 2jA \end{aligned}$$

eulersche Darstellung:

$$\begin{aligned} \underline{I}_a &= \frac{4\sqrt{2} \cdot e^{j\left(\frac{3\pi}{4}\right)}}{8\sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}}A \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} \cdot e^{j\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)}A = 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}A \end{aligned}$$

Für die Spannung $\underline{U}_{L_a}$ gilt:

kartesische Darstellung:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{L_a} &= \underline{I}_a \cdot j\omega L_a \\ &= (j2A)(j2\Omega) \\ &= -4V \end{aligned}$$

eulersche Darstellung:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{L_a} &= \left(2 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} A\right)\left(2 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \Omega\right) \\ &= 4 \cdot e^{j\pi} V \end{aligned}$$

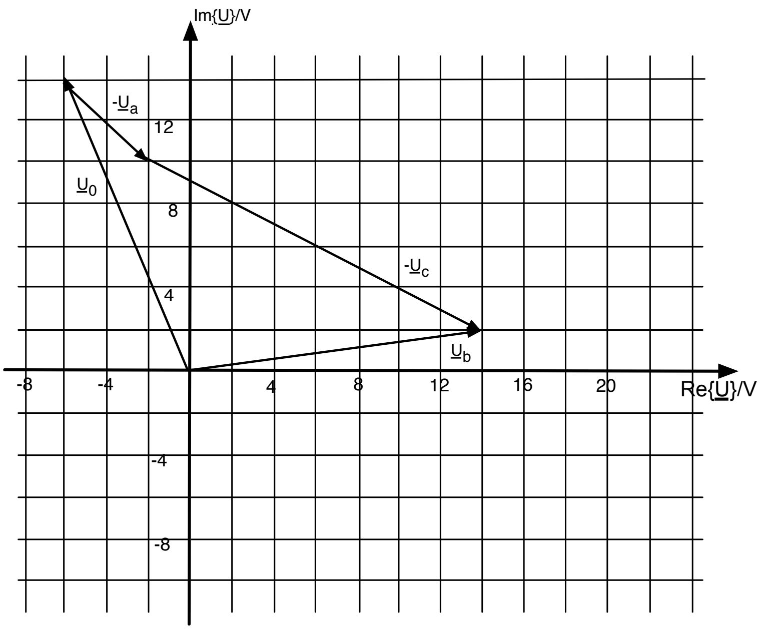
(c) Für die Spannung $\underline{U}_c$ gilt:

$$\begin{aligned} \underline{U}_c &= \underline{I}_a \cdot \underline{Z}_c \\ &= (j2A) \cdot (4 + j8)\Omega \\ \underline{U}_c &= (-16 + j8)V \end{aligned}$$

(d) Für die Spannung $\underline{U}_b$ gilt Folgendes:

$$\begin{aligned} \underline{U}_b &= \underline{U}_b - \underline{U}_a - \underline{U}_c \\ \underline{U}_b &= \underline{U}_0 + (-\underline{U}_a) + (-\underline{U}_c) \end{aligned}$$

Graphisch lässt sich diese Gleichung folgendermaßen darstellen:



$$\underline{U}_b = (14 + j2)V$$

(e) Für den Strom $\underline{I}_{R_b}$ gilt:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{R_b} &= \underline{I}_a - \underline{I}_{cb} \\ &= \underline{I}_a - \underline{U}_b \cdot j\omega C_b \\ &= j2A - (14 + j2) \cdot 0,14A \\ \underline{I}_{R_b} &= (280 + j40)mA \\ \Rightarrow R_b &= \frac{\underline{U}_b}{\underline{I}_{R_b}} = \frac{(14 + j2)V}{(280 + j40)mA} = 50\Omega \end{aligned}$$

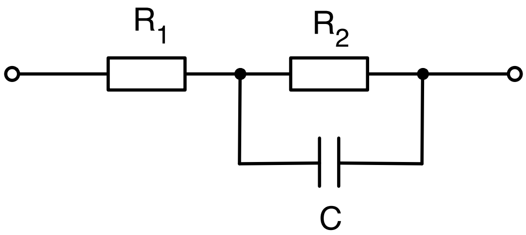
(f) Für die komplexe Leistung $\underline{S}$ gilt:

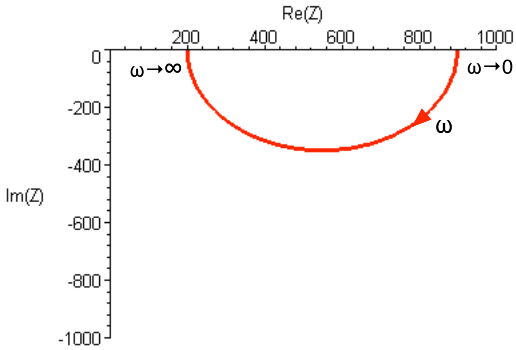
$$\begin{aligned}\underline{S} &= \underline{U}_0 \cdot \underline{I}_a^* \\ &= (-6 + j14)V \cdot (j2A)^* \\ &= (28 + j12)VA\end{aligned}$$

Da $Im\{\underline{S}\} = Q > 0$ ist, so hat die Schaltung induktives Verhalten.

Aufgabe 2

Gegeben ist folgende Schaltung und die dazugehörige Ortskurve.





(a) Bestimmen Sie R_1 und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

(b) Bestimmen Sie R_2 und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

(c) Bestimmen Sie die Gesamtimpedanz $\underline{Z}$ als Funktion von R_1, R_2, C und ω.

(d) Bei welcher Kreisfrequenz ist der Imaginärteil von $\underline{Z}$ betragsmäßig am größten? Geben Sie die Kreisfrequenz unter der Annahme, dass $C = 1\mu F$ ist, an.

Lösung:

(a) Für $\omega \to \infty$ wird der Kondensator zum Kurzschluss, als relevantes Bauteil bleibt also nur noch R_1 übrig. Dessen Wert kann aus dem Diagramm abgelesen werden:
$\underline{Z}(\omega \to \infty) = R_1 = 200\Omega$

(b) Für $\omega \to 0$ wir der Kondensator zu einem unendlich großen Widerstand für den Strom und kann somit vernachlässigt werden.
$\underline{Z}(\omega \to 0) = R_1 + R_2 = 200\Omega + R_2 = 900\Omega$
$\to R_2 = 700\Omega$

(c) Der Gesamtwiderstand in allgemeiner Form:

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= R_1 + (R_2 \| \underline{Z}_C) \\
&= R_1 + \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega C R_2} \\
&= R_1 + \frac{R_2(1 - j\omega C R_2)}{(1 + j\omega C R_2)(1 - j\omega C R_2)} = R_1 + \frac{R_2 - j\omega C R_2^2}{1 + (\omega C R_2)^2}
\end{aligned}$$

(d) Der Imaginärteil kann der Lösung für c) entnommen werden:
$Im\{\underline{Z}\} = -\frac{\omega C R_2^2}{1+(\omega C R^2)^2}$
Maximum des Imaginärteils als Nullstelle der ersten Ableitung:

$$\begin{aligned}
\frac{dIm\{\underline{Z}\}}{d\omega} &= \frac{-(CR_2^2)[1 + (\omega C R_2^2)] - (-\omega C R_2^2) 2\omega C^2 R_2^2}{[1 + (\omega C R_2)^2]^2} \\
&= \frac{-CR_2^2[1 + (\omega C R_2)^2 - 2(\omega C R_2)^2]}{[1 + (\omega C R_2)^2]^2} = \frac{-CR_2^2[1 - (\omega C R_2)^2]}{[1 + (\omega C R_2)^2]^2}
\end{aligned}$$

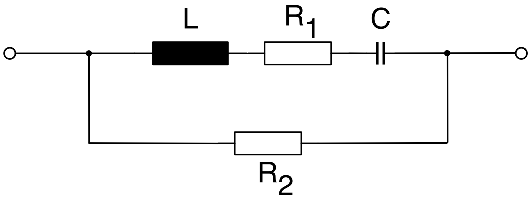
Zähler wird zun Null für:

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{!}{=} -CR_2^2[1 - (\omega C R_2)^2] \\
1 &= (\omega C R_2)^2 \\
1 &= \omega C R_2 \\
\omega &= \frac{1}{CR_2} \quad \text{bzw. } \omega = \frac{1}{1\mu F \cdot 700\Omega} \approx 1428.57 s^{-1}
\end{aligned}$$

(die negative Lösung der Wurzel wird verworfen, da Frequenzen immer positiv sind)

Alternative Lösung
Die Ortskurve ist ein Halbkreis. Somit wird $Im\{\underline{Z}\}$ am tiefsten Punkt des Halbkreises betragsmäßig am größten. Ablesen liefert für diesen Punkt einen $Re\{\underline{Z}\}$ von 550Ω. Setzt man den Realteil aus c) damit gleich und löst nach ω auf, liefert dies ebenfalls die gesuchte Kreisfrequenz.

Aufgabe 3



(a) Bestimmen Sie die Gesamtimpedanz $\underline{Z}$ und geben Sie $\underline{Z}$ nach Real- und Imaginärteil an. Bestimmen Sie auch die Resonanzkreisfrequenz ω_0.

(b) Zeichnen Sie die Ortskurve von $\underline{Z}$ mit $G_2 = 1/R_2 = 0S$. Beschriften Sie sie mit $\omega = \omega_0$, $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$.

(c) Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil 3.b), um die Ortskurve von $\underline{Y}$ mit $G_2 = 1/R_2 = 0S$ zu konstruieren (keine Rechnung!). Wie erhält man die Ortskurve von $\underline{Y}$ (ein Satz!)?
Beschriften Sie sie mit $\omega = \omega_0$, $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$.

(d) Wie verändert sich die Ortskurve von $\underline{Y}$, wenn $G_2 = 1/R_2 \neq 0S$? Geben Sie eine zeichnerische Lösung an.

Lösung:

(a) Gesamtimpedanz:

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \left(R_1 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) \| R_2 \\
&= \frac{\left(R_1 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right) R_2}{R_1 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) + R_2} \\
&= \frac{\left(R_1 R_2 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) R_2\right)\left((R_1 + R_2) - j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)}{(R_1 + R_2)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \\
&= \left(\frac{\left(R_2(R_1 + R_2) + R_2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right)}{(R_1 + R_2)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\right) \\
&+ j\left(\frac{R_2(R_1 + R_2)\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) - R_1 R_2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{(R_1 + R_2)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\right)
\end{aligned}$$

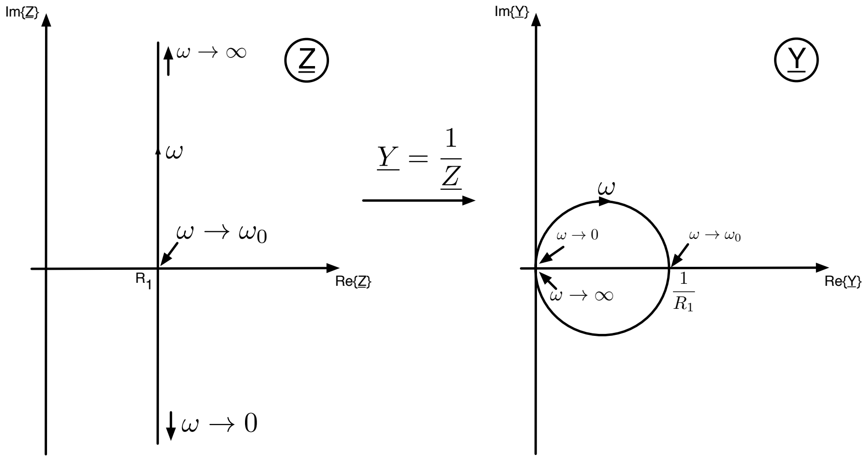
(b) Die Resonanzkreisfrequenz ω_0 ist gegeben, wenn $Im\{\underline{Z}\} = 0$

$$\frac{R_2(R_1 + R_2)\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) - R_1 R_2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{(R_1 + R_2)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = 0$$

Hieraus folgt:

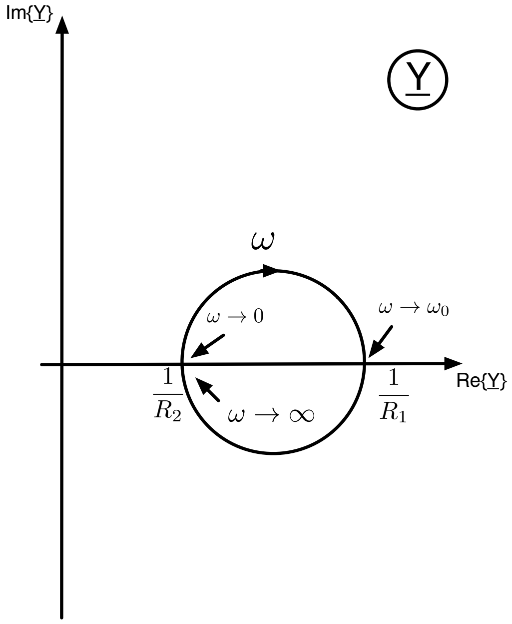
$$
\begin{aligned}
\rightarrow R_2(R_1+R_2)\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right) - R_1 R_2 \left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right) &= 0 \\
\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right)\left(R_2(R_1+R_2) - R_1 R_2\right) &= 0 \\
\rightarrow \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} &= 0 \\
\omega_0^2 &= \frac{1}{LC} \\
\omega &= \sqrt{\frac{1}{LC}}
\end{aligned}
$$

(c) Für die Ortskurve von $\underline{Z}$ und $\underline{Y}$ gilt:



Man muss eine Spiegelung am Einheitskreis durchführen.

(d) Die Parallelschaltung des Leitwertes $G_2 = 1/R_2 \neq 0S$ entspricht einer Verschiebung der vorliegenden Ortskurve um G_2 nach rechts. Dadurch ergibt sich die folgende Ortskurve:



Aufgabe 4

Gegeben seien die folgenden Ortskurven:

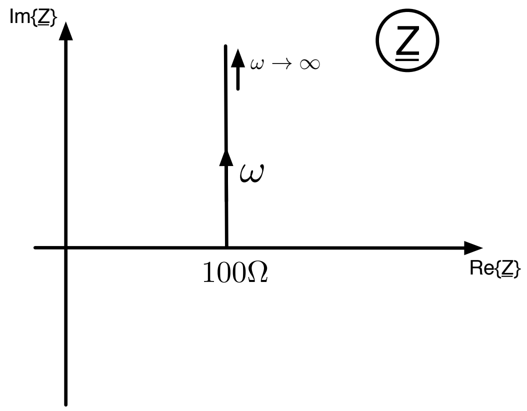


Fig. 1: Abb 4.1

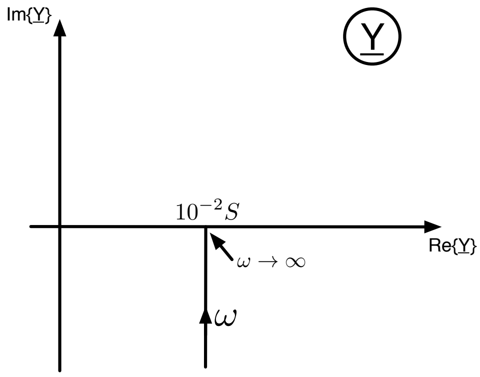


Fig. 2: Abb 4.2

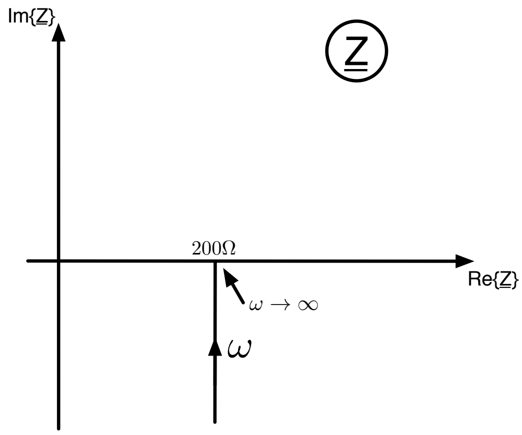


Fig. 3: Abb 4.3

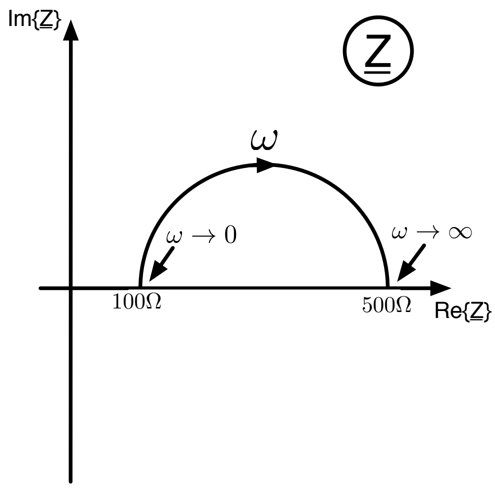


Fig. 4: Abb 4.4

(a) Zeichnen Sie für die Ortskurven in Abb. 4.1-4.4 jeweils eine passende Zweipol-Schaltung unter Verwendung von passiven Bauelementen. Geben Sie jeweils den mathematischen Ausdruck für $\underline{Z}$ an.

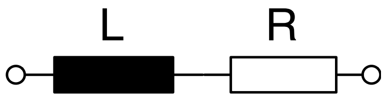
Im Folgenden gilt: $\omega = 10^4 s^{-1}$ und $\varphi_{ui} = \pi/4$ bzw. $\varphi_{ui} = -\pi/4$

(b) Geben Sie die Werte der Bauteile für die Ortskurve in Abb. 4.1-4.3 an.

Lösung:

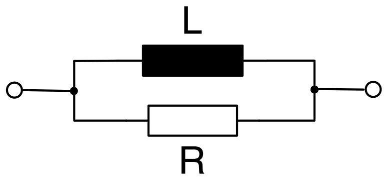
(a) Für die Schaltung gilt Folgendes:

Abb. 4.1



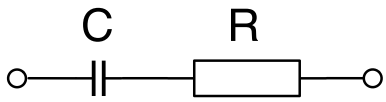
$$\underline{Z} = R + j\omega L$$

Abb. 4.2



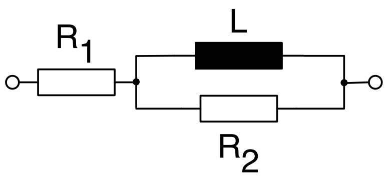
$$\underline{Z} = \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L}$$

Abb. 4.3



$$\underline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C}$$

Abb. 4.4



$$\underline{Z} = R_1 + \frac{R_2 \cdot j\omega L}{R_2 + j\omega L}$$

(b) Bei $\varphi_{ui} = \pi/4$ bzw. $\varphi_{ui} = -\pi/4$ gilt $Re\{Z\} = Im\{Z\}$ bzw. $Re\{Z\} = -Im\{Z\}$. Deswegen gilt für die Bauteile das Folgende

Abb. 4.1

$$\begin{aligned} R &= \omega L \\ \rightarrow L &= \frac{R}{\omega} \\ L &= \frac{100\Omega}{10^4 s^{-1}} = 10mH \end{aligned}$$

Abb. 4.2

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L} \\ \frac{1}{R} &= -\left(\frac{-1}{\omega L}\right) \\ R &= \omega L \\ \rightarrow L &= \frac{R}{\omega} \\ L &= \frac{(10^{-2}S)^{-1}}{10^4 s^{-1}} = 10mH \end{aligned}$$

Abb. 4.3

$$\begin{aligned} R &= -\left(\frac{-1}{\omega C}\right) \\ \rightarrow C &= \frac{1}{\omega R} \\ C &= \frac{1}{10^4 s^{-1} \cdot 200\Omega} = 0,5\mu F \end{aligned}$$