Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Lineare Elektrische Netze

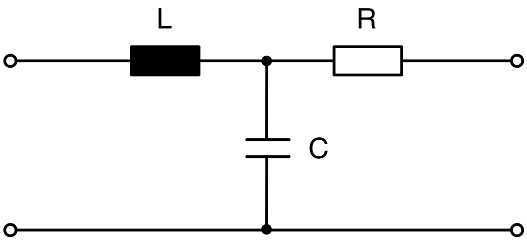
Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel
Tel: 0721 608-42650
Olaf.Doessel@kit.edu

Übungsleiter: Dipl.-Ing. G. Lenis
Tel: 0721 608-45478
Gustavo.Lenis@kit.edu

Übungsblatt Nr. 6: Vierpole/Zweitore

Aufgabe 1

Es sei folgende Schaltung gegeben:

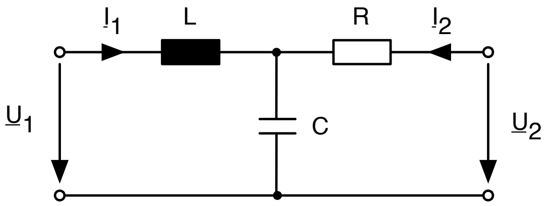


(a) Berechnen Sie die Impedanzmatrix $[\underline{Z}]$.

(b) Berechnen Sie die Admittanzmatrix $[\underline{Y}]$ einmal direkt und einmal durch Transformation von $[\underline{Z}]$.

Lösung:

(a)



Aufstellen der Impedanzmatrix:

$$\underline{Z}_{11} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \qquad \text{(Eingangs-Leerlaufimpedanz)}$$

$$\underline{Z}_{22} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} = R + \frac{1}{j\omega C} \qquad \text{(Ausgangs-Leerlaufimpedanz)}$$

$$\underline{Z}_{12} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} = \frac{1}{j\omega C} \qquad \text{(Leerlauf-Kernimpedanz, rückwärts)}$$

$$\underline{Z}_{21} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} = \frac{1}{j\omega C} \qquad \text{(Leerlauf-Kernimpedanz, vorwärts)}$$

und als ganzes:

$$[\underline{Z}] = \begin{bmatrix} j\omega L + \frac{1}{j\omega C} & \frac{1}{j\omega C} \\ \frac{1}{j\omega C} & R + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix}$$

(b) Die Admittanzmatrix kann auf zwei Arten bestimmt werden: zum einen erhält man sie als Inverse der Impedanzmatrix:

$$[\underline{Y}] = [\underline{Z}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_{22}}{detZ} & -\frac{\underline{Z}_{12}}{detZ} \\ -\frac{\underline{Z}_{21}}{detZ} & \frac{\underline{Z}_{11}}{detZ} \end{bmatrix}$$

die dafür benötigte Determinante von [Z] ist

$$\begin{aligned}
det[\underline{Z}] &= \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) - \left(\frac{1}{j\omega C}\cdot\frac{1}{j\omega C}\right) \\
&= j\omega LR + \frac{L}{C} - j\frac{R}{\omega C} + \frac{1}{(j\omega C)^2} - \frac{1}{(j\omega C)^2} \\
&= \frac{L}{C} + j\left(\omega LR - \frac{R}{\omega C}\right) = \frac{\omega L + j\omega^2 LCR - jR}{\omega C}
\end{aligned}$$

und somit

$$[\underline{Y}] = \begin{bmatrix} \frac{R+\frac{1}{j\omega C}}{det\underline{Z}} & -\frac{\frac{1}{j\omega C}}{det\underline{Z}} \\ -\frac{\frac{1}{j\omega C}}{det\underline{Z}} & \frac{j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}{det\underline{Z}} \end{bmatrix}$$

Der andere Weg führt wie in a) über eine Analyse der Schaltung. Am Beispiel von $\underline{Y}_{11}$ soll dies einmal vorgestellt werden:

$$\begin{aligned}
\underline{Y}_{11} &= \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = \left(j\omega L + R\|\frac{1}{j\omega C}\right)^{-1} = \left(j\omega L + \frac{R\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}\right)^{-1} \\
&= \left(j\omega L + \frac{R}{1+j\omega CR}\right)^{-1} = \left(\frac{j\omega L(1+j\omega CR)+R}{1+j\omega CR}\right)^{-1} \\
&= \frac{1+j\omega CR}{j\omega L - \omega^2 LCR + R} = \frac{-j+\omega CR}{\omega L + j\omega^2 LCR - jR}
\end{aligned}$$

Das ist genau das gleiche Ergebnis, das man auch aus $\frac{R\frac{1}{j\omega C}}{det[\underline{Z}]}$ erhält.

Zur weiteren Übung:

$\underline{Y}_{12}$ ergibt sich durch Kurzschließen von $\underline{U}_1$. Die Betrachtung von R in Reihe zu $l\|C$ ergibt einen Spannungsteiler, über dessen Parallelschaltung $L\|C$ die Spannung $\underline{I}_1 j\omega L$ abfällt.

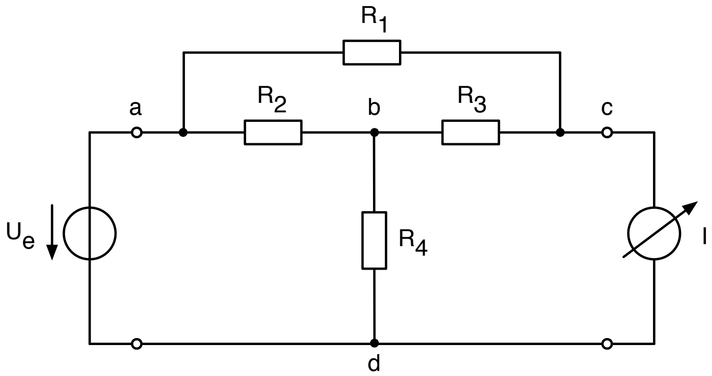
$$\frac{-\underline{I}_1 j\omega L}{\underline{U}_2} = \frac{j\omega L\|\frac{1}{j\omega C}}{j\omega L\|\frac{1}{j\omega C}+R}$$

$$\begin{aligned}
\underline{Y}_{12} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{U}_1=0} &= -\frac{1}{j\omega L}\frac{j\omega L\|\frac{1}{j\omega C}}{j\omega L\|\frac{1}{j\omega C+R}} = -\frac{1}{j\omega L}\frac{\frac{j\omega L\frac{1}{j\omega C}}{j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}}{\frac{j\omega L\frac{1}{j\omega C}}{j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}+R} \\
&= -\frac{1}{j\omega L}\frac{\frac{\frac{L}{C}}{j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}}{\frac{\frac{L}{C}}{j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}+R} \\
&= -\frac{1}{j\omega L}\frac{1}{1+R\left(j\omega L+\frac{1}{j\omega C}\right)\frac{C}{L}} \\
&= -\frac{1}{j\omega CL}\frac{\omega C}{\omega + R\left(j\omega^2 L - \frac{j}{C}\right)\frac{C}{L}} \\
&= -\frac{1}{j\omega C}\frac{\omega C}{\omega L + j\omega^2 LCR - jR}
\end{aligned}$$

Auch dieses Ergebnis entspricht dem Eintrag in der Admittanzmatrix $-\frac{\frac{1}{j\omega C}}{det\underline{Z}}$.

Aufgabe 2

Untersucht werden soll folgende Schaltung:



(a) Berechnen Sie den vom Amperemeter rechts angezeigten Strom $\underline{I}$ für $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 30\Omega$, $R_3 = 20\Omega$, $R_4 = 60\Omega$ und $U_e = 15V$.

(b) Nun werden Spannungsquelle und Amperemeter ausgetauscht, bestimmen Sie $\underline{I}$ für die neue Anordnung.

Lösung:

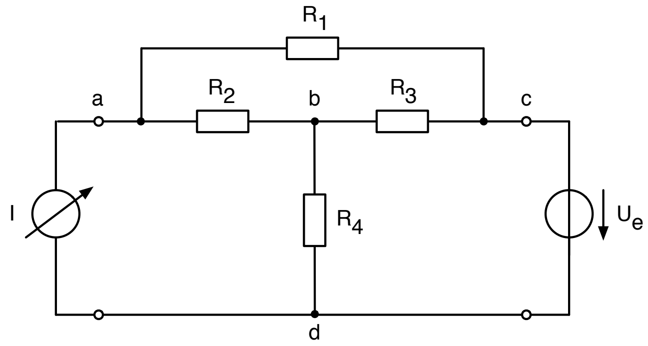
(a) den gesuchten Strom kann man mit Hilfe einer Knotengleichung für (b) bestimmen:
$\frac{U_{bd}}{R_4} + \frac{U_{bd}-U_e}{R_2} + \frac{U_{bd}}{R_3} = 0$
Über dem Amperemeter fällt keine Spannung ab (unendlich kleiner Innenwiderstand), daher liegt über R_3 ebenfalls U_{bd} an.

$$\begin{aligned}
U_{bd}\left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) &= \frac{U_e}{R_2} \\
U_{bd}\left(\frac{R_2R_3+R_4R_3+R_4R_2}{R_2R_3R_4}\right) &= \frac{U_e}{R_2} \\
U_{bd} &= U_e\left(\frac{1}{R_2}\cdot\frac{R_2R_3R_4}{R_2R_3+R_4R_3+R_4R_2}\right) \\
&= U_e\frac{R_3R_4}{R_2R_3+R_4R_3+R_4R_2} \\
&= 15V\frac{20\cdot 60}{30\cdot 20+60\cdot 20+60\cdot 30} \\
&= 15V\frac{1}{3} = 5V
\end{aligned}$$

Der Strom I_a setzt sich folgendermassen zusammen:

$$\begin{aligned}
I_a &= I_{R_1} + I_{R_3} = \frac{U_e}{R_1} + \frac{U_{bd}}{R_3} \\
&= \frac{15}{10}A + \frac{5}{20}A = \frac{7}{4}A = 1.75A
\end{aligned}$$

(b) die in der Aufgabenstellung geforderte Umstrukturierung führt zu



Der Strom am Knoten (b) wird somit zu

$$\frac{U_{bd}}{R_4 + \frac{U_{bd}}{R_2}} + \frac{U_{bd} - U_e}{R_3} = 0$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned}
U_{bd}\left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) &= \frac{U_e}{R_3} \\
U_{bd} &= U_e\left(\frac{1}{R_3} \cdot \frac{R_2 R_3 R_4}{R_2 R_3 + R_4 R_3 + R_4 R_2}\right) \\
&= U_e \frac{R_2 R_4}{R_2 R_3 + R_4 R_3 + R_4 R_2} \\
&= 15V\frac{1}{2} = 7.5V
\end{aligned}$$

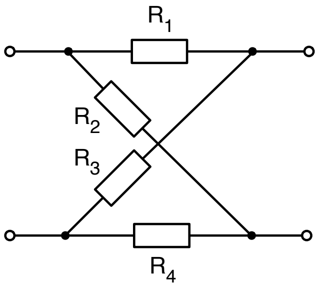
Damit lässt sich analog zu (a) der Strom I_b berechnen:

$$\begin{aligned}
I_b &= I_{R1} + I_{R2} = \frac{U_e}{R_1} + \frac{U_{bd}}{R_2} \\
&= \frac{15}{10}A + \frac{7.5}{30}A = \frac{7}{4}A = 1.75A
\end{aligned}$$

Ein solcher Vierpol wird als "reziprok" bezeichnet. Er weist, egal von welcher Seite her man ihn betrachtet, die gleichen Kernadmittanzen $\underline{Y}_{21} = \underline{Y}_{12}$ auf (vgl. Kap. 11.6).

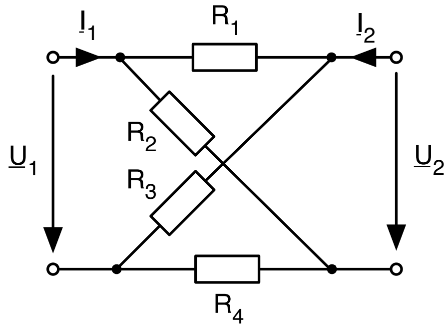
Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Y-Parameter der unten stehenden Schaltung



$R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $R_3 = 15\Omega$, $R_4 = 20\Omega$

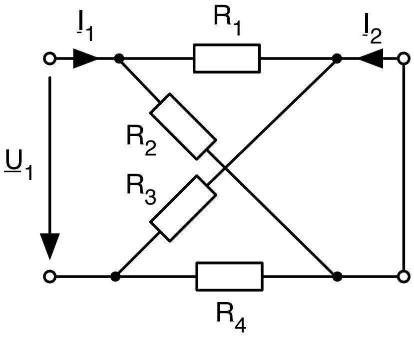
Lösung:

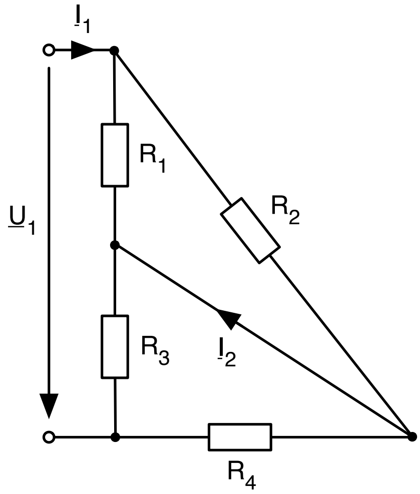


$$
\begin{aligned}
\underline{Y}_{11} &= \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right|_{U_2=0} = \frac{1}{(R_1\|R_2)+(R_3\|R_4)} = \frac{1}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}} \\
&= \frac{1}{\frac{R_1R_2(R_3+R_4)}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}+\frac{R_3R_4(R_1+R_2)}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}} \\
&= \frac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}{R_1R_2(R_3+R_4)+R_3R_4(R_1+R_2)} = \frac{21}{250}S \\
\underline{Y}_{22} &= \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\right|_{U_1=0} = \frac{1}{(R_1\|R_3)(R_2\|R_4)} = \frac{1}{\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}+\frac{R_2R_4}{R_2+R_4}} \\
&= \frac{1}{\frac{R_1R_3(R_2+R_4)}{(R_1+R_3)(R_2+R_4)}+\frac{R_2R_4(R_1+R_3)}{(R_1+R_3)(R_2+R_4)}} \\
&= \frac{(R_1+R_3)(R_2+R_4)}{R_1R_3(R_2+R_4)+R_2R_4(R_1+R_3)} = \frac{12}{125}S
\end{aligned}
$$

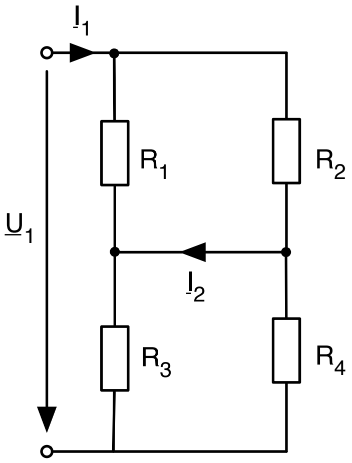
Für die Bestimmung von $\underline{Y}_{21}$ wird $\underline{U}_2$ zu Null gesetzt. Ein Zusammenziehen auf einen Punkt wie bei der Bestimmung von $\underline{Y}_{11}$ ist hier nicht sinnvoll. Es liegt daran, dass durch das Zusammenziehen der Strompfad für $\underline{I}_2$ verschwinden würde.

Deswegen ist ein Umzeichnen des Schaltplans in diesem Fall besser geeignet. Das Umzeichnen unter Berücksichtigung von $\underline{U}_2 = 0$ liefert Folgendes:





bzw.



Es handelt sich also um die aus Kap. 1.3 bekannte Brückenschaltung. Sollte der Spezialfall der abgeglichenen Brücke vorkommen, so gilt

$$\begin{aligned} \frac{R_1}{R_3} &= \frac{R_2}{R_4} \\ \underline{I}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Das ist hier aber leider nicht der Fall. Deshalb muss $\underline{I}_2$ mit Hilfe von Maschen- und Knotengleichungen bestimmt werden.

Die folgende Vorgehensweise wird dabei verwendet:

1. $\underline{I}_{R_3} = \underline{I}_2 + \underline{I}_{R_1}$
2. $\underline{I}_{R_1} = \frac{\underline{U}_{R_1}}{R_1} = \frac{\underline{I}_1(R_1 \| R_2)}{R_1}$
3. $\underline{I}_{R_3} = \frac{\underline{U}_{R_3}}{R_3} = \frac{\underline{I}_1(R_3 \| R_4)}{R_3}$

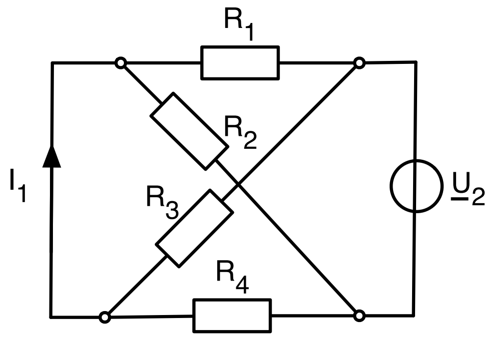
Einsetzen von 2. und 3. in 1. liefert:

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \underline{I}_{R_3} - \underline{I}_{R_1} \\ &= \underline{I}_1 \left(\frac{R_3 \| R_4}{R_3} - \frac{R_1 \| R_2}{R_2} \right) \\ &= \underline{I}_1 \left(\frac{R_4}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \end{aligned}$$

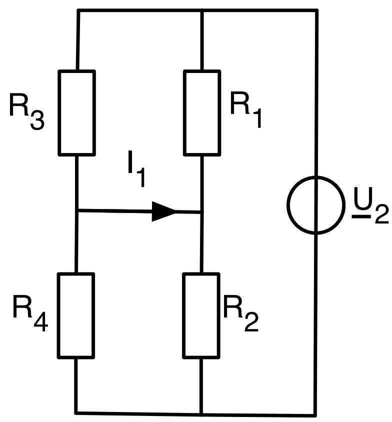
Für den Parameter $\underline{Y}_{21}$ gilt dann

$$\begin{aligned}\underline{Y}_{21} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right|_{U_2=0} &= \frac{\underline{I}_1 \cdot \left(\frac{R_4}{R_3+R_4} - \frac{R_2}{R_1+R_2}\right)}{\underline{U}_1} \\ &= \underline{Y}_{11} \cdot \left(\frac{R_4}{R_3+R_4} - \frac{R_2}{R_1+R_2}\right) \\ &= -\frac{1}{125} S\end{aligned}$$

Für den Parameter $\underline{Y}_{12}$ lässt sich die Schaltung folgendermaßen umzeichnen:



bzw.

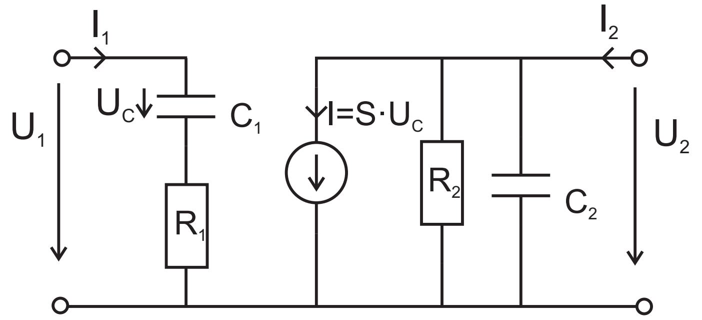


Die Bestimmung von $\underline{Y}_{12}$ läuft analog zu der von $\underline{Y}_{21}$. In diesem Fall gilt aber:

$$\begin{aligned}\underline{Y}_{12} &= \underline{Y}_{22}\left(\frac{R_4}{R_2+R_4} - \frac{R_3}{R_1+R_3}\right) \\ &= -\frac{1}{125} S\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Gegeben sei folgendes 2-Tor:



Bestimmen Sie die Y-Parameter des 2-Tors und zeichnen Sie zwei Ersatzschaltbilder (Bild 1: Y_{11},Y_{21}; Bild 2: Y_{12},Y_{22}) mit sämtlichen Vereinfachungen.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
Y_{11} &= \left.\frac{I_1}{U_1}\right|_{U_2=0} \Rightarrow Y_{11} = \frac{1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{j\omega C_1 R_1}{1 + j\omega C_1 R_1} \\
Y_{12} &= \left.\frac{I_1}{U_2}\right|_{U_1=0} \Rightarrow Y_{12} = 0 \\
Y_{21} &= \left.\frac{I_2}{U_1}\right|_{U_2=0} \Rightarrow Y_{21} = \frac{SU_c}{U_1} = S\frac{U_1 \frac{\frac{1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}}}{U_1} = \frac{S}{1 + j\omega C_1 R_1} \\
Y_{22} &= \left.\frac{I_2}{U_2}\right|_{U_1=0} \Rightarrow Y_{22} = \frac{1}{R_2} + j\omega C_2
\end{aligned}
$$

Bild 1: $U_2 = 0$

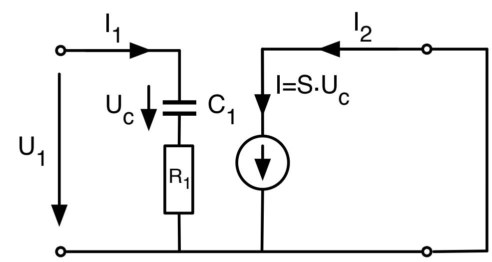


Bild 2: $U_1 = 0$