Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel
Tel: 0721 608-42650
Olaf.Doessel@kit.edu

Übungsleiter: Dipl.-Ing. G. Lenis
Tel: 0721 608-45478
Gustavo.Lenis@kit.edu

Übungsblatt Nr. 7: Bode-Diagramme

Aufgabe 1

Gegeben ist der Zusammenhang $\tau_i = R_i \cdot C_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$, die folgenden Übertragungsfunktionen $\underline{G}_m(j\omega) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}$ und die normierte Kreisfrequenz $\Omega = \frac{\omega}{1s^{-1}}$.

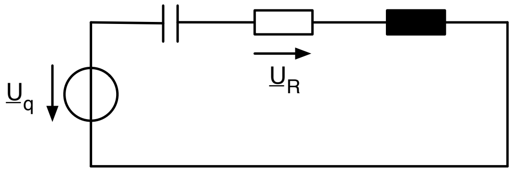
$$
\begin{aligned}
\underline{G}_1(j\omega) &= \frac{j\omega\tau_1}{(1+j\omega\tau_2)(1+j\omega\tau_3)} \\
\underline{G}_2(j\omega) &= \frac{1}{j\omega\tau_0} \\
\underline{G}_3(j\omega) &= \frac{1}{j\omega\tau_0} \cdot \frac{j\omega\tau_1}{(1+j\omega\tau_2)(1+j\omega\tau_3)}
\end{aligned}
$$

Zahlenwerte:
$R_0 = 10M\Omega$, $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 100\Omega$, $R_3 = 10000\Omega$, $C_0 = 1\mu F$, $C_1 = 100\mu F$, $C_2 = 100\mu F$, $C_3 = 10nF$

(a) Skizzieren Sie die Bodediagramme der 3 Übertragungsfunktionen $\underline{G}_1(j\omega)$, $\underline{G}_2(j\omega)$ und $\underline{G}_3(j\omega)$.

(b) Welche Bedingung muss eingehalten werden, damit die Übertragungsfunktion der Schaltung nach der Abbildung folgende Gestalt hat?

$$\underline{G}_1(j\omega) = \frac{\underline{U}_R}{\underline{U}_q} = \frac{j\omega\tau_1}{(1+j\omega\tau_2)(1+j\omega\tau_3)}$$



Hinweis: Beachten Sie, dass τ_1, τ_2 und τ_3 nicht die selben Werte wie in a) haben.

Lösung:

(a) Bodediagramme:
Zunächst werden die Zeitkonstanten τ_0, bis τ_3 berechnet.

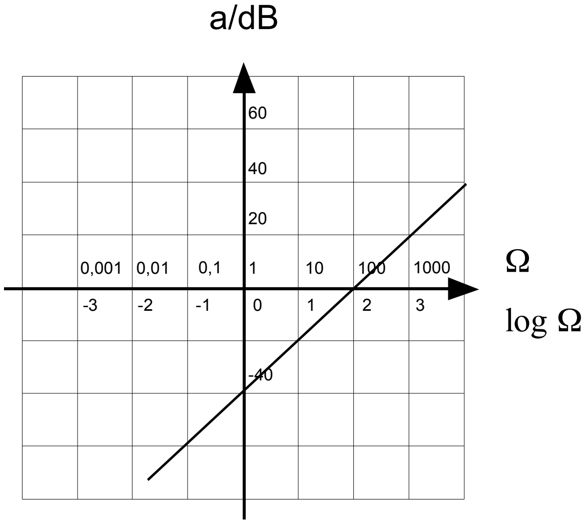
$$
\begin{aligned}
\tau_0 &= R_0 \cdot C_0 = 10 \cdot 10^6\Omega \cdot 1 \cdot 10^{-6}F = 10\frac{V}{A}\frac{As}{V} = 10s \\
\tau_1 &= R_1 \cdot C_1 = 100\Omega \cdot 100 \cdot 100^{-6}F = 10^{-2}s \\
\tau_2 &= R_2 \cdot C_2 = 100\Omega \cdot 100 \cdot 100^{-6}F = 10^{-2}s \\
\tau_3 &= R_3 \cdot C_3 = 10 \cdot 10^3\Omega \cdot 10 \cdot 100^{-9}F = 10^{-4}s
\end{aligned}
$$

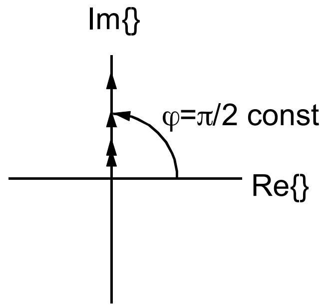
1. Übertragungsfunktion:

Die Übertragungsfunktion $\underline{G}_1(j\omega)$ kann in drei Übertragungsfunktionen zerlegt werden:
$\underline{G}_1(j\omega) = \underline{G}_z(j\omega) \cdot \underline{G}_{N1}(j\omega) \cdot \underline{G}_{N2}(j\omega)$

i) Wir betrachten zunächst die Zählerübertragungsfunktion: Einsetzen der Zeitkonstante liefert:
$\underline{G}_z(j\omega) = j\omega 10^{-2}s$
Mit der Normierung $\Omega = \frac{\omega}{1\frac{1}{s}}$ folgt:
$\underline{G}_z(j\Omega) = j10^{-2}\Omega$

Diese Übertragungsfunktion ist eine mit 20dB/Dekade ansteigende Gerade. Sie schneidet die Abszisse bei $\Omega = 100$ bzw. $log\Omega = 2$.
Die Verstärkung ist $a_{\underline{G}_z}/dB = 20log|j10^{-2}\Omega| = 20log(10^{-2}\Omega)$,
die Phasenbeziehung $\varphi_{\underline{G}_z} = arg\{j10^{-2}\Omega\} = \frac{\pi}{2}_{rad} = const$





ii) 1. Übertragungsfunktion des Nenners

$$\underline{G}_{N1}(j\omega) = \left.\frac{1}{1 + j\omega\tau_2}\right|_{\omega=\frac{1}{s}\Omega}$$
$$\underline{G}_{N1}(j\Omega) = \frac{1}{1 + j10^{-2}\Omega}$$

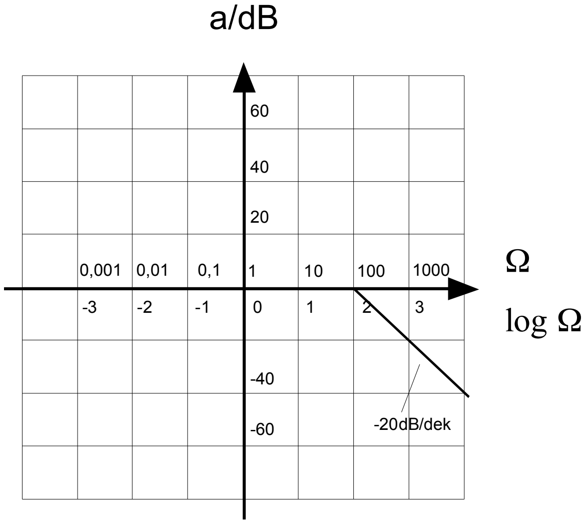
Daraus abgeleitet:

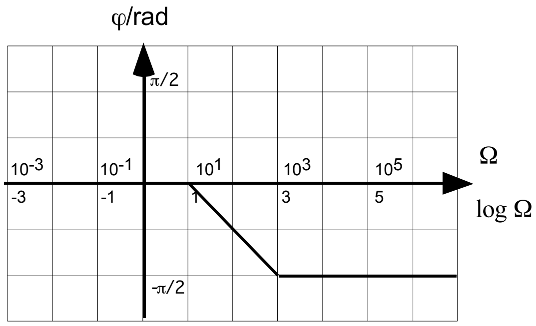
$$a_{\underline{G}_{N1}}/dB = 20log|1| - 20log|1 + j10^{-2}\Omega| = 0 - 20log\sqrt{1^2 + (10^{-2}\Omega)^2}$$

und

$$\varphi_{\underline{G}_{N1}} = arctan\left(\frac{0}{1}\right) - arctan\left(\frac{10^{-2}\Omega}{1}\right) = -arctan(10^{-2}\Omega)$$

Für große Ω ist dies eine mit 20db/Dekade fallende Gerade. Die sich über den gesamten Bereich Ω erstreckende Betragskennlinie besitzt ihr (Abwärts-)Knickstelle bei $\Omega = 100$ bzw. $log\Omega = 2$.





iii) 2. Übertragungsfunktion des Nenners

$$\underline{G}_{N2}(j\omega) = \left.\frac{1}{1+j\omega\tau_2}\right|_{\omega=\frac{1}{s}\Omega}$$

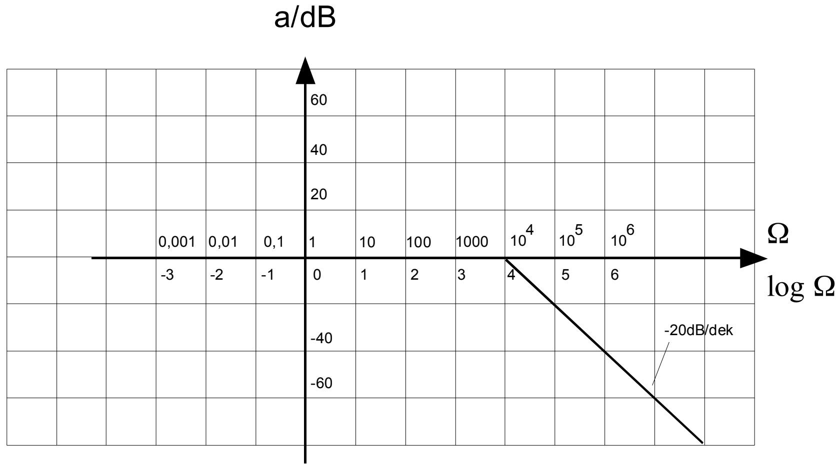
$$\underline{G}_{N2}(j\Omega) = \frac{1}{1+j10^{-4}\Omega}$$

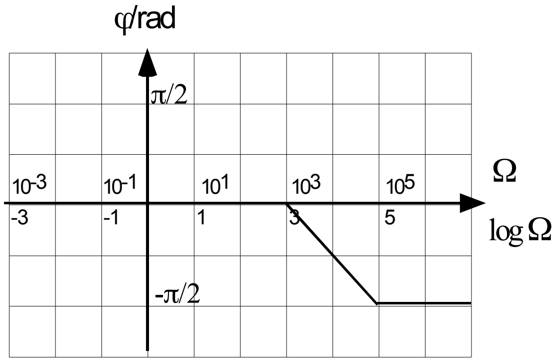
$$a_{\underline{G}_{N2}}/dB = 20log|1| - 20log|1+j10^{-4}\Omega|$$

$$= 0 - 20log\sqrt{1^2+(10^{-4}\Omega)^2}$$

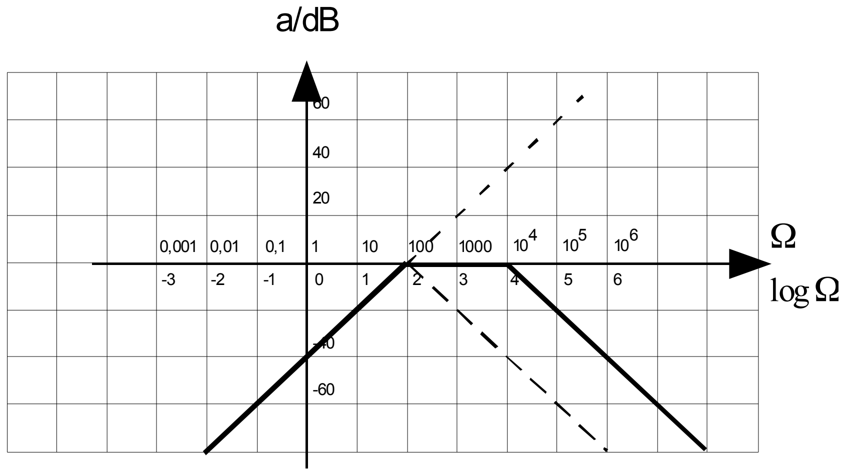
$$\varphi_{\underline{G}_{N2}} = arctan\left(\frac{0}{1}\right) - arctan\left(\frac{10^{-4}\Omega}{1}\right) = -arctan(10^{-4}\Omega)$$

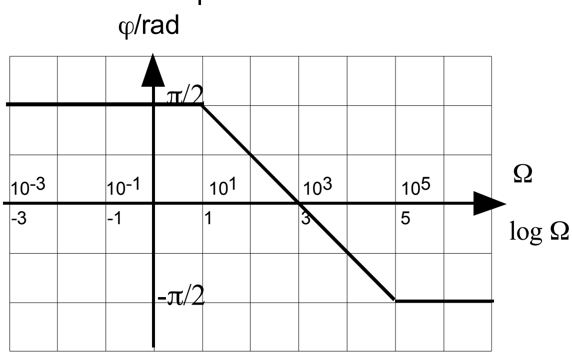
Wie oben ist dies für große Ω eine mit 20 dB/Dekade fallende Gerade. Die Betragskennlinie besitzt ihre Knickstelle bei $\Omega = 10000$ bzw. $log\Omega = 4$.





iv) Damit ergeben sich durch Kombination der Graphen die Bodediagramme der Gesamtfunktion:

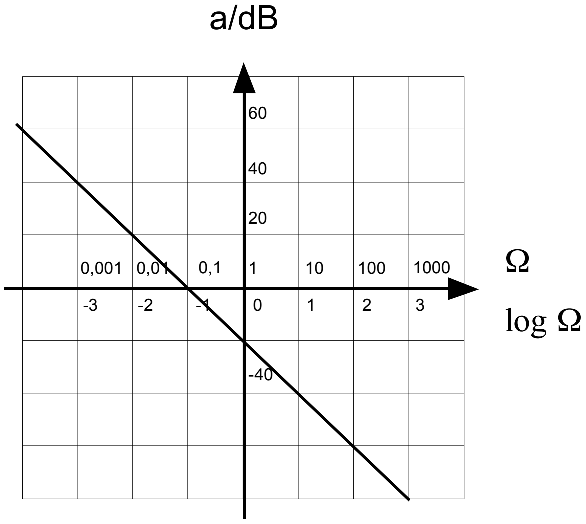


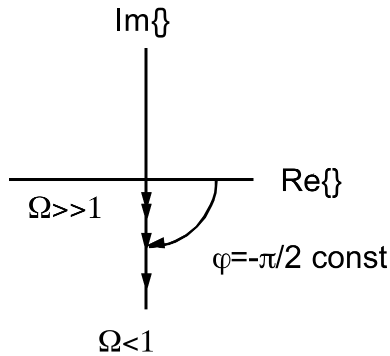


2. Übertragungsfunktion

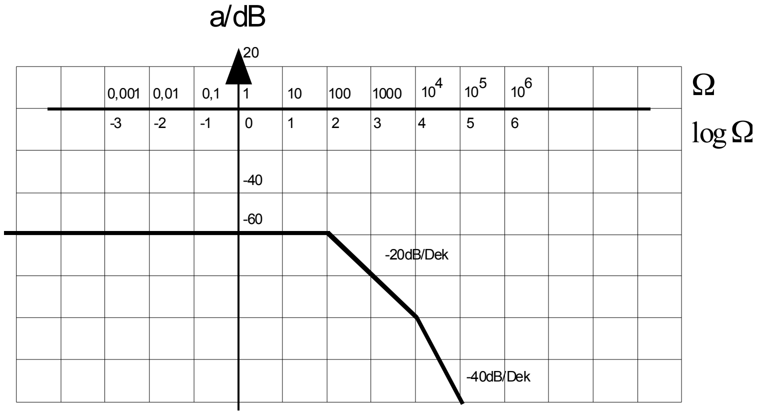
$$
\begin{aligned}
\underline{G}_2(j\omega) &= \frac{1}{j\omega 10s} \\
\text{bzw.} & \\
\underline{G}_2(j\Omega) &= \frac{1}{j10\Omega} \\
a_{\underline{G}_2}/dB &= 20log|1| - 20log|j10\Omega| = -20log(10\Omega) \\
\varphi_{\underline{G}_2} &= arg\{\frac{1}{j\omega 10s}\} = -\frac{\pi}{2}_{rad} = const
\end{aligned}
$$

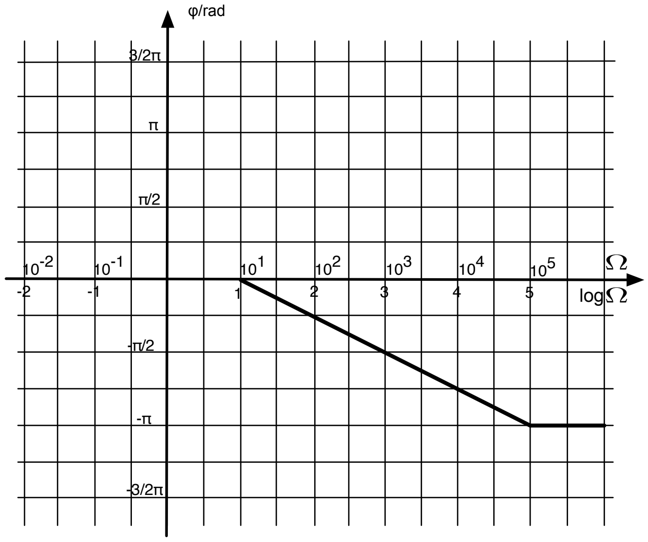
Diese Übertragungsfunktion ist eine mit -20 dB/Dekade fallende Gerade. Sie schneidet die Abszisse bei $\Omega = 0,1$ bzw. $log\Omega = -1$.





3. Übertragungsfunktion
Die Übertragungsfunktion $\underline{G}_3(j\omega)$ ergibt sich durch die Überlagerung der Einzelfunktionen. Die ursprüngliche Phase erfährt eine zusätzliche Reduzierung um $\frac{\pi}{2}$. Für sehr große Ω kompensieren sich die Phasenbeiträge des D-Gliedes (Zählerfunktion) und die des I-Gliedes $\underline{G}_2(j\omega)$ so, dass als phasenbestimmende Glieder nur die beiden VZ_1-Glieder $\underline{G}_2(j\omega)$, $\underline{G}_3(j\omega)$ wirken. Die Phase für sehr große Ω beträgt somit 2x($\frac{\pi}{2}$).
Die Betragskennlinie erfährt eine "Drehung" nach rechts. Denn der ursprüngliche Anstieg mit +20 dB/Dekade (Zählerfunktion) wird durch die Übertragungsfunktion $\underline{G}_2(j\omega)$ gerade kompensiert.





(b) RLC-Schaltung

Durch Anwendung der Spannungsteilerformel erhält man für die gesuchte Übertragungsfunktion folgenden Zusammenhang:

$$\frac{\underline{U}_R}{\underline{U}_q} = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega CR}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR}$$

Dies soll mit der vorgegebenen Übertragungsfunktion übereinstimmen.

$$\frac{j\omega CR}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR} \stackrel{!}{=} \frac{j\omega\tau_1}{(1 + j\omega\tau_2)(1 + j\omega\tau_3)} = \frac{j\omega\tau_1}{1 - \omega^2\tau_2\tau_3 + j\omega(\tau_2 + \tau_3)}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$\begin{aligned} CR &= \tau_1 \\ LC &= \tau_2\tau_3 \\ CR &= \tau_2 + \tau_3 \end{aligned}$$

Auflösen nach τ_2 und τ_3:

$$\begin{aligned}
\tau_3 &= \frac{LC}{\tau_2} \\
RC &= \tau_2 + \frac{LC}{\tau_2} \\
\tau_2^2 - RC\tau_2 + LC &= 0 \\
\tau_{2(a,b)} &= \frac{RC}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{RC}{2}\right)^2 - LC}
\end{aligned}$$

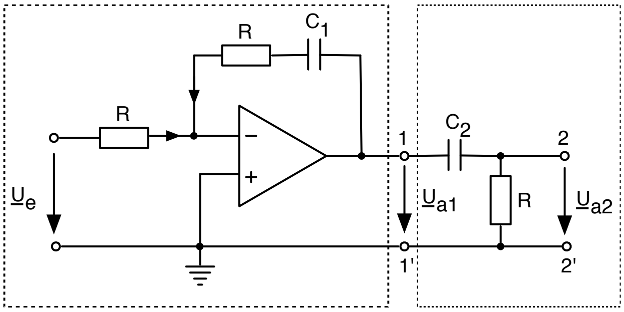
Positive Zeitkonstanten (physikalisch sinnvoll) erhält man, wenn die Lösungen der letzten Gleichung positiv und rein reell sind. Dazu muss gelten, d.h. der Term unter der Wurzel darf nicht negativ werden.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{RC}{2}\right)^2 - LC &\geq 0 \\
\left(\frac{RC}{2}\right)^2 &\geq LC \\
L &\leq \left(\frac{RC}{2}\right)^2 \frac{1}{C}
\end{aligned}$$

Diese Ungleichung kann durch einen Faktor in eine Gleichung transferiert werden:
Mit $L = \alpha \frac{R^2C}{4} (\alpha \in [0 \cdots 1])$ folgt: $\tau_{2(a,b)} = \frac{RC}{2}(1 \pm \sqrt{1-\alpha})$
τ_3 erhält man durch Einsetzen von τ_2 in die Gleichung oben.

Aufgabe 2

Eine Wechselspannungsquelle speist eine Operationsverstärkerschaltung und nachfolgenden RC-Hochpass.



(a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $\underline{G}_1(j\omega) = \frac{\underline{U}_{a1}}{\underline{U}_e}$. Führen Sie eine geeignete Normierung $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ ein und bestimmen Sie den Amplitudengang $a_{\underline{G}_1}/dB$ und den Phasengang $\varphi_{\underline{G}_1}$. Zeichnen Sie $a_{\underline{G}_1}$ und $\varphi_{\underline{G}_1}$ im Bodediagramm.

(b) Berechnen Sie die komplexe Übertragungsfunktion $\underline{G}_2(j\omega) = \frac{\underline{U}_{a2}}{\underline{U}_{a1}}$ des passiven RC-Hochpassgliedes. Tragen Sie den Amplituden- und Phasengang in das Bodediagramm aus Teilaufgabe a) ein ($C_2 = \frac{1}{10} \cdot C_1$).

(c) Zeichnen Sie die Kennlinien der Übertragungsfunktion $\underline{G}_{res}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{a2}}{\underline{U}_e}$.

Lösung:

(a) Übertragungsfunktion:

$$\underline{G}_1(j\omega) = \frac{\underline{U}_{a1}}{\underline{U}_e} = -\frac{R + \frac{1}{j\omega C_1}}{R} = -\frac{1 + j\omega C_1 R}{j\omega C_1 R}$$

Bodediagramm:

$$a_{\underline{G}_1}/dB = 20log\left|\frac{1 + j\omega C_1 R}{j\omega C_1 R}\right| = 20log\left(\sqrt{1^2 + (\omega C_1 R)^2}\right)$$
$$-20log\left(\sqrt{(\omega C_1 R)^2}\right)$$

Normierung:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ mit } \omega_0 = \frac{1}{RC_1}$$

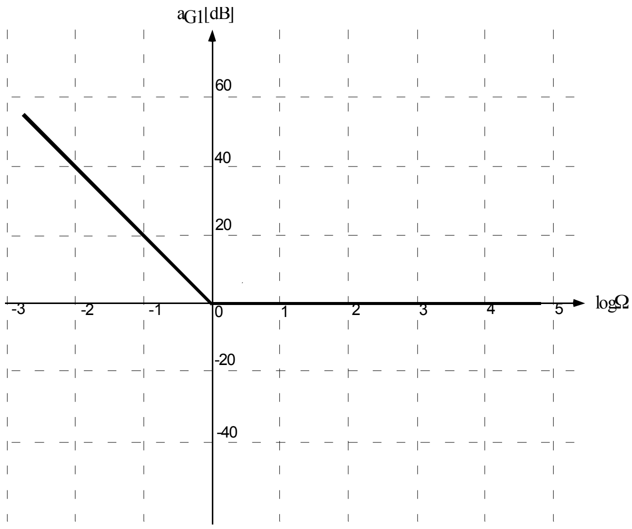
Amplitudengang:

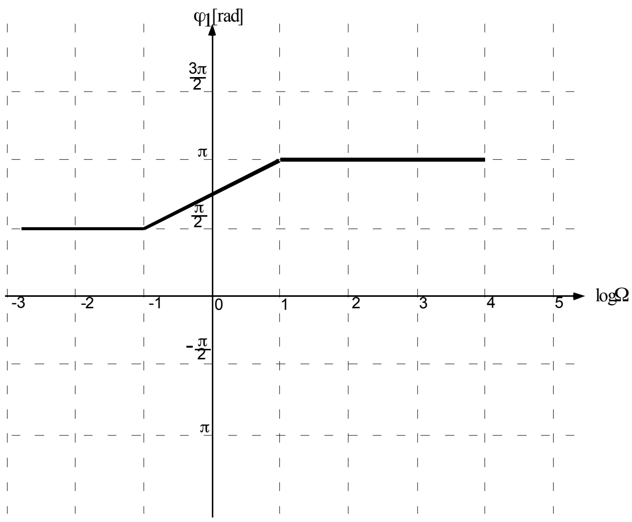
$$\begin{aligned} a_{\underline{G}_1}/dB &= 20log\left(\sqrt{1^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\omega_0 C_1 R\right)^2}\right) \\ &- 20log\left(\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\omega_0 C_1 R\right)^2}\right) \\ &= 20log\left(\sqrt{1^2 + \Omega^2}\right) - 20log\Omega \end{aligned}$$

Phasengang:

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\underline{G}_1} &= arg\{-1\} + arg\{1 + j\Omega\} - arg\{j\Omega\} \\
&= \pi + arctan\left(\frac{\Omega}{1}\right) - \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{2} + arctan(\Omega)
\end{aligned}
$$

π wird dazu addiert (oder subtrahiert), weil eine komplexe Zahl mit (-1) multipliziert einer Drehung um $\pm\pi$ entspricht!





(b) Übertragungsfunktion $RC_2 - Hochpass$

Die Ausgangsspannung des an den OP angeschlossenen $RC_2 - Hochpass$ kann durch Anwenden der komplexen Spannungsteilerformel berechnet werden.

$$
\begin{aligned}
\underline{G}_2(j\omega) &= \frac{\underline{U}_{a2}}{\underline{U}_{a1}} = \frac{j\omega R_2 C_2}{1 + j\omega R_2 C_2} \\
a_{\underline{G_2}}/dB &= 20log\left|\frac{j\omega C_2 R}{1 + j\omega C_2 R}\right| \\
&= 20log\left(\sqrt{(\omega C_2 R)^2}\right) - 20log\left(\sqrt{1^2 + (\omega C_2 R)^2}\right)
\end{aligned}
$$

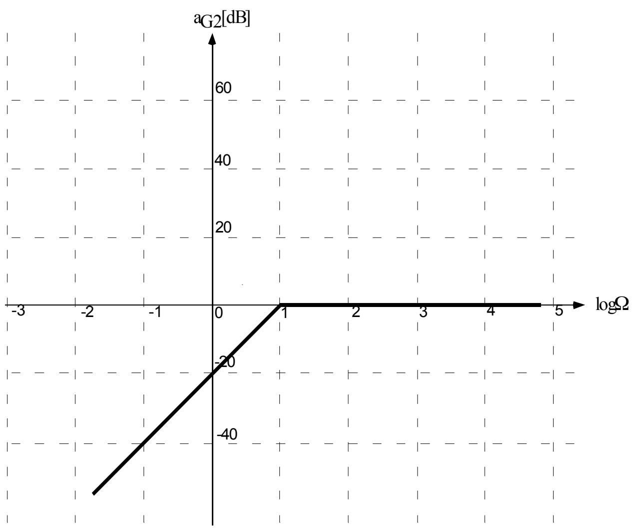
Mit der Normierung aus a) (dies erlaubt das Eintragen der Kennlinien von $\underline{G}_2(j\omega)$ ohne Umrechnung in das gleiche Diagramm wie $\underline{G}_1(j\omega)$

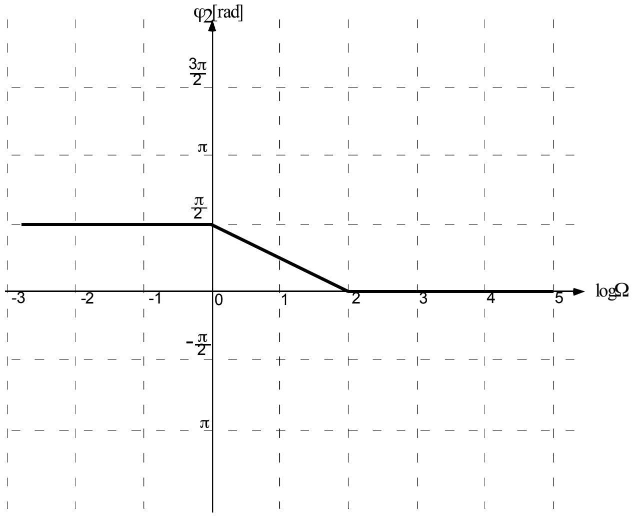
$$\begin{aligned}
\Omega &= \frac{\omega}{\omega_0} \text{ mit } \omega_0 = \frac{1}{RC_1} \\
a_{\underline{G}_2}/dB &= 20log\left(\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\omega_0 C_2 R\right)^2}\right) \\
&- 20log\left(\sqrt{1^2+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\omega_0 C_2 R\right)^2}\right) \\
&= 20log\left(\sqrt{\left(\Omega\frac{C_2}{C_1}\right)^2}\right) - 20log\left(\sqrt{1^2+\left(\Omega\frac{C_2}{C_1}\right)^2}\right)
\end{aligned}$$

mit dem gegebenen Zusammenhang $C_2 = \frac{C_1}{10}$ folgt
$a_{\underline{G}_2}/dB = 20log(10^{-1}\Omega) - 20log\left(\sqrt{1^2+(10^{-1}\Omega)^2}\right)$
Die 3dB-Knickfrequenz liegt somit bei $10^{-1}\Omega = 1 \rightarrow \Omega = 10$
$\rightarrow log\Omega = 1.$

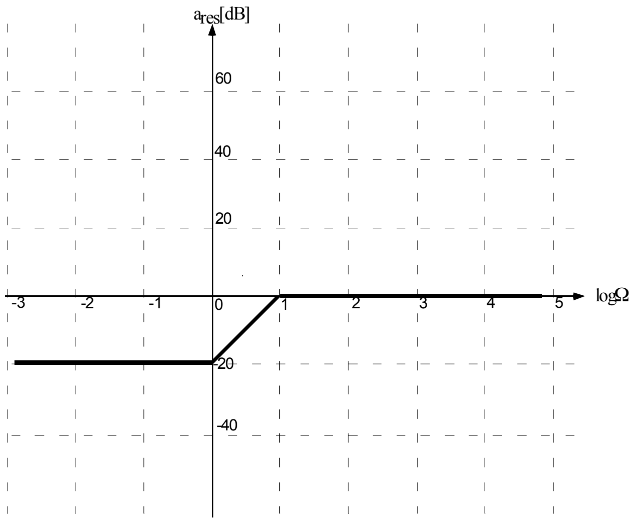
Phasengang:

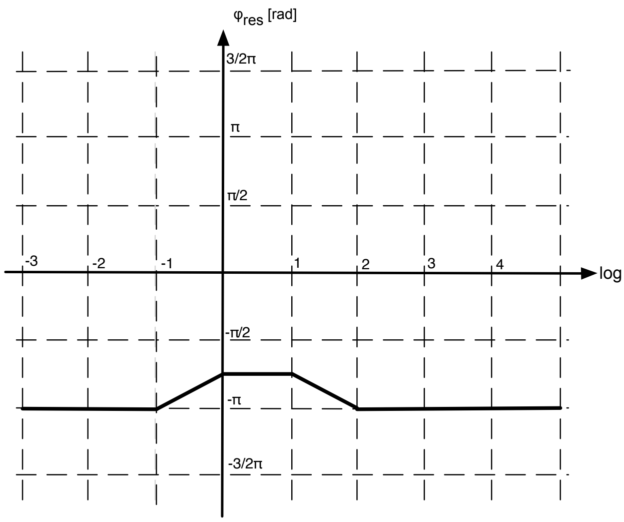
$$\begin{aligned}
\varphi_{\underline{G}_2} &= arg\{j\Omega\} - arg\{1+j\Omega\} \\
&= \frac{\pi}{2} - arctan\left(\frac{10^{-1}\Omega}{1}\right) \\
&= \frac{\pi}{2} + arctan(10^{-1}\Omega)
\end{aligned}$$





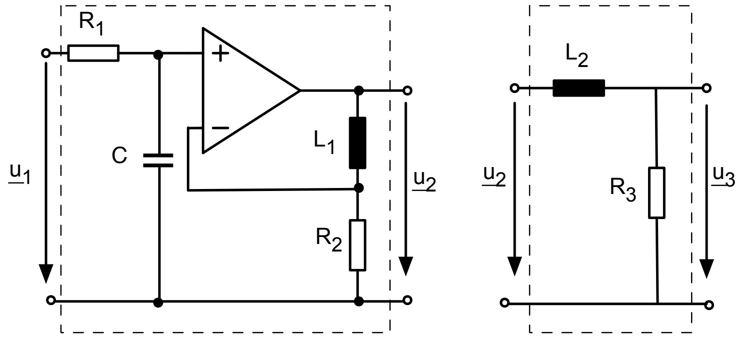
(c) Übertragungsfunktion der Schaltungen aus a) und b) zusammengefasst:
$\underline{G}_{res}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{a2}}{\underline{U}_e} = \underline{G}_1(j\omega) \cdot \underline{G}_2(j\omega) = -\frac{1+j\omega C_1 R}{j\omega C_1 R} \cdot \frac{j\omega C_2 R}{1+j\omega C_2 R}$
Die zeichnerische Kombination ergibt:





Aufgabe 3

Gegeben seien folgende Verstärker- und Tiefpassschaltungen mit $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $R_3 = 1k\Omega$, $L_1 = 0.1mH$, $L_2 = 200mH$, $C_1 = 10nF$.



(a) Skizzieren Sie die Bode-Diagramme (Amplituden- und Phasengang) des Spannungsverhältnisse $\underline{G}_1(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$ des Verstärkers ohne Tiefpass.

(b) Berechnen Sie den Amplituden und Phasengang des Tiefpasses für $\underline{G}_2(j\omega) = \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2}$ und zeichnen Sie auch diesen Verlauf in die Diagramme aus Teilaufgabe a) ein.

(c) Ermitteln Sie graphisch die Bodediagramme der Gesamtschaltung.

Lösung:

(a) Zuerst wird die Übertragungsfunktion ermittelt. Die Schaltung ist ein nicht invertierender Verstärker mit einem Spannungsteiler am Eingang. Dadurch lässt sich die Spannung am positiven Eingang Folgerdermaßen bestimmen:

$$\underline{U}_p = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R_1} \cdot \underline{U}_1 = \frac{1}{1 + j\omega R_1 C} \cdot \underline{U}_1$$

Auf die gleiche Art und Weise wird die Spannung am negativen Eingang bestimmt:

$$\underline{U}_n = \frac{R_2}{j\omega L_1 + R_2} \cdot \underline{U}_2$$

Bei einem idealen OP sind diese beiden Spannungen gleich groß, d.h.

$$\begin{aligned} \underline{U}_n &= \underline{U}_p \\ \frac{1}{1 + j\omega R_1 C} \cdot \underline{U}_1 &= \frac{R_2}{j\omega L_1 + R_2} \cdot \underline{U}_2 \\ \underline{G}_1(j\omega) &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R_2 + j\omega L_1}{R_2 + j\omega R_1 R_2 C} = \frac{1 + j\omega \frac{L_1}{R_2}}{1 + j\omega R_1 C} \end{aligned}$$

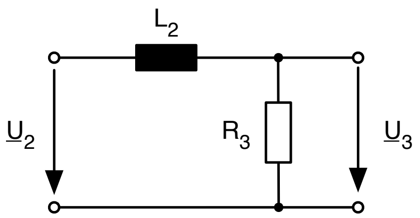
Normierung:

$$\begin{aligned}
\Omega &= \omega \cdot \frac{L_1}{R_2} \rightarrow \omega = \Omega \cdot 50000 s^{-1} \\
\underline{G}_1(j\omega) &= \frac{1+j\Omega}{1+jR_1C\frac{R_2}{L_1}\Omega} = \frac{1+j\Omega}{1+j0.01\Omega} \\
&= \frac{1+j\Omega}{1+j10^{-2}\Omega} \\
a_{\underline{G}_1}/dB &= 20log\left|\frac{1+j\Omega}{1+j10^{-2}\Omega}\right| \\
&= 20log\left(\sqrt{1^2+\Omega^2}\right) - 20log\left(\sqrt{1^2+(10^{-2}\Omega)^2}\right)
\end{aligned}$$

Die Knickfrequenz des ersten Terms liegt bei $\Omega = 1 \rightarrow log\Omega = 1$, des zweiten bei $10^{-2}\Omega = 1 \rightarrow \Omega = 100 \rightarrow log\Omega = 2$.

$$\begin{aligned}
\varphi_{\underline{G}_1} &= arg\{1+j\Omega\} - arg\{1+j10^{-2}\Omega\} \\
&= arctan\left(\frac{\Omega}{1}\right) - arctan\left(\frac{10^{-2}\Omega}{1}\right) \\
&= arctan(\Omega) - arctan(10^{-2}\Omega)
\end{aligned}$$

(b)



Per Spannungsteilerregel lässt sich der Zusammenhang zwischen Eingang und Ausgang beschreiben:
$\underline{U}_3 = \frac{R_3}{R_3+j\omega L_2} \cdot \underline{U}_2 = \frac{1}{1+j\omega\frac{L_2}{R_3}} \cdot \underline{U}_2$
Daraus folgt direkt die Übertragungsfunktion
$\underline{G}_2(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\frac{L_2}{R_3}}$
Als Normierung dient $\Omega' = \omega\frac{L_2}{R_3} \rightarrow \omega = \Omega' \cdot \frac{R_3}{L_2} = \Omega' \cdot 5000 s^{-1}$

$$\begin{aligned}
\underline{G}_2(j\Omega') &= \frac{1}{1+j\Omega'} \\
a_{\underline{G}_2}(j\Omega')/dB &= 20log\left|\frac{1}{1+j\Omega'}\right| = 0 - 20log\left(\sqrt{1^2+\Omega'^2}\right) \\
\varphi_{\underline{G}_2}(j\Omega') &= arg\{1\} - arg\{1+j\Omega'\} \\
&= 0 - arctan\left(\frac{\Omega'}{1}\right) = -arctan(\Omega')
\end{aligned}$$

Achtung: Um die Kurven in die Diagramme aus a) einzeichnen zu können, muss die gleiche Normierung wie dort verwendet werden!

$$\Omega' = \omega \cdot \frac{L_2}{R_3} = \Omega \cdot 50000 s^{-1} \cdot \frac{L_2}{R_3} = 10\Omega$$

und damit

$$\begin{aligned}
a_{\underline{G}_2}(j\Omega)/dB &= -20log\left(\sqrt{1^2+(10\Omega)^2}\right) \\
\varphi_{\underline{G}_2}(j\Omega) &= -arctan(10\Omega)
\end{aligned}$$

die Knickfrequenz liegt bei $10\Omega = 1 \rightarrow \Omega = 10^{-1} \rightarrow log\Omega = -1$

(c)