Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Lineare Elektrische Netze

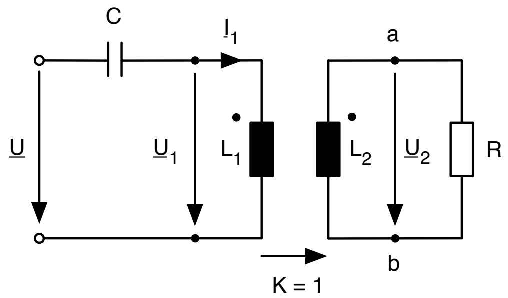
Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel
Tel: 0721 608-42650
Olaf.Doessel@kit.edu

Übungsleiter: Dipl.-Ing. G. Lenis
Tel: 0721 608-45478
Gustavo.Lenis@kit.edu

Übungsblatt Nr. 8: Transformatoren

Aufgabe 1

Die Abbildung zeigt einen verlustlosen Transformator ohne Streuung. Am Eingang wird ein Wechselstrom mit veränderbarer Frequenz ω angelegt.



(a) Wie lautet die komplexe Eingangsimpedanz $\underline{Z}$ als Funktion von L_1, L_2, R, C und ω?

(b) Wie lautet die Resonanzfrequenz $\omega_0 = f(L_1, L_2, R, C)$, bei der die Eingangsimpedanz $\underline{Z}$ rein reell wird.

(c) Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild des Transformators in der Abbildung unter Verwendung von nur drei Elementen und bestimmen Sie deren Wert.

(d) Im folgenden sei $\omega = \omega_0$, d.h. die Schaltung wird bei Resonanz betrieben. Berechnen Sie die in der Schaltung umgesetzte Wirkleistung.

Lösung:

(a) Die Eingangsimpedanz:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}_1} = \frac{(\underline{Z}_C + \underline{Z}_1)\underline{I}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_C + \underline{Z}_1$$

($\underline{Z}_1$: Eingangsimpedanz des Übertragers)

Trafogleichungen:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 \\ -\underline{I}_2 R &= j\omega M \underline{I}_1 + j\omega L_2 \underline{I}_2 \end{aligned}$$

($\underline{U}_2$ ist hier schon substituiert: $\underline{U}_2 = -\underline{I}_2 R$)

$$-\underline{I}_2(R + j\omega L_2) = j\omega M \underline{I}_1$$

$$\begin{aligned}
\underline{I}_2 &= -\frac{j\omega M}{R+j\omega L_2}\underline{I}_1 \\
\underline{U}_1 &= j\omega L_1 \underline{I}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R+j\omega L_2}\underline{I}_1 \\
\underline{Z}_1 &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R+j\omega L_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \frac{1}{j\omega C} + \underline{Z}_1 \\
&= \frac{1}{j\omega C} + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R+j\omega L_2}
\end{aligned}$$

Da der Transformator ohne Streuung arbeitet, ist der Kopplungsfaktor $k = 1$. Somit gilt $M^2 = k^2 \cdot L_1 \cdot L_2 = L_1 \cdot L_2$. Dadurch kann die Eingangsimpedanz Folgendermassen getrennt nach Real- und Imaginärteil angegeben werden

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= -\frac{j}{\omega C} + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 L_1 L_2 (R - j\omega L_2)}{R^2 + (\omega L_2)^2} \\
&= \frac{\omega^2 L_1 L_2 R}{R^2 + (\omega L_2)^2} + j\left(-\frac{1}{\omega C} + \omega L_1 - \frac{\omega^3 L_1 L_2^2}{R^2 + (\omega L_2)^2}\right)
\end{aligned}$$

(b) Im Resonanzfall gilt:

$$Im\{\underline{Z}(\omega_0)\} = 0$$

Daraus folgt:

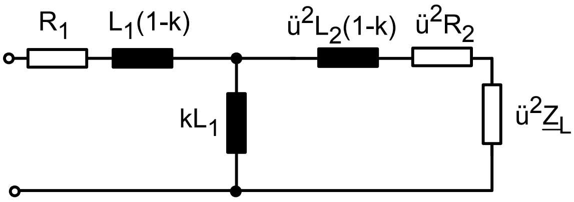
$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\omega_0 C} + \omega L_1 - \frac{\omega_0^3 L_1 L_2^2}{R^2 + (\omega_0 L_2)^2} &= 0 \\
-\frac{1}{\omega_0 C} + \frac{\omega L_1 R^2 + \omega_0^3 L_1 L_2^2 - \omega_0^3 L_1 L_2^2}{R^2 + (\omega_0 L_2)^2} &= 0 \\
-\frac{1}{\omega_0 C} &= \frac{\omega L_1 R^2}{R^2 + (\omega_0 L_2)^2} \\
R^2 + (\omega_0 L_2)^2 &= \omega_0^2 L_1 R^2 C \\
\omega_0^2 (L_1 R^2 C - L_2^2) = R^2 & \\
\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{L_1 C - \left(\frac{L_2}{R}\right)^2}}
\end{aligned}$$

(c) Diese Teilaufgabe lässt sich auf 2 Art und Weisen lösen. Die erste Vorgehensweise ist eher mathematisch. Durch geschicktes Umformen kommt man auf eine verfeinfachte Variante der Impedanz $\underline{Z}$:

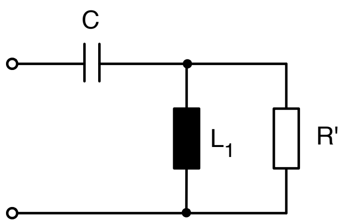
$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= -\frac{j}{\omega C} + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 L_1 L_2}{R + j\omega L_2} \\
&= -\frac{j}{\omega C} + \frac{(j\omega L_1)(R + j\omega L_2) + \omega^2 L_1 L_2}{R + j\omega L_2} \\
&= -\frac{j}{\omega C} + \frac{j\omega L_1 R - \omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 L_1 L_2}{R + j\omega L_2} \\
&= -\frac{j}{\omega C} + \frac{j\omega L_1 R}{R + j\omega L_2} \cdot \frac{\left(\frac{L_1}{L_2}\right)}{\left(\frac{L_1}{L_2}\right)} \\
&= \frac{1}{j\omega C} + \frac{(j\omega L_1)\left(R\frac{L_1}{L_2}\right)}{j\omega L_1 + R\frac{L_1}{L_2}}
\end{aligned}$$

Diese Gleichung beschreibt eine Schaltung bestehend aus einem Kondesantor in Reihe mit einer Parallelschaltung aus einer Spule mit Induktivität L_1 und einem Widerstand $R\frac{L_1}{L_2}$.

Der zweite Ansatz ist der Elektrotechnischere. Hierbei ist die Verwendung eines Esatzschaltbild fr den Transformator notwendig (Skript, Abb. 14.13):



mit: $R_1 = R_2 = 0$, da verlustlos; $L_1(1-k) = 0$ und $L_2(1-k) = 0$, da k=1;
es ergibt sich für die Schaltung das folgende einfache Ersatzschaltbild:



wegen $\underline{Z}_L = R$ gilt $R' =$ü$^2\underline{Z}_L = \frac{L_1}{L_2}R$
$C = C$ und $L_1 = L_1$

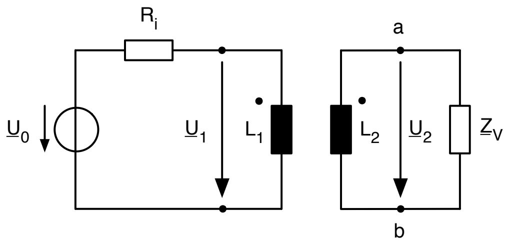
(d) Zusatz: Im folgenden sei $\omega = \omega_0$, d.h. die Schaltung werde bei Resonanz betrieben.

I einprägt, Wirkleistung entsteht nur im Parallelkreis

$$P = Re\{|\underline{I}|^2 \underline{Z}_{parallel}\} = |\underline{I}|^2 Re\left(\frac{1}{\frac{1}{R'} + \frac{1}{j\omega L_1}}\right) = ... = |\underline{I}|^2 \frac{L_2}{RC}$$

Aufgabe 2

Eine Last $\underline{Z}_v = R_v + jX_v$ soll mittels eines verlustlosen, streulosen Transformators an eine Spannungsquelle mit der Quellenspannng $\underline{U}_0$ und dem Innenwiderstand R_i angepasst werden.



(a) Berechnen Sie bei sekundärem Kurzschluss den Kurzschlussstrom $\underline{I}_K$ (Zählpfeil von a nach b)

(b) Berechnen Sie bei sekundärem Leerlauf die Ausgangsspannung $\underline{U}_{a0}$ an den Klemmen a und b.

(c) Berechnen Sie bezüglich der Klemmen a und b die komplexe Innenimpedanz der Schaltung.

(d) Geben Sie bezüglich der Klemmen a und b die Ersatzspannungsquellenschaltung an.

Vom Transformator und der Spannungsquelle seien folgende Daten bekannt: $L_1 = 10mH$, $L_2 = 100mH$, $R_i = 2\Omega$, $f = 15.916Hz$.

(e) Mit Hilfe welcher Bauelemente der Last kann eine Leistungsanpassung erfolgen?
Geben Sie die Werte der Bauelemente an.

(f) Berechnen Sie den Wirkungsgrad der Schaltung $\eta = \frac{P_v}{P_{ges}}$ für $f = 15.916Hz$.

Lösung:

Transformatorgleichungen:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= (R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 + J\omega\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= j\omega M\underline{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2)\underline{I}_2\end{aligned}$$

verlustfrei würde bedeuten, dass:
$R_1 = R_2 = 0$
aber hier:

$$\underline{U}_0 = (R_i + j\omega L_1)\underline{I}_1 + \omega M\underline{I}_2$$

streulos: $k = 1$ und
$M = \sqrt{L_1 L_2}$

(a) Sekundärer Kurzschluss:
$\underline{U}_2 = 0$ und $\underline{I}_2 = -\underline{I}_k$

$$\begin{aligned} \underline{U}_0 &= (R_i + j\omega L_1)\underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_K \\ 0 &= j\omega M \underline{I}_1 - j\omega L_2 \underline{I}_K \end{aligned}$$

zweite Gleichung nach $\underline{I}_1$ auflösen:
$\underline{I}_1 = \frac{j\omega L_2}{j\omega M}\underline{I}_K = \frac{L_2}{M}\underline{I}_K$

und in erste Gleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} \underline{U}_0 &= (R_i + j\omega L_1)\frac{L_2}{M}\underline{I}_K - j\omega M \underline{I}_K \\ \underline{I}_K &= \frac{\underline{U}_0}{(R_i + j\omega L_1)\frac{L_2}{M} - j\omega M} \end{aligned}$$

mit $M = \sqrt{L_1 L_2}$ folgt:

$$\begin{aligned} \underline{I}_K &= \frac{\underline{U}_0}{R_i \frac{L_2}{\sqrt{L_1 L_2}} + j\omega L_1 \frac{L_2}{\sqrt{L_1 L_2}} - j\omega\sqrt{L_1 L_2}} \\ &= \frac{\underline{U}_0}{R_i\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} + j\omega\sqrt{L_1 L_2} - j\omega\sqrt{L_1 L_2}} \\ &= \frac{\underline{U}_0}{R_i\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}} \end{aligned}$$

(b) Sedundärer Leerlauf:
$\underline{I}_2 = 0$

$$\begin{aligned} \underline{U}_0 &= (R_i + j\omega L_1)\underline{I}_1 \\ \underline{U}_{a0} &= j\omega M \underline{I}_1 \end{aligned}$$

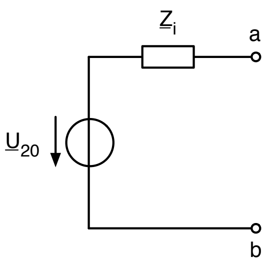
erste Gleichung in zweite einsetzen:

$$\underline{U}_{a0} = j\omega M \frac{\underline{U}_0}{R_i + j\omega L_1} = \frac{j\omega\sqrt{L_1 L_2}}{R_i + j\omega L_1}\underline{U}_0$$

(c) komplexe Innenimpedanz bzgl. a und b

$$\underline{Z}_i = \frac{\underline{U}_{a0}}{\underline{I}_K} = \frac{j\omega\sqrt{L_1 L_2}}{R_i + j\omega L_1}\underline{U}_0 \cdot \frac{R_i\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}}{\underline{U}_0} = \frac{j\omega R_i L_2}{R_i + j\omega L_1}$$

(d)



(e) Leistungsanpassung:

$$\underline{Z}_i = \underline{Z}_V^*$$
$$\underline{Z}_i = \frac{j\omega R_i L_2}{R_i + j\omega L_1}$$

mit $L_1 = 10mH$, $L_2 = 100mH$, $R_i = 2\Omega$, $f = 15.916Hz$ bzw.
$\omega = 2\pi f = 100s^{-1}$

$$\underline{Z}_i|_{f=15.916Hz} = \frac{j20\Omega}{2+j1} = (4+j8)\Omega$$
$$\underline{Z}_i|_{f=15.916Hz} = (4+j8)\Omega$$
$$\underline{Z}_V|_{f=15.916} = (4-j8)\Omega$$

aus $\underline{Z}_i = \underline{Z}_V^*$ mit $\underline{Z}_V = R_V + jX_V$ folgt durch Koeffizientenvergleich:
$R_V = 4\Omega$ und $X_V = -8\Omega$
Kondensator mit $\frac{1}{\omega C} = 8 \rightarrow C = \frac{1}{100 \cdot 8}F = 1.25mF$

(f) Wirkungsgrad der Schaltung:
Für $f = 15.916Hz$ bzw. $\omega = 100s^{-1}$

$$S_V = \underline{U}_V \underline{I}_V^* = \underline{Z}_V \underline{I}_V \underline{I}_V^* = \underline{Z}_V |\underline{I}_V|^2$$
$$P_V = Re\{S_V\} = 4|\underline{I}_V|^2 \cdot \Omega$$
$$S_{ges} = \underline{U}_{a0} \underline{I}_V^* = (\underline{Z}_i \| \underline{Z}_V) \underline{I}_V \underline{I}_V^* = (\underline{Z}_i + \underline{Z}_V)|\underline{I}_V|^2$$
$$P_{ges} = Re\{S_{ges}\} = Re\{\underline{Z}_i + \underline{Z}_V\}|\underline{I}_V|^2 = 8|\underline{I}_V|^2 \cdot \Omega$$
$$\eta = \frac{P_V}{P_{ges}} = \frac{4|\underline{I}_V|^2}{8|\underline{I}_V|^2} = \frac{1}{2}$$

(wie üblich bei Leistungsanpassung!)