Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel
Tel: 0721 608-42650
Olaf.Doessel@kit.edu

Übungsleiter: Dipl.-Ing. G. Lenis
Tel: 0721 608-45478
Gustavo.Lenis@kit.edu

Übungsblatt Nr. 3: Operationsverstärker

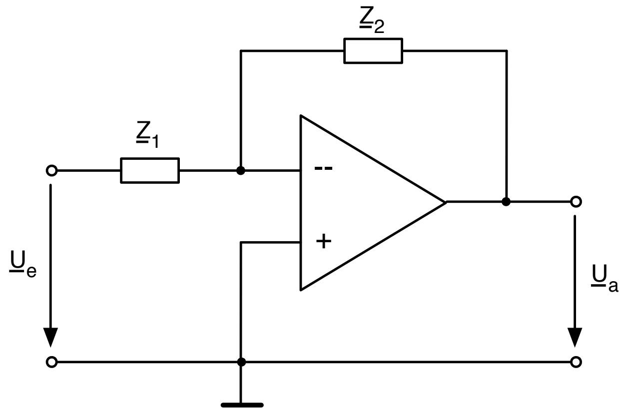
Einige der folgenden Aufgaben entstammen alten Klausuren. Darin kommen zum Teil komplexe Zahlen vor. Die komplexen Zahlen werden in der Vorlesung in Kapitel 4 eingeführt und im dritten Tutorium ausführlich behandelt. Um dieses Übungsblatt zu lösen, ist kein tiefergehendes Wissen über die komplexen Zahlen notwendig.

Empfohlen für die Übung:	Aufgaben 11, 13
Empfohlen für Zuhause:	Aufgaben 12, 14

Die für die Übung empfohlenen Aufgaben dienen als Orientierung und sollen eine grobe Richtlinie darstellen, welche Aufgaben vom Umfang und Schwierigkeitsgrad her in der Zeit der Übung zu schaffen sind.
Letztendlich entscheidet der Übungsleiter, welche Aufgaben in der Übung behandelt werden.
Zusätzlich wird empfohlen, die nicht in der Übung behandelten Aufgaben zu Hause zu bearbeiten.

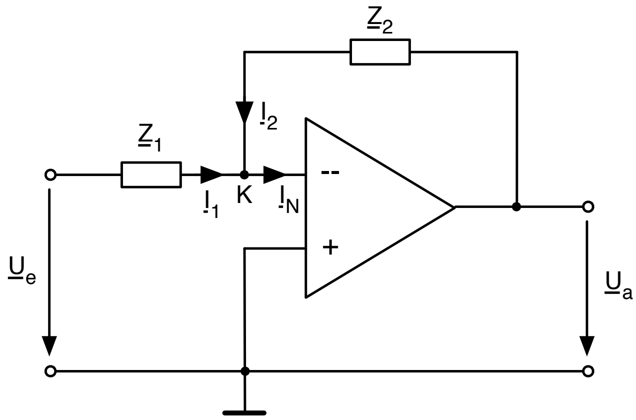
Aufgabe 11

Gegeben ist folgende Operationsverstärkerschaltung (idealer OP):



Leiten Sie das Spannungsverhältnis $\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}$ her. Verwenden Sie $\underline{Z}$ so, als sei es ein Widerstand.

Lösung:



Wegen $\underline{I}_N = 0$ (in einen idealen OP fliesst kein Strom) gilt $\underline{I}_1 = -\underline{I}_2$. Formuliert man diese Bedingung mit Spannungen und Widerständen:

$$\frac{\underline{U}_e - \underline{U}_n}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_a - \underline{U}_n}{\underline{Z}_2} = 0$$

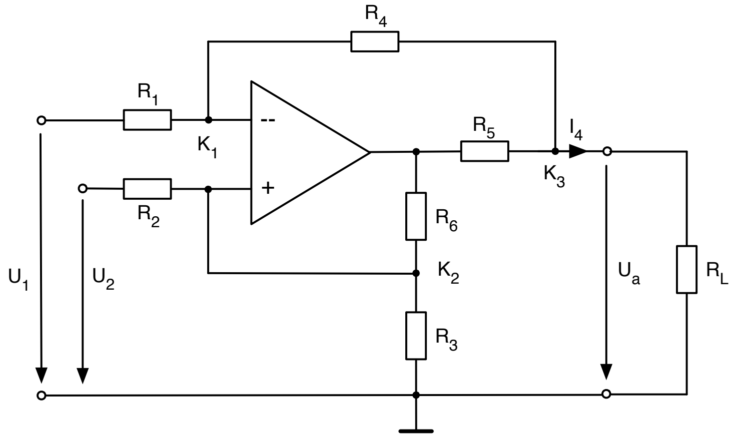
$\underline{U}_P = 0$, wegen $\underline{U}_D = 0$ (idealer OP) folgt, dass auch $\underline{U}_N = 0$ ist. Die obige Formel vereinfacht sich dadurch zu

$$\begin{aligned} \frac{\underline{U}_e}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_2} &= 0 \\ \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_2} &= -\frac{\underline{U}_e}{\underline{Z}_1} \\ \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} &= -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \end{aligned}$$

Es handelt sich hierbei um eine der klassischen Grundschaltungen, die mit OPs realisiert werden: den invertierenden Verstärker.

Aufgabe 12

Betrachtet wird die folgende Operationsverstärker-Schaltung, bestehend aus einem idealen Operationsverstärker und den Widerständen R_1 und R_6 und R_L.



Hinweis : Gehen Sie in allen Operationsversärker-Aufgaben dieser Vorlesung von vorherrschender Gegenkopplung aus.

(a) Die Schaltung ist nicht belastet ($R_L \to \infty$). Für die Widerstände R_5 und R_6 gilt:
$R_5 = 0\Omega$, $R_6 \to \infty$. Berechnen Sie für die entstehende Schaltung die Ausgangsspannung $U_a = f(U_1, U_2)$ als Funktion der beiden Eingangsspannungen U_1 und U_2.

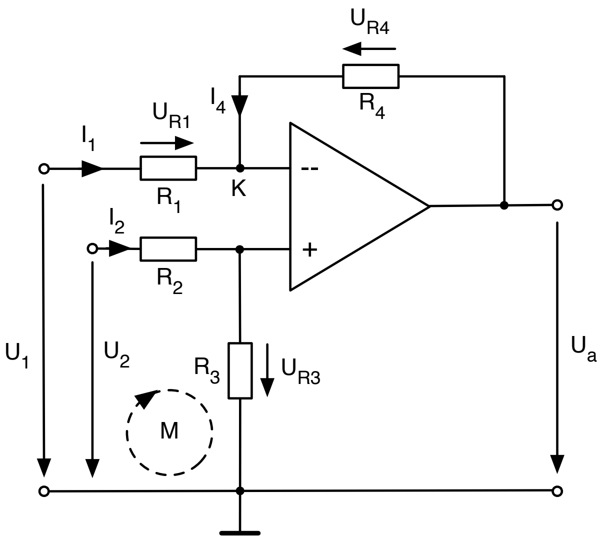
(b) Finden Sie eine Bedingung für die Widerstände R_1, R_2, R_3 und R_4 so, dass die Ausgangsspannung $U_a = f(U_1, U_2)$ aus Aufgabenteil a) nur die Differenz der Eingangsspannungen verstärkt (Beweis).
Wie sieht dann die Ausgangsspannung $U_a = f(U_1, U_2)$ aus?

(c) Nun ist R_6 endlich und R_5 von Null verschieden, es gilt $R_1 = R_4 = R_6$ und $R_2 = R_3$, U_2 wird mit Masse verbunden. Aus dieser Schaltung soll eine Konstantstromquelle entstehen, d.h. der Ausgangsstrom $I_a = f(U_1, U_a)$ soll unabhängig von der Ausgangsspannung sein.
Berechnen Sie zunächst den Ausgangsstrom $I_a = f(U_1, U_a)$ bei angeschlossener Last R_L.
Wie muss nun R_2 gewählt werden, damit eine Konstantstromquelle vorliegt?

Hinweis : Betrachten Sie die Knoten K_1, K_2, und K_3, bestimmen Sie die Ströme und finden Sie dadurch $I_a = f(U_1, U_a)$.

Lösung:

(a) Ausgangsspannung U_a berechnen:



Betrachtet wird der Knoten $K : I_1 + I_4 = 0$
Da ein idealer OP vorliegt, hat man am invertierenden und nichtinvertierenden Eingang dasselbe Potential U_{R3}.
Somit gelten folgende Beziehungen: $I_1 = \frac{U_{R1}}{R_1} = \frac{U_1 - U_{R3}}{R_1}$ und $I_4 = \frac{U_{R4}}{R_4} = \frac{U_a - U_{R3}}{R_4}$.
Aus der Spannungsteilerregel (in Masche M) kann man U_3 berechnen: $U_3 = U_2 \frac{R_3}{R_2+R_3}$

Eingesetzt in die Knotengleichung liefert dies:

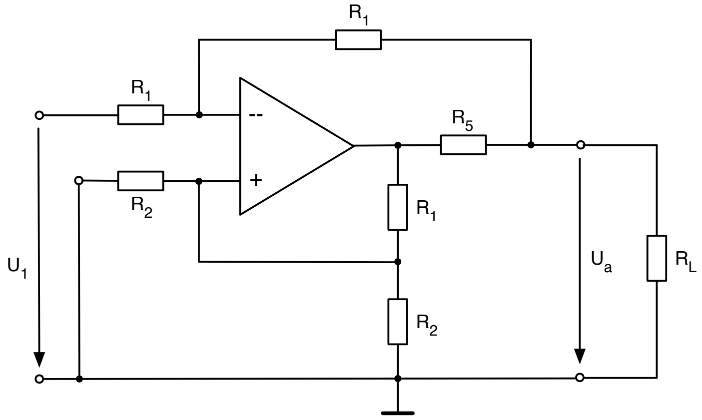
$$
\begin{aligned}
0 &= I_1 + I_4 = \frac{U_1 - U_{R_3}}{R_1} + \frac{U_a - U_{R_3}}{R_4} \\
&= \frac{U_1}{R_1} - \frac{U_2 \frac{R_3}{R_2+R_3}}{R_1} + \frac{U_a}{R_4} - \frac{U_2 \frac{R_3}{R_2+R_3}}{R_4} \\
&= \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_a}{R_4} - \frac{U_2 R_3}{R_1(R_2+R_3)} - \frac{U_2 R_3}{R_4(R_2+R_3)} \\
&= \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_a}{R_4} - U_2 \left(\frac{R_3}{R_1(R_2+R_3)} \cdot \frac{R_4}{R_4} + \frac{R_3}{R_4(R_2+R_3)} \cdot \frac{R_1}{R_1} \right) \\
&= \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_a}{R_4} - U_2 \left(\frac{R_3(R_1+R_4)}{R_1 R_4 (R_2+R_3)} \right) \\
\Longleftrightarrow \quad \frac{U_a}{R_4} &= U_2 \left(\frac{R_3(R_1+R_4)}{R_1 R_4 (R_2+R_3)} \right) - \frac{U_1}{R_1} \\
U_a &= U_2 \left(\frac{R_3(R_1+R_4)}{R_1 (R_2+R_3)} \right) - R_4 \frac{U_1}{R_1} \\
&= U_2 \left(\frac{R_3(R_1+R_4)}{R_1 (R_2+R_3)} \right) - U_1 \frac{R_4}{R_1}
\end{aligned}
$$

(b) Differenzverstärkung liegt vor, wenn die Koeffizienten bei U_a vor den Spannungen U_1 und U_2 gleich sind.

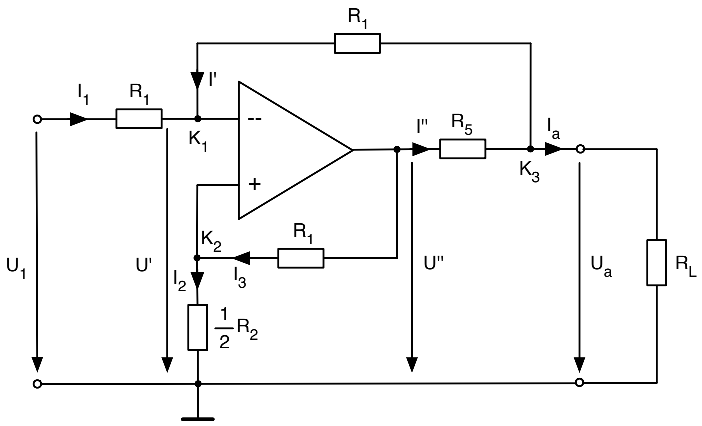
$$\frac{R_3(R_1+R_4)}{R_1(R_2+R_3)} = \frac{R_4}{R_1}$$
$$R_3(R_1+R_4) = R_4(R_2+R_3)$$
$$R_3R_1+R_3R_4 = R_4R_2+R_4R_3$$
$$\frac{R_4}{R_1} = \frac{R_3}{R_2}$$

Die Spannung U_a hat dann folgende Gestalt:
$U_a = U_2\frac{R_4}{R_1} - U_1\frac{R_4}{R_1} = \frac{R_4}{R_1}(U_2-U_1) = \frac{R_3}{R_2}(U_2-U_1)$

(c) Jetzt ist R_6 endlich und R_5 von Null verschieden, $R_4 = R_6 = R_1$ und $R_3 = R_2$, U_2 wird mit Masse verbunden. Damit wird die Schaltung zu:



Die beiden parallelen R_2 können zusammengefasst werden:
$R_2\|R_2 = \frac{R_2R_2}{R_2+R_2} = \frac{1}{2}R_2$



In dem sich so ergebenden Bild wurden noch die Spannung U' und U'' hinzugefügt. Betrachtet werden nun die Knoten K_1, K_2 undK_3.

$$K_1 : I_1 + I' = 0 \iff \frac{U_1 - U'}{R_1} + \frac{U_a - U'}{R_1} = 0$$
$$K_2 : I_2 = I_3 \iff \frac{U'}{\frac{1}{2}R_2} = \frac{U'' - U'}{R_1}$$
$$K_3 : I'' = I' + I_a \iff \frac{U'' - U_a}{R_5} = \frac{U_a - U'}{R_1} + I_a$$

Um den Ausgagnsstrom zu berechnen, fehlen die Ströme I' und $I''(K_3)$ bzw. die Spannungen U' und U''. Die Spannung U' kann mit K_1 bestimmt werden,

$$\begin{aligned}
\frac{U_1 - U'}{R_1} + \frac{U_a - U'}{R_1} &= 0 \\
U_1 - U' + U_a - U' &= 0 \\
U' &= \frac{1}{2}(U_1 + U_a)
\end{aligned}$$

U'' dann mit Hilfe von K_2:

$$\begin{aligned}
\frac{U'}{\frac{1}{2}R_2} &= \frac{U'' - U'}{R_1} \\
\frac{U''}{R_1} &= \frac{2U'}{R_2} + \frac{U'}{R_1} = U'\left(\frac{2}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) \\
U'' &= U'\left(\frac{2R_1}{R_2} + 1\right) \overset{U' = \frac{1}{2}(U_1 + U_a)}{=} \frac{1}{2}(U_1 + U_a)\left(\frac{2R_1}{R_2} + 1\right)
\end{aligned}$$

Diese beiden Spannungen kann man nun in K_3 einsetzen und erhält so einen Ausdruck für I_a:

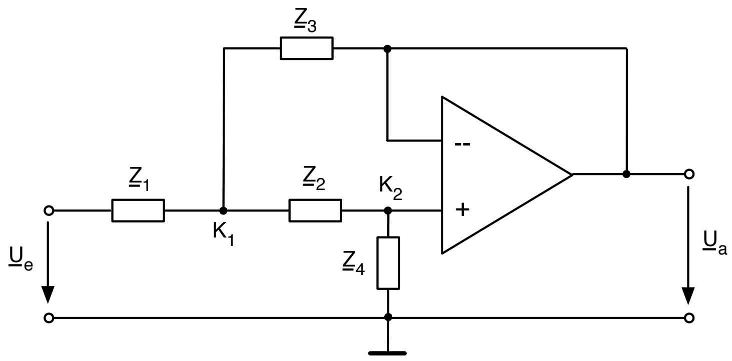
$$\begin{aligned}
\frac{U'' - U_a}{R_5} &= \frac{U_a - U'}{R_1} + I_a \\
I_a &= \frac{U'' - U_a}{R_5} - \frac{U_a - U'}{R_1} \\
&= \frac{\frac{1}{2}(U_1 + U_a)\left(\frac{2R_1}{R_2} + 1\right) - U_a}{R_5} - \frac{U_a - \frac{1}{2}(U_1 + U_a)}{R_1} \\
&= \frac{1}{2R_5}(U_1 + U_a)\left(\frac{2R_1}{R_2} + 1\right) - \frac{U_a}{R_5} - \frac{U_a}{R_1} + \frac{1}{2R_1}(U_1 + U_a) \\
&= U_1\left[\frac{1}{2R_5}\left(\frac{2R_1}{R_2} + 1\right) + \frac{1}{2R_1}\right] \\
&+ U_a\left[\frac{1}{2R_5}\left(\frac{2R_1}{R_2} + 1\right) - \frac{1}{R_5} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2R_1}\right] \\
&= U_1\left(\frac{R_1}{R_2R_5} + \frac{1}{2R_5} + \frac{1}{2R_1}\right) \\
&+ U_a\left(\frac{R_1}{R_2R_5} + \frac{1}{2R_5} - \frac{1}{R_5} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2R_1}\right) \\
&= U_1\left(\frac{2R_1^2 + R_1R_2 + R_2R_5}{2R_1R_2R_5}\right) + U_a\left(\frac{2R_1^2 - R_1R_2 - R_2R_5}{2R_1R_2R_5}\right) \\
&= U_1\left(\frac{2R_1^2 + R_2(R_1 + R_5)}{2R_1R_2R_5}\right) + U_a\left(\frac{2R_1^2 - R_2(R_1 + R_5)}{2R_1R_2R_5}\right)
\end{aligned}$$

Um eine Konstantstromquelle zu beschreiben, muss der Ausgangsstrom unabhängig von der Ausgangsspannung werden. Dies ist dann der Fall, wenn der Ausdruck neben U_a zu Null wird.

$$
\begin{aligned}
\frac{2R_1^2 - R_2(R_1+R_5)}{2R_1R_2R_5} &\stackrel{!}{=} 0 \\
\Longleftrightarrow\ 2R_1^2 - R_2(R_1+R_5) &= 0 \\
R_2 &= \frac{2R_1^2}{R_1+R_5}
\end{aligned}
$$

eingesetzt in den obigen Ausdruck für $I_a : I_a = U_1\left(\frac{R_1+R_5}{R_1R_5}\right) = \frac{U_a}{R_L}$ bzw. $U_a = I_aR_L$.

Aufgabe 13



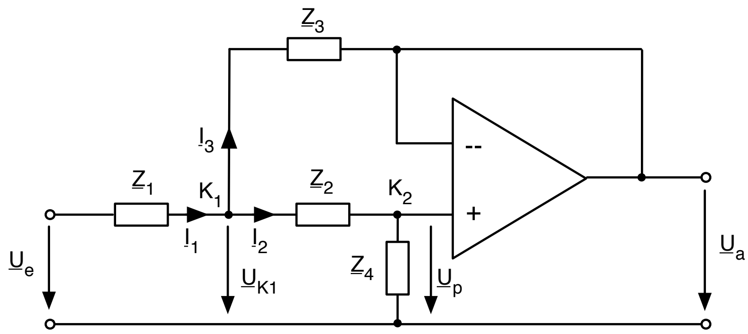
(a) Berechnen Sie das Spannungsverhältnis $\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}$ in Abhängigkeit von $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$ und $\underline{Z}_4$.
Verwenden Sie $\underline{Z}$ so, als sei es ein Widerstand.
($Hinweis$: Stellen Sie die Knotengleichungen für K_1 und K_2 auf.)

Im folgenden sind $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$ und $\underline{Z}_4$ durch folgende Bauteile bestimmt: $R_1 = 33k\Omega$, $R_2 = 1k\Omega$, $C_3 = 10nF$ und $C_4 = 22nF$. Dabei gilt $\underline{Z}_1 = R_1$, $\underline{Z}_2 = R_2$, $\underline{Z}_3 = \frac{1}{j\omega C_3}$ und $\underline{Z}_4 = \frac{1}{j\omega C_4}$.

(b) Setzen Sie die Bauteilwerte in das Spannungsverhältnis $\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}$ ein. Vereinfachen Sie das Verhältnis, wenn die Frequenz im Bereich $f \in [10; 500]Hz$ bleiben soll. Beachten Sie dabei den Zusammenhang $\omega = 2\pi f$.

Lösung:

(a)



$$K1 \quad : \frac{\underline{U}_e - \underline{U}_{K_1}}{\underline{Z}_1} - \frac{\underline{U}_{K_1} - \underline{U}_a}{\underline{Z}_3} - \frac{\underline{U}_{K_1} - \underline{U}_a}{\underline{Z}_2} = 0$$

$$K2 \quad : \frac{\underline{U}_{K_1} - \underline{U}_{K_2}}{\underline{Z}_2} - \frac{\underline{U}_{K_2}}{\underline{Z}_2} = 0$$

$$\underline{U}_d \quad = 0 \Rightarrow \underline{U}_{K_2} = \underline{U}_p = \underline{U}_n = \underline{U}_a$$

$$
\begin{aligned}
K_2: \frac{\underline{U}_{K_1}-\underline{U}_a}{\underline{Z}_2}-\frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_4} &= 0\\
\frac{\underline{U}_{K_1}-\underline{U}_a}{\underline{Z}_2}-\frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_4} &= 0\\
\frac{\underline{U}_{K_1}}{\underline{Z}_2} &= \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_2}+\frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_4}\\
\underline{U}_{K_1} &= \left(1+\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_4}\right)\underline{U}_a
\end{aligned}
$$

$$
K_1: \frac{\underline{U}_e}{\underline{Z}_1}+\underline{U}_{K_1}\left(-\frac{1}{\underline{Z}_1}-\frac{1}{\underline{Z}_3}-\frac{1}{\underline{Z}_2}\right)+\underline{U}_a\left(\frac{1}{\underline{Z}_3}+\frac{1}{\underline{Z}_2}\right)=0
$$

$$
\frac{\underline{U}_e}{\underline{Z}_1}+\left[\left(1+\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_4}\right)\left(-\frac{1}{\underline{Z}_1}-\frac{1}{\underline{Z}_3}-\frac{1}{\underline{Z}_2}\right)+\frac{1}{\underline{Z}_3}+\frac{1}{\underline{Z}_2}\right]\underline{U}_a=0
$$

$$
\frac{\underline{U}_e}{\underline{Z}_1}+\left[-\frac{1}{\underline{Z}_1}-\frac{1}{\underline{Z}_3}-\frac{1}{\underline{Z}_2}-\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_4\underline{Z}_1}-\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_4\underline{Z}_3}-\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_4\underline{Z}_2}+\frac{1}{\underline{Z}_3}+\frac{1}{\underline{Z}_2}\right]\underline{U}_a=0
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\underline{U}_e}{\underline{Z}_1} &= \underline{U}_a\left[\frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_4\underline{Z}_1}+\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_4\underline{Z}_3}+\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_4\underline{Z}_2}\right]\\
\frac{\underline{U}_e}{\underline{U}_a} &= 1+\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_4}+\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_4}\left(\frac{1}{\underline{Z}_3}+\frac{1}{\underline{Z}_2}\right)\\
\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} &= \frac{1}{1+\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_4}+\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_4}\left(\frac{1}{\underline{Z}_3}+\frac{1}{\underline{Z}_2}\right)}
\end{aligned}
$$

(b) Das Einsetzen der gegebenen Impedanzen liefert die folgende Übertragungsfunktion:

$$
\begin{aligned}
\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} &= \frac{1}{1+\frac{R_2}{\frac{1}{j\omega C_4}}+\frac{R_1R_2}{\frac{1}{j\omega C_4}}\left(\frac{1}{\frac{1}{j\omega C_3}}+\frac{1}{R_2}\right)}\\
&= \frac{1}{1+j\omega C_4R_2+j\omega C_4R_1R_2\left(j\omega C_3+\frac{1}{R_2}\right)}\\
&= \frac{1}{1-\omega^2C_3C_4R_1R_2+j\omega C_4(R_1+R_2)}
\end{aligned}
$$

Für die gegebenen Bauteilwerte:
$C_4 = 22nF, C_3 = 10nF, R_1 = 33k\Omega, R_2 = 1k\Omega$

und den gewählten Frequenzbereich befindet sich das Produkt $\omega^2C_3C_4R_1R_2$ im folgenden Intervall:

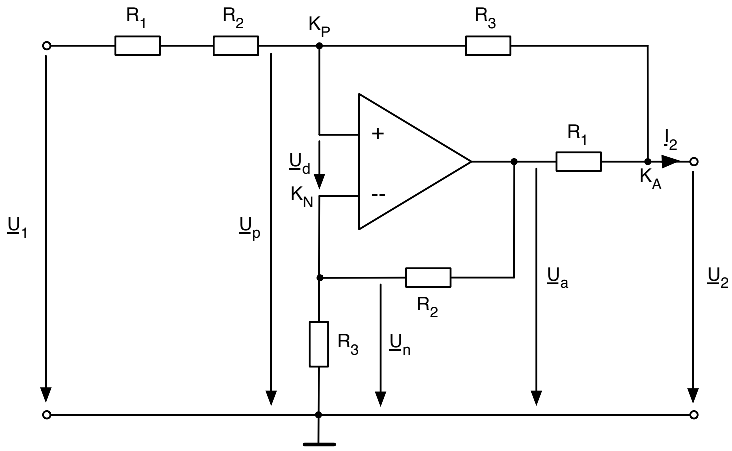
$\omega^2C_3C_4R_1R_2 \in [2.866\cdot 10^{-5}\ ;\ 7.165\cdot 10^{-2}]$,

was gegenüber die anderen Terme im Nenner der Übertragungsfunktion vernachlässigbar klein ist. Dadurch reduziert sich die Übertragungsfunktion auf:

$$
\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} \approx \frac{1}{1+j\omega C_4(R_1+R_2)}
$$

Aufgabe 14

Folgende ideale Operationsverstärkerschaltung sei gegeben:



(a) Beschreiben Sie, ausgehend von den Knotengleichungen an den Knoten K_P, K_N und K_A, die Abhängigkeit von $\underline{I}_2$ als Funktion von $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$. Nehmen Sie an, dass der Ausgang belastet sei.

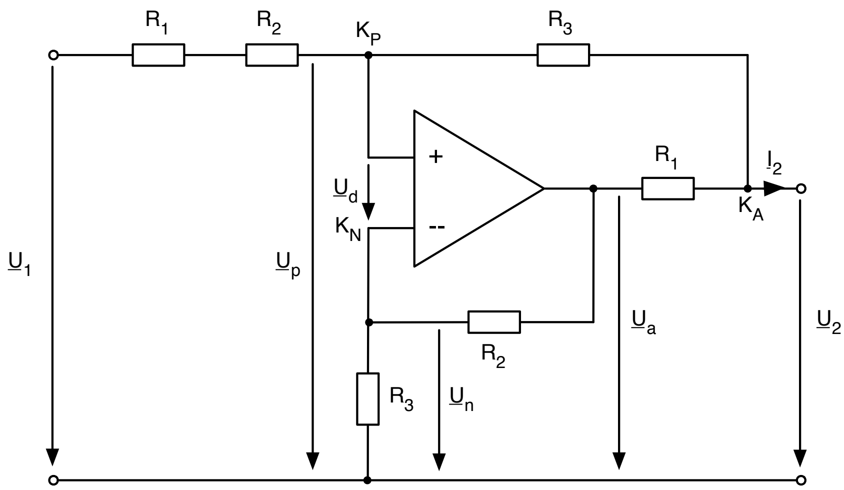
(b) Welche Bedingung muss gelten, damit $\underline{I}_2$ unabhängig von $\underline{U}_2$ wird?

(c) Nun gelte $\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_2(\underline{Z}_2 - \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}$. Der Ausgang sei dabei nicht belastet. Ausserdem gilt $\underline{Z}_2 \neq \underline{Z}_3 \neq \underline{Z}_1$. Bestimmen Sie das Verhältnis $\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$.

(d) Es sei nun $\underline{Z}_1 = j\Omega$, $\underline{Z}_2 = -j11\Omega$, $\underline{Z}_3 = (1-j)\Omega$. Berechnen Sie nun $\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$.

Lösung:

(a)



$$
\begin{aligned}
K_P : \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_p}{R_1 + R_2} + \frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_p}{R_3} &= 0 \\
K_N : \frac{\underline{U}_a - \underline{U}_n}{R_2} - \frac{\underline{U}_n}{R_3} &= 0 \\
K_A : \frac{\underline{U}_a - \underline{U}_2}{R_1} + \frac{\underline{U}_p - \underline{U}_2}{R_3} - \underline{I}_2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\text{Mit} \quad \underline{U}_n = \underline{U}_p = \underline{U} :
$$

$$
K_A \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_a}{R_1} - \frac{\underline{U}_2}{R_1} + \frac{\underline{U}}{R_3} - \frac{\underline{U}_2}{R_3} \qquad \underline{U}_a = \underline{U} + \frac{R_2}{R_3}\underline{U}
$$

$\underline{U}_a$ in K_A einsetzen:

$$
\begin{aligned}
\underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}}{R_1} + \frac{R_2}{R_1 R_3}\underline{U} - \frac{\underline{U}_2}{R_1} + \frac{\underline{U}}{R_3} - \frac{\underline{U}_2}{R_3} \\
&= \underline{U}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{R_2}{R_1 R_3} + \frac{1}{R_3}\right) - \frac{\underline{U}_2}{R_3} - \frac{\underline{U}_2}{R_1}
\end{aligned}
$$

Aus K_P bekommt man:

$$
\begin{aligned}
\frac{R_3(\underline{U}_1 + \underline{U}) + (R_1 + R_2)(\underline{U}_2 - \underline{U})}{(R_1 + R_2)R_3} &= 0 \\
R_3\underline{U}_1 - R_3\underline{U} + (R_1 + R_2)\underline{U}_2 - (R_1 + R_2)\underline{U} &= 0 \\
\underline{U}(R_1 + R_2 + R_3) &= R_3\underline{U}_1 + (R_1 + R_2)\underline{U}_2 \\
\underline{U} &= \frac{R_3\underline{U}_1 + (R_1 + R_2)\underline{U}_2}{R_1 + R_2 + R_3}
\end{aligned}
$$

$\underline{U}$ in K_A einsetzen:

$$
\begin{aligned}
\underline{I}_2 &= \left(\frac{R_3\underline{U}_1 + (R_1 + R_2)\underline{U}_2}{R_1 + R_2 + R_3}\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{R_2}{R_1 R_3} + \frac{1}{R_3}\right) - \frac{\underline{U}_2}{R_3} - \frac{\underline{U}_2}{R_1} \\
&= \left(\frac{R_3\underline{U}_1 + (R_1 + R_2)\underline{U}_2}{R_1 + R_2 + R_3}\right)\left(\frac{R_3 + R_2 + R_1}{R_1 R_3}\right) - \frac{\underline{U}_2}{R_3} - \frac{\underline{U}_2}{R_1} \\
&= \frac{R_3\underline{U}_1}{R_1 R_3} + \frac{(R_1 + R_2)\underline{U}_2}{R_1 R_3} - \frac{\underline{U}_2}{R_3} - \frac{\underline{U}_2}{R_1} \\
&= \frac{\underline{U}_1}{R_1} + \underline{U}_2\frac{R_1 + R_2 - R_1 - R_3}{R_1 R_3} \\
&= \frac{\underline{U}_1}{R_1} + \underline{U}_2\frac{R_2 - R_3}{R_1 R_3}
\end{aligned}
$$

(b) Die gefordete Unabhängigkeit wird erfüllt, wenn $R_2 = R_3$, d.h. der Term neben $\underline{U}_2$ wird zu Null.
$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{R}_1}$

(c) Für den unbelasteten Fall wird der Strom $\underline{I}_2$ zu Null.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} + \underline{U}_2 \left(\frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3} \right) \\
\underline{U}_2 \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3} &= -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} \\
\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} &= -\frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2 - \underline{Z}_3)} = -\frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_3}
\end{aligned}$$

(d) Das Einsetzen der vorgegebenen Werte in die Gleichung aus c) ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} &= -\frac{(1-j)\Omega}{(-j11\Omega) - (1-j)\Omega} \\
&= -\frac{1-j}{-j11 - 1 + j} = \frac{1-j}{1+j10} = \frac{-9}{101} + j\frac{-11}{101}
\end{aligned}$$