Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel
Tel: 0721 608-42650
Olaf.Doessel@kit.edu

Übungsleiter: Dipl.-Ing. G. Lenis
Tel: 0721 608-45478
Gustavo.Lenis@kit.edu

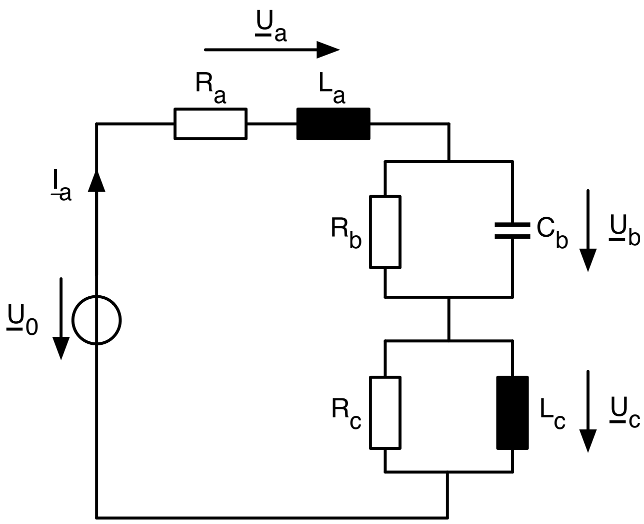
Übungsblatt Nr. 5: Zeigerdiagramme, Ortskurven

Empfohlen für die Übung: Aufgaben 19, 20, 22
Empfohlen für Zuhause: Aufgabe 21

Die für die Übung empfohlenen Aufgaben dienen als Orientierung und sollen eine grobe Richtlinie darstellen, welche Aufgaben vom Umfang und Schwierigkeitsgrad her in der Zeit der Übung zu schaffen sind.
Letztendlich entscheidet der Übungsleiter, welche Aufgaben in der Übung behandelt werden.
Zusätzlich wird empfohlen, die nicht in der Übung behandelten Aufgaben zu Hause zu bearbeiten.

Aufgabe 19

Gegeben sei folgendes Netzwerk:



Für die Schaltung gilt Folgendes:

- $\omega = 1000 s^{-1}$
- $R_a = 2\Omega$
- $L_a = 2mH$
- $R_b = ?$
- $C_b = 140\mu F$
- $R_c = 20\Omega$
- $L_c = 10mH$

(a) Berechnen Sie $\underline{Z}_a$ und $\underline{Z}_c$.

(b) Nun sei $\underline{U}_a = 4\sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{j(\frac{3\pi}{4})} V$. Geben Sie $\underline{I}_a$ und $\underline{U}_{L_a}$ in der kartesischen und in der Eulerschen Darstellung.

(c) Bestimmen Sie $\underline{U}_c$ in der kartesischen Darstellung.

(d) Für die Gesamtschaltung ergibt sich eine Spannung $\underline{U}_0 = (-6 + j14)V$. Ermitteln Sie **grafisch** $\underline{U}_b$. Verwenden Sie dabei folgende die Skala:
Im{$\underline{\text{U}}$}: 1cm$\hat{=}$4V
Re{$\underline{\text{U}}$}: 1cm$\hat{=}$4V

(e) Bestimmen Sie rechnerisch $\underline{I}_{R_b}$ und den Wert des Widerstandes R_b, verwenden Sie dabei das Ergebnis aus d).

(f) Bestimmen Sie die von der Quelle abgegebene komplexe Leistung $\underline{S}$. Können Sie anhand von $\underline{S}$ sagen, ob die Schaltung eher induktives oder eher kapazitives Verhalten hat.
Hinweis: Spannungen und Ströme sind Effektivwerte.

Lösung:

(a) Für die Impedanzen gilt:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_a &= R_a + j\omega L_a = (2 + j2)\Omega \\ \underline{Z}_c &= \frac{R_c \cdot j\omega L_c}{R_c + j\omega L_c} = \frac{(20)(j10)}{20 + j10}\Omega = (4 + j8)\Omega\end{aligned}$$

(b) Für die kartesische Darstellung der Spannung $\underline{U}_a$ gilt:

$$\begin{aligned}\underline{U}_a &= 4\sqrt{2}\left(cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + j\,sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) \\ &= 4\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (-4 + j4)\,V\end{aligned}$$

Für den Strom $\underline{I}_a$ gilt:

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_a} = \frac{4\sqrt{2}e^{j\left(\frac{3\pi}{4}\right)}}{(2 + j2)}A$$

kartesische Darstellung:

$$\begin{aligned}\underline{I}_a &= \frac{(-4 + j4)}{(2 + j2)}A \\ &= \frac{(-4 + j4)(2 - j2)}{8}A = 2jA\end{aligned}$$

eulersche Darstellung:

$$\begin{aligned}\underline{I}_a &= \frac{4\sqrt{2} \cdot e^{j\left(\frac{3\pi}{4}\right)}}{8\sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}}A \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} \cdot e^{j\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)}A = 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}A\end{aligned}$$

Für die Spannung $\underline{U}_{L_a}$ gilt:

kartesische Darstellung:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{L_a} &= \underline{I}_a \cdot j\omega L_a \\ &= (j2A)(j2\Omega) \\ &= -4V\end{aligned}$$

eulersche Darstellung:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{L_a} &= \left(2\cdot \mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}}A\right)\left(2\cdot \mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}}\Omega\right)\\ &= 4\cdot \mathrm{e}^{j\pi}V\end{aligned}$$

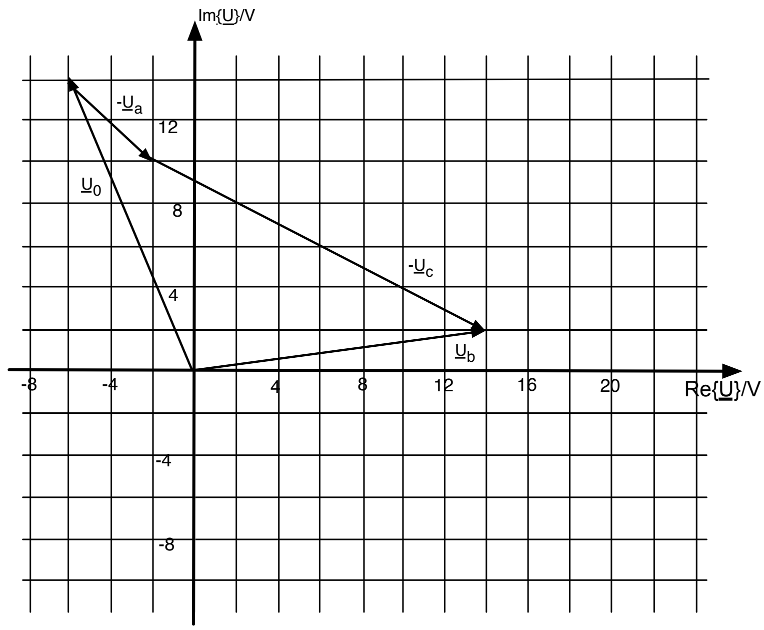
(c) Für die Spannung $\underline{U}_c$ gilt:

$$\begin{aligned}\underline{U}_c &= \underline{I}_a\cdot\underline{Z}_c\\ &= (j2A)\cdot(4+j8)\Omega\\ \underline{U}_c &= (-16+j8)V\end{aligned}$$

(d) Für die Spannung $\underline{U}_b$ gilt Folgendes:

$$\begin{aligned}\underline{U}_b &= \underline{U}_b-\underline{U}_a-\underline{U}_c\\ \underline{U}_b &= \underline{U}_0+(-\underline{U}_a)+(-\underline{U}_c)\end{aligned}$$

Graphisch lässt sich diese Gleichung folgendermaßen darstellen:



$$\underline{U}_b = (14+j2)V$$

(e) Für den Strom $\underline{I}_{R_b}$ gilt:

$$\begin{aligned}\underline{I}_{R_b} &= \underline{I}_a-\underline{I}_{cb}\\ &= \underline{I}_a-\underline{U}_b\cdot j\omega C_b\\ &= j2A-(14+j2)\cdot 0,14A\\ \underline{I}_{R_b} &= (280+j40)mA\\ \Rightarrow R_b &= \frac{\underline{U}_b}{\underline{I}_{R_b}}=\frac{(14+j2)V}{(280+j40)mA}=50\Omega\end{aligned}$$

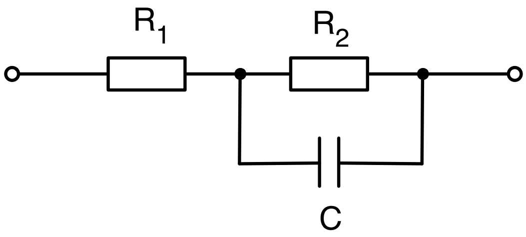
(f) Für die komplexe Leistung $\underline{S}$ gilt:

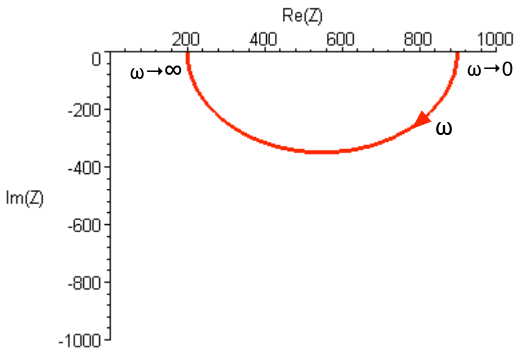
$$\begin{aligned}
\underline{S} &= \underline{U}_0 \cdot \underline{I}_a^* \\
&= (-6 + j14)V \cdot (j2A)^* \\
&= (28 + j12)VA
\end{aligned}$$

Da $Im\{\underline{S}\} = Q > 0$ ist, so hat die Schaltung induktives Verhalten.

Aufgabe 20

Gegeben ist folgende Schaltung und die dazugehörige Ortskurve.





(a) Bestimmen Sie R_1 und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

(b) Bestimmen Sie R_2 und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

(c) Bestimmen Sie die Gesamtimpedanz $\underline{Z}$ als Funktion von R_1, R_2, C und ω.

(d) Bei welcher Kreisfrequenz ist der Imaginärteil von $\underline{Z}$ betragsmäßig am größten? Geben Sie die Kreisfrequenz unter der Annahme, dass $C = 1\mu F$ ist, an.

Lösung:

(a) Für $\omega \to \infty$ wird der Kondensator zum Kurzschluss, als relevantes Bauteil bleibt also nur noch R_1 übrig. Dessen Wert kann aus dem Diagramm abgelesen werden:
$\underline{Z}(\omega \to \infty) = R_1 = 200\Omega$

(b) Für $\omega \to 0$ wir der Kondensator zu einem unendlich großen Widerstand für den Strom und kann somit vernachlässigt werden.
$\underline{Z}(\omega \to 0) = R_1 + R_2 = 200\Omega + R_2 = 900\Omega$
$\to R_2 = 700\Omega$

(c) Der Gesamtwiderstand in allgemeiner Form:

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= R_1 + (R_2 \| \underline{Z}_C) \\
&= R_1 + \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega C R_2} \\
&= R_1 + \frac{R_2(1 - j\omega C R_2)}{(1 + j\omega C R_2)(1 - j\omega C R_2)} = R_1 + \frac{R_2 - j\omega C R_2^2}{1 + (\omega C R_2)^2}
\end{aligned}$$

(d) Der Imaginärteil kann der Lösung für c) entnommen werden:
$Im\{\underline{Z}\} = -\frac{\omega C R_2^2}{1+(\omega C R^2)^2}$
Maximum des Imaginärteils als Nullstelle der ersten Ableitung:

$$\begin{aligned}
\frac{dIm\{\underline{Z}\}}{d\omega} &= \frac{-(CR_2^2)[1 + (\omega C R_2^2)] - (-\omega C R_2^2)2\omega C^2 R_2^2}{[1 + (\omega C R_2)^2]^2} \\
&= \frac{-CR_2^2[1 + (\omega C R_2)^2 - 2(\omega C R_2)^2]}{[1 + (\omega C R_2)^2]^2} = \frac{-CR_2^2[1 - (\omega C R_2)^2]}{[1 + (\omega C R_2)^2]^2}
\end{aligned}$$

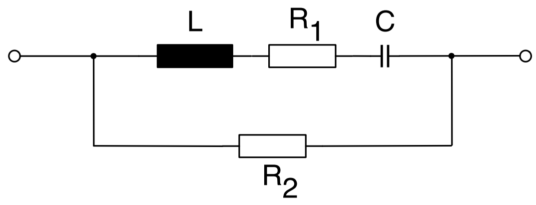
Zähler wird zun Null für:

$$\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} -CR_2^2[1 - (\omega C R_2)^2] \\
1 &= (\omega C R_2)^2 \\
1 &= \omega C R_2 \\
\omega &= \frac{1}{CR_2} \quad \text{bzw. } \omega = \frac{1}{1\mu F \cdot 700\Omega} \approx 1428.57 s^{-1}
\end{aligned}$$

(die negative Lösung der Wurzel wird verworfen, da Frequenzen immer positiv sind)

Alternative Lösung
Die Ortskurve ist ein Halbkreis. Somit wird $Im\{\underline{Z}\}$ am tiefsten Punkt des Halbkreises betragsmäßig am größten. Ablesen liefert für diesen Punkt einen $Re\{\underline{Z}\}$ von 550Ω. Setzt man den Realteil aus c) damit gleich und löst nach ω auf, liefert dies ebenfalls die gesuchte Kreisfrequenz.

Aufgabe 21



(a) Bestimmen Sie die Gesamtimpedanz $\underline{Z}$ und geben Sie $\underline{Z}$ nach Real- und Imaginärteil an. Bestimmen Sie auch die Resonanzkreisfrequenz ω_0.

(b) Zeichnen Sie die Ortskurve von $\underline{Z}$ mit $G_2 = 1/R_2 = 0S$. Beschriften Sie sie mit $\omega = \omega_0$, $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$.

(c) Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil 3.b), um die Ortskurve von $\underline{Y}$ mit $G_2 = 1/R_2 = 0S$ zu konstruieren (keine Rechnung!). Wie erhält man die Ortskurve von $\underline{Y}$ (ein Satz!)?
Beschriften Sie sie mit $\omega = \omega_0$, $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$.

(d) Wie verändert sich die Ortskurve von $\underline{Y}$, wenn $G_2 = 1/R_2 \neq 0S$? Geben Sie eine zeichnerische Lösung an.

Lösung:

(a) Gesamtimpedanz:

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \left(R_1 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) \| R_2 \\
&= \frac{\left(R_1 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right) R_2}{R_1 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) + R_2} \\
&= \frac{\left(R_1 R_2 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) R_2\right)\left((R_1+R_2) - j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)}{(R_1+R_2)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \\
&= \left(\frac{\left(R_2(R_1+R_2) + R_2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right)}{(R_1+R_2)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\right) \\
&+ j\left(\frac{R_2(R_1+R_2)\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) - R_1 R_2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{(R_1+R_2)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\right)
\end{aligned}$$

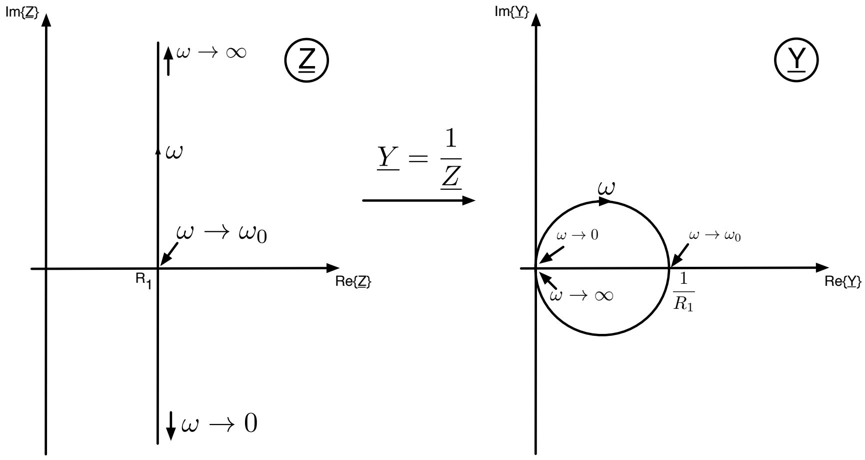
(b) Die Resonanzkreisfrequenz ω_0 ist gegeben, wenn $Im\{\underline{Z}\} = 0$

$$\frac{R_2(R_1+R_2)\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) - R_1 R_2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{(R_1+R_2)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = 0$$

Hieraus folgt:

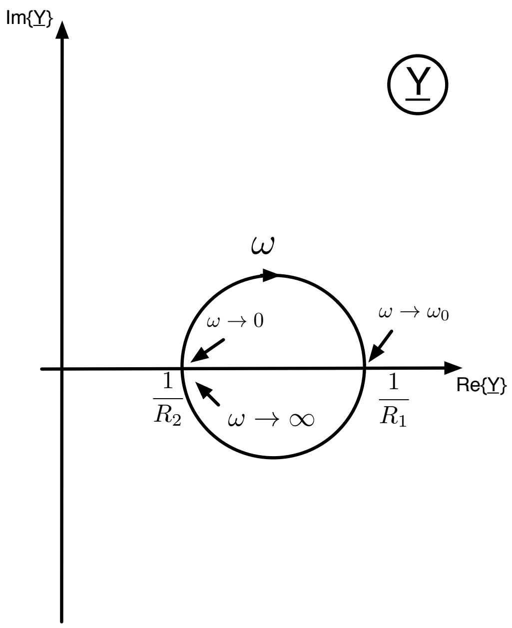
$$
\begin{aligned}
\rightarrow R_2(R_1+R_2)\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right) - R_1 R_2\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right) &= 0\\
\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right)\left(R_2(R_1+R_2) - R_1R_2\right) &= 0\\
\rightarrow \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} &= 0\\
\omega_0^2 &= \frac{1}{LC}\\
\omega &= \sqrt{\frac{1}{LC}}
\end{aligned}
$$

(c) Für die Ortskurve von $\underline{Z}$ und $\underline{Y}$ gilt:



Man muss eine Spiegelung am Einheitskreis durchführen.

(d) Die Parallelschaltung des Leitwertes $G_2 = 1/R_2 \neq 0S$ entspricht einer Verschiebung der vorliegenden Ortskurve um G_2 nach rechts. Dadurch ergibt sich die folgende Ortskurve:



Aufgabe 22

Gegeben seien die folgenden Ortskurven:

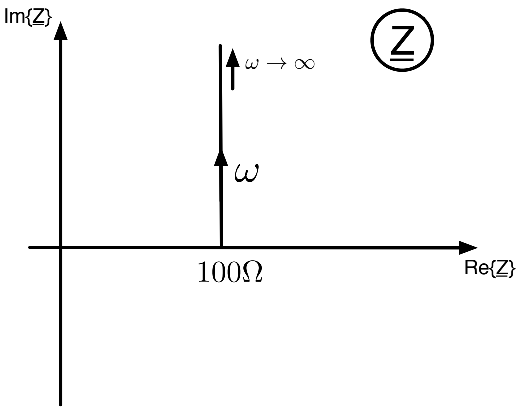


Fig. 1: Abb 4.1

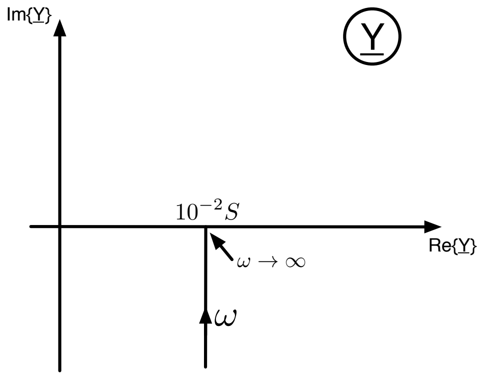


Fig. 2: Abb 4.2

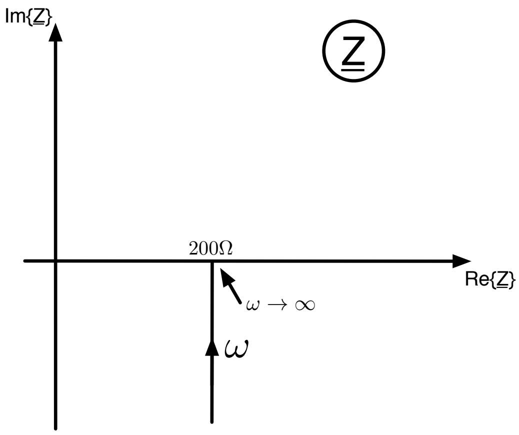


Fig. 3: Abb 4.3

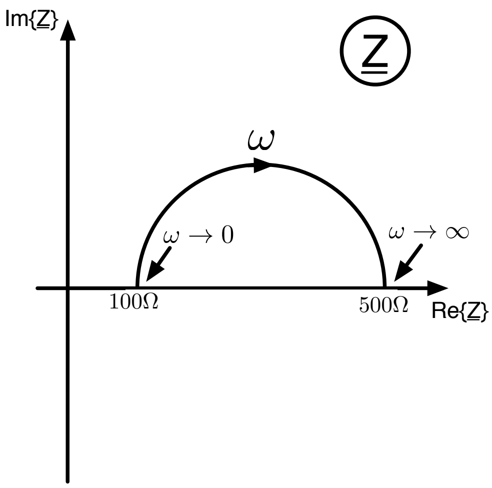


Fig. 4: Abb 4.4

(a) Zeichnen Sie für die Ortskurven in Abb. 4.1-4.4 jeweils eine passende Zweipol-Schaltung unter Verwendung von passiven Bauelementen. Geben Sie jeweils den mathematischen Ausdruck für $\underline{Z}$ an.

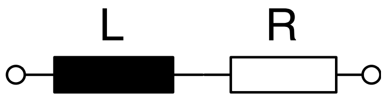
Im Folgenden gilt: $\omega = 10^4 s^{-1}$ und $\varphi_{ui} = \pi/4$ bzw. $\varphi_{ui} = -\pi/4$

(b) Geben Sie die Werte der Bauteile für die Ortskurve in Abb. 4.1-4.3 an.

Lösung:

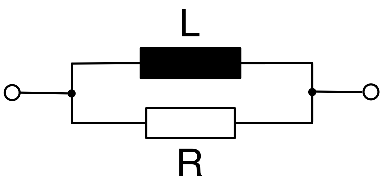
(a) Für die Schaltung gilt Folgendes:

Abb. 4.1



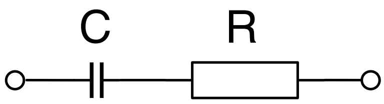
$$\underline{Z} = R + j\omega L$$

Abb. 4.2



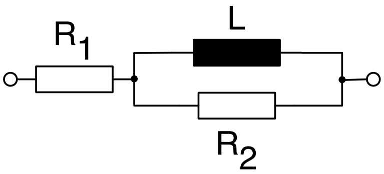
$$\underline{Z} = \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L}$$

Abb. 4.3



$$\underline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C}$$

Abb. 4.4



$$\underline{Z} = R_1 + \frac{R_2 \cdot j\omega L}{R_2 + j\omega L}$$

(b) Bei $\varphi_{ui} = \pi/4$ bzw. $\varphi_{ui} = -\pi/4$ gilt $Re\{Z\} = Im\{Z\}$ bzw. $Re\{Z\} = -Im\{Z\}$. Deswegen gilt für die Bauteile das Folgende

Abb. 4.1

$$\begin{aligned} R &= \omega L \\ \rightarrow L &= \frac{R}{\omega} \\ L &= \frac{100\Omega}{10^4 s^{-1}} = 10mH \end{aligned}$$

Abb. 4.2

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L} \\ \frac{1}{R} &= -\left(\frac{-1}{\omega L}\right) \\ R &= \omega L \\ \rightarrow L &= \frac{R}{\omega} \\ L &= \frac{(10^{-2}S)^{-1}}{10^4 s^{-1}} = 10mH \end{aligned}$$

Abb. 4.3

$$\begin{aligned} R &= -\left(\frac{-1}{\omega C}\right) \\ \rightarrow C &= \frac{1}{\omega R} \\ C &= \frac{1}{10^4 s^{-1} \cdot 200\Omega} = 0,5\mu F \end{aligned}$$