Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel
Tel: 0721 608-42650
Olaf.Doessel@kit.edu

Übungsleiter: Dipl.-Ing. G. Lenis
Tel: 0721 608-45478
Gustavo.Lenis@kit.edu

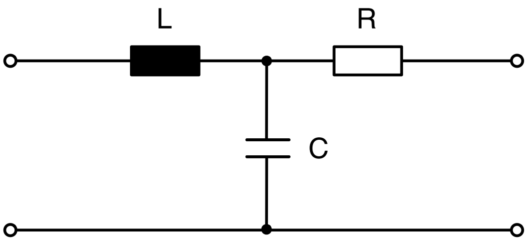
Übungsblatt Nr. 6: Vierpole/Zweitore

Empfohlen für die Übung: Aufgaben 23, 26
Empfohlen für Zuhause: Aufgaben 24, 25

Die für die Übung empfohlenen Aufgaben dienen als Orientierung und sollen eine grobe Richtlinie darstellen, welche Aufgaben vom Umfang und Schwierigkeitsgrad her in der Zeit der Übung zu schaffen sind.
Letztendlich entscheidet der Übungsleiter, welche Aufgaben in der Übung behandelt werden.
Zusätzlich wird empfohlen, die nicht in der Übung behandelten Aufgaben zu Hause zu bearbeiten.

Aufgabe 23

Es sei folgende Schaltung gegeben:

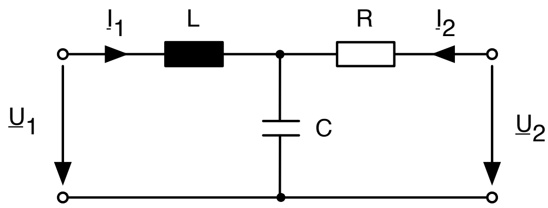


(a) Berechnen Sie die Impedanzmatrix $[\underline{Z}]$.

(b) Berechnen Sie die Admittanzmatrix $[\underline{Y}]$ einmal direkt und einmal durch Transformation von $[\underline{Z}]$.

Lösung:

(a)



Aufstellen der Impedanzmatrix:

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{11} &= \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} && \text{(Eingangs-Leerlaufimpedanz)} \\
\underline{Z}_{22} &= \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} = R + \frac{1}{j\omega C} && \text{(Ausgangs-Leerlaufimpedanz)} \\
\underline{Z}_{12} &= \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} = \frac{1}{j\omega C} && \text{(Leerlauf-Kernimpedanz, rückwärts)} \\
\underline{Z}_{21} &= \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} = \frac{1}{j\omega C} && \text{(Leerlauf-Kernimpedanz, vorwärts)}
\end{aligned}$$

und als ganzes:

$$[\underline{Z}] = \begin{bmatrix} j\omega L + \frac{1}{j\omega C} & \frac{1}{j\omega C} \\ \frac{1}{j\omega C} & R + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix}$$

(b) Die Admittanzmatrix kann auf zwei Arten bestimmt werden: zum einen erhält man sie als Inverse der Impedanzmatrix:

$$[\underline{Y}] = [\underline{Z}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_{22}}{detZ} & -\frac{\underline{Z}_{12}}{detZ} \\ -\frac{\underline{Z}_{21}}{detZ} & \frac{\underline{Z}_{11}}{detZ} \end{bmatrix}$$

die dafür benötigte Determinante von [Z] ist

$$\begin{aligned} det[\underline{Z}] &= \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) - \left(\frac{1}{j\omega C}\cdot\frac{1}{j\omega C}\right) \\ &= j\omega LR + \frac{L}{C} - j\frac{R}{\omega C} + \frac{1}{(j\omega C)^2} - \frac{1}{(j\omega C)^2} \\ &= \frac{L}{C} + j\left(\omega LR - \frac{R}{\omega C}\right) = \frac{\omega L + j\omega^2 LCR - jR}{\omega C} \end{aligned}$$

und somit

$$[\underline{Y}] = \begin{bmatrix} \frac{R+\frac{1}{j\omega C}}{det\underline{Z}} & -\frac{\frac{1}{j\omega C}}{det\underline{Z}} \\ -\frac{\frac{1}{j\omega C}}{det\underline{Z}} & \frac{j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}{det\underline{Z}} \end{bmatrix}$$

Der andere Weg führt wie in a) über eine Analyse der Schaltung. Am Beispiel von $\underline{Y}_{11}$ soll dies einmal vorgestellt werden:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{11} &= \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = \left(j\omega L + R\|\frac{1}{j\omega C}\right)^{-1} = \left(j\omega L + \frac{R\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}\right)^{-1} \\ &= \left(j\omega L + \frac{R}{1+j\omega CR}\right)^{-1} = \left(\frac{j\omega L(1+j\omega CR)+R}{1+j\omega CR}\right)^{-1} \\ &= \frac{1+j\omega CR}{j\omega L - \omega^2 LCR + R} = \frac{-j+\omega CR}{\omega L + j\omega^2 LCR - jR} \end{aligned}$$

Das ist genau das gleiche Ergebnis, das man auch aus $\frac{R\frac{1}{j\omega C}}{det[\underline{Z}]}$ erhält.

Zur weiteren Übung:

$\underline{Y}_{12}$ ergibt sich durch Kurzschließen von $\underline{U}_1$. Die Betrachtung von R in Reihe zu $l\|C$ ergibt einen Spannungsteiler, über dessen Parallelschaltung $L\|C$ die Spannung $\underline{I}_1 j\omega L$ abfällt.

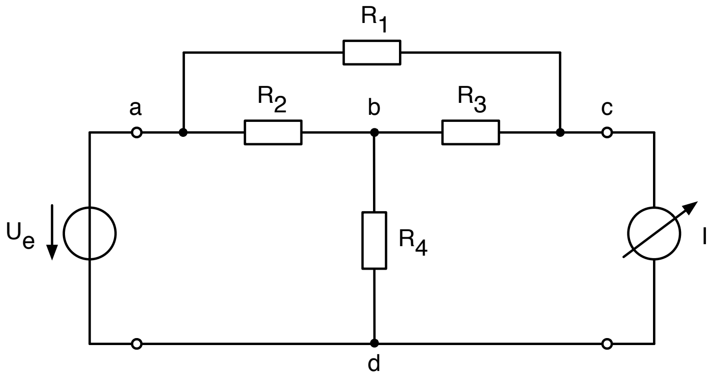
$$\frac{-\underline{I}_1 j\omega L}{\underline{U}_2} = \frac{j\omega L\|\frac{1}{j\omega C}}{j\omega L\|\frac{1}{j\omega C} + R}$$

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{12} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{U}_1=0} &= -\frac{1}{j\omega L}\frac{j\omega L\|\frac{1}{j\omega C}}{j\omega L\|\frac{1}{j\omega C+R}} = -\frac{1}{j\omega L}\frac{\frac{j\omega L\frac{1}{j\omega C}}{j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}}{\frac{j\omega L\frac{1}{j\omega C}}{j\omega L+\frac{1}{j\omega C}} + R} \\ &= -\frac{1}{j\omega L}\frac{\frac{\frac{L}{C}}{j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}}{\frac{\frac{L}{C}}{j\omega L+\frac{1}{j\omega C}} + R} \\ &= -\frac{1}{j\omega L}\frac{1}{1+R\left(j\omega L+\frac{1}{j\omega C}\right)\frac{C}{L}} \\ &= -\frac{1}{j\omega CL}\frac{\omega C}{\omega + R\left(j\omega^2 L - \frac{j}{C}\right)\frac{C}{L}} \\ &= -\frac{1}{j\omega C}\frac{\omega C}{\omega L + j\omega^2 LCR - jR} \end{aligned}$$

Auch dieses Ergebnis entspricht dem Eintrag in der Admittanzmatrix $-\frac{\frac{1}{j\omega C}}{det\underline{Z}}$.

Aufgabe 24

Untersucht werden soll folgende Schaltung:



(a) Berechnen Sie den vom Amperemeter rechts angezeigten Strom $\underline{I}$ für $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 30\Omega$, $R_3 = 20\Omega$, $R_4 = 60\Omega$ und $U_e = 15V$.

(b) Nun werden Spannungsquelle und Amperemeter ausgetauscht, bestimmen Sie $\underline{I}$ für die neue Anordnung.

Lösung:

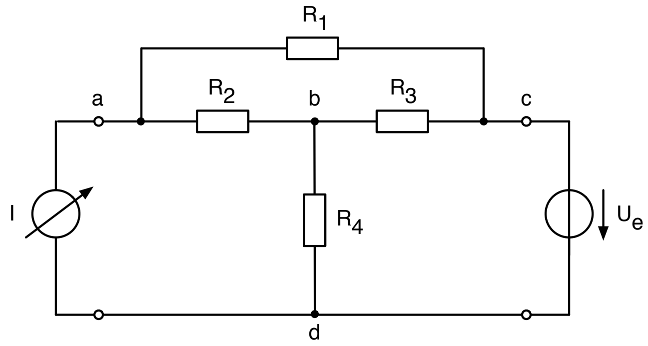
(a) den gesuchten Strom kann man mit Hilfe einer Knotengleichung für (b) bestimmen:
$\frac{U_{bd}}{R_4} + \frac{U_{bd}-U_e}{R_2} + \frac{U_{bd}}{R_3} = 0$
Über dem Amperemeter fällt keine Spannung ab (unendlich kleiner Innenwiderstand), daher liegt über R_3 ebenfalls U_{bd} an.

$$\begin{aligned}
U_{bd}\left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) &= \frac{U_e}{R_2} \\
U_{bd}\left(\frac{R_2R_3+R_4R_3+R_4R_2}{R_2R_3R_4}\right) &= \frac{U_e}{R_2} \\
U_{bd} &= U_e\left(\frac{1}{R_2}\cdot\frac{R_2R_3R_4}{R_2R_3+R_4R_3+R_4R_2}\right) \\
&= U_e\frac{R_3R_4}{R_2R_3+R_4R_3+R_4R_2} \\
&= 15V\frac{20\cdot 60}{30\cdot 20+60\cdot 20+60\cdot 30} \\
&= 15V\frac{1}{3} = 5V
\end{aligned}$$

Der Strom I_a setzt sich folgendermassen zusammen:

$$\begin{aligned}
I_a &= I_{R_1} + I_{R_3} = \frac{U_e}{R_1} + \frac{U_{bd}}{R_3} \\
&= \frac{15}{10}A + \frac{5}{20}A = \frac{7}{4}A = 1.75A
\end{aligned}$$

(b) die in der Aufgabenstellung geforderte Umstrukturierung führt zu



Der Strom am Knoten (b) wird somit zu

$$\frac{U_{bd}}{R_4 + \frac{U_{bd}}{R_2}} + \frac{U_{bd} - U_e}{R_3} = 0$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned}
U_{bd}\left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) &= \frac{U_e}{R_3} \\
U_{bd} &= U_e\left(\frac{1}{R_3} \cdot \frac{R_2 R_3 R_4}{R_2 R_3 + R_4 R_3 + R_4 R_2}\right) \\
&= U_e \frac{R_2 R_4}{R_2 R_3 + R_4 R_3 + R_4 R_2} \\
&= 15V \frac{1}{2} = 7.5V
\end{aligned}$$

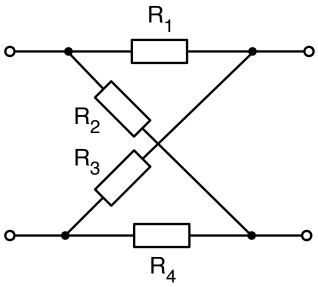
Damit lässt sich analog zu (a) der Strom I_b berechnen:

$$\begin{aligned}
I_b &= I_{R1} + I_{R2} = \frac{U_e}{R_1} + \frac{U_{bd}}{R_2} \\
&= \frac{15}{10}A + \frac{7.5}{30}A = \frac{7}{4}A = 1.75A
\end{aligned}$$

Ein solcher Vierpol wird als "reziprok" bezeichnet. Er weist, egal von welcher Seite her man ihn betrachtet, die gleichen Kernadmittanzen $\underline{Y}_{21} = \underline{Y}_{12}$ auf (vgl. Kap. 11.6).

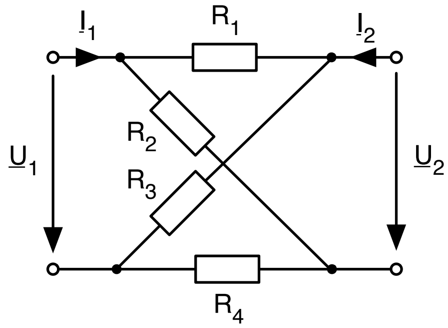
Aufgabe 25

Bestimmen Sie die Y-Parameter der unten stehenden Schaltung



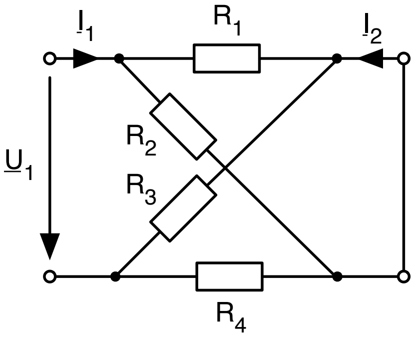
$R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $R_3 = 15\Omega$, $R_4 = 20\Omega$

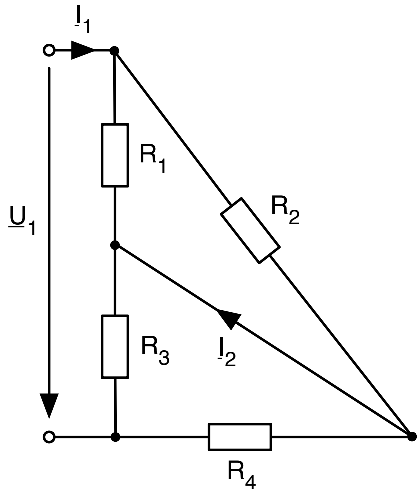
Lösung:



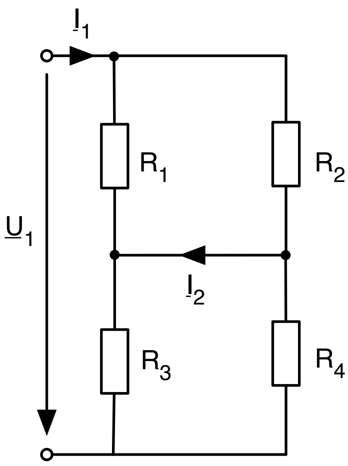
$$\underline{Y}_{11} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right|_{U_2=0} = \frac{1}{(R_1\|R_2)+(R_3\|R_4)} = \frac{1}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}}$$
$$= \frac{1}{\frac{R_1R_2(R_3+R_4)}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}+\frac{R_3R_4(R_1+R_2)}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}}$$
$$= \frac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}{R_1R_2(R_3+R_4)+R_3R_4(R_1+R_2)} = \frac{21}{250}S$$
$$\underline{Y}_{22} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\right|_{U_1=0} = \frac{1}{(R_1\|R_3)(R_2\|R_4)} = \frac{1}{\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}+\frac{R_2R_4}{R_2+R_4}}$$
$$= \frac{1}{\frac{R_1R_3(R_2+R_4)}{(R_1+R_3)(R_2+R_4)}+\frac{R_2R_4(R_1+R_3)}{(R_1+R_3)(R_2+R_4)}}$$
$$= \frac{(R_1+R_3)(R_2+R_4)}{R_1R_3(R_2+R_4)+R_2R_4(R_1+R_3)} = \frac{12}{125}S$$

Für die Bestimmung von $\underline{Y}_{21}$ wird $\underline{U}_2$ zu Null gesetzt. Ein Zusammenziehen auf einen Punkt wie bei der Bestimmung von $\underline{Y}_{11}$ ist hier nicht sinnvoll. Es liegt daran, dass durch das Zusammenziehen der Strompfad für $\underline{I}_2$ verschwinden würde.
Deswegen ist ein Umzeichnen des Schaltplans in diesem Fall besser geeignet. Das Umzeichnen unter Berücksichtigung von $\underline{U}_2 = 0$ liefert Folgendes:





bzw.



Es handelt sich also um die aus Kap. 1.3 bekannte Brückenschaltung. Sollte der Spezialfall der abgeglichenen Brücke vorkommen, so gilt

$$\begin{aligned} \frac{R_1}{R_3} &= \frac{R_2}{R_4} \\ \underline{I}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Das ist hier aber leider nicht der Fall. Deshalb muss $\underline{I}_2$ mit Hilfe von Maschen- und Knotengleichungen bestimmt werden.

Die folgende Vorgehensweise wird dabei verwendet:

1. $\underline{I}_{R_3} = \underline{I}_2 + \underline{I}_{R_1}$
2. $\underline{I}_{R_1} = \frac{\underline{U}_{R_1}}{R_1} = \frac{\underline{I}_1(R_1 \| R_2)}{R_1}$
3. $\underline{I}_{R_3} = \frac{\underline{U}_{R_3}}{R_3} = \frac{\underline{I}_1(R_3 \| R_4)}{R_3}$

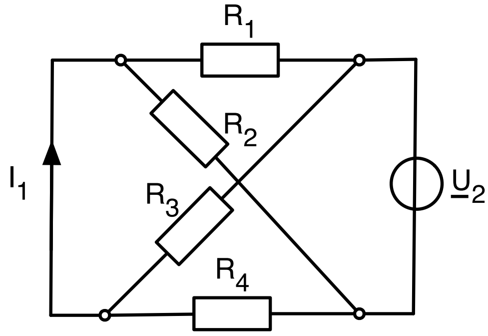
Einsetzen von 2. und 3. in 1. liefert:

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \underline{I}_{R_3} - \underline{I}_{R_1} \\ &= \underline{I}_1 \left(\frac{R_3 \| R_4}{R_3} - \frac{R_1 \| R_2}{R_2} \right) \\ &= \underline{I}_1 \left(\frac{R_4}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \end{aligned}$$

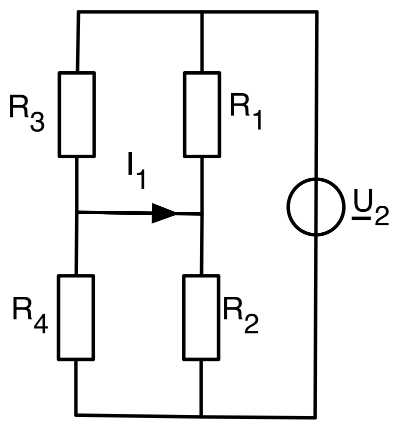
Für den Parameter $\underline{Y}_{21}$ gilt dann

$$\begin{aligned}\underline{Y}_{21} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right|_{U_2=0} &= \frac{\underline{I}_1 \cdot \left(\frac{R_4}{R_3+R_4} - \frac{R_2}{R_1+R_2}\right)}{\underline{U}_1} \\ &= \underline{Y}_{11} \cdot \left(\frac{R_4}{R_3+R_4} - \frac{R_2}{R_1+R_2}\right) \\ &= -\frac{1}{125}S\end{aligned}$$

Für den Parameter $\underline{Y}_{12}$ lässt sich die Schaltung folgendermaßen umzeichnen:



bzw.

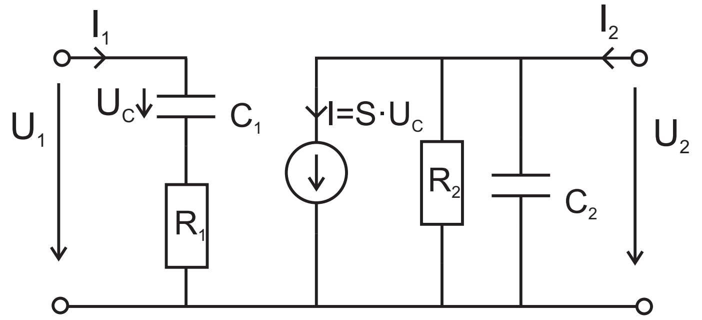


Die Bestimmung von $\underline{Y}_{12}$ läuft analog zu der von $\underline{Y}_{21}$. In diesem Fall gilt aber:

$$\begin{aligned}\underline{Y}_{12} &= \underline{Y}_{22}\left(\frac{R_4}{R_2+R_4} - \frac{R_3}{R_1+R_3}\right) \\ &= -\frac{1}{125}S\end{aligned}$$

Aufgabe 26

Gegeben sei folgendes 2-Tor:



Bestimmen Sie die Y-Parameter des 2-Tors und zeichnen Sie zwei Ersatzschaltbilder (Bild 1: Y_{11},Y_{21}; Bild 2: Y_{12},Y_{22}) mit sämtlichen Vereinfachungen.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
Y_{11} &= \left.\frac{I_1}{U_1}\right|_{U_2=0} \Rightarrow Y_{11} = \frac{1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{j\omega C_1 R_1}{1 + j\omega C_1 R_1} \\
Y_{12} &= \left.\frac{I_1}{U_2}\right|_{U_1=0} \Rightarrow Y_{12} = 0 \\
Y_{21} &= \left.\frac{I_2}{U_1}\right|_{U_2=0} \Rightarrow Y_{21} = \frac{SU_c}{U_1} = S\frac{U_1 \frac{\frac{1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}}}{U_1} = \frac{S}{1 + j\omega C_1 R_1} \\
Y_{22} &= \left.\frac{I_2}{U_2}\right|_{U_1=0} \Rightarrow Y_{22} = \frac{1}{R_2} + j\omega C_2
\end{aligned}
$$

Bild 1: $U_2 = 0$

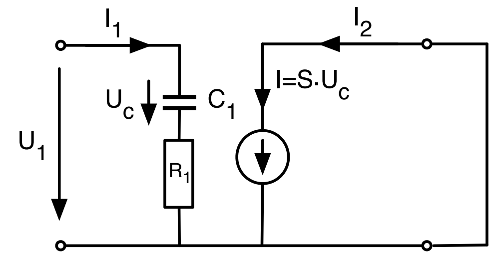


Bild 2: $U_1 = 0$