

Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel
Tel: 0721 608-42650
Olaf.Doessel@kit.edu

Übungsleiter: M.Sc. N. Pilia
Tel: 0721 608-48035
Nicolas.Pilia@kit.edu

Übungsblatt Nr. 8: Transformatoren

Empfohlen für die Übung: Aufgabe 30
Empfohlen für Zuhause: Aufgabe 31

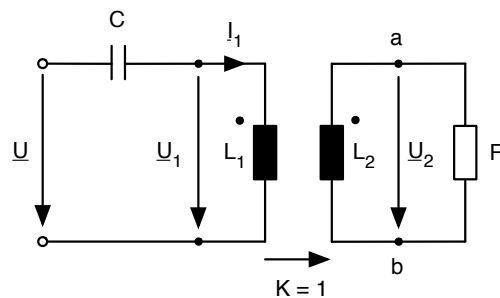
Die für die Übung empfohlenen Aufgaben dienen als Orientierung und sollen eine grobe Richtlinie darstellen, welche Aufgaben vom Umfang und Schwierigkeitsgrad her in der Zeit der Übung zu schaffen sind.

Letztendlich entscheidet der Übungsleiter, welche Aufgaben in der Übung behandelt werden.

Zusätzlich wird empfohlen, die nicht in der Übung behandelten Aufgaben zu Hause zu bearbeiten.

Aufgabe 30

Die Abbildung zeigt einen verlustlosen Transformator ohne Streuung. Am Eingang wird ein Wechselstrom mit veränderbarer Frequenz ω angelegt.



- Wie lautet die komplexe Eingangsimpedanz $\underline{Z}$ als Funktion von L_1 , L_2 , R , C und ω ?
- Wie lautet die Resonanzfrequenz $\omega_0 = f(L_1, L_2, R, C)$, bei der die Eingangsimpedanz $\underline{Z}$ rein reell wird.
- Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild des Transformators in der Abbildung unter Verwendung von nur drei Elementen und bestimmen Sie deren Wert.
- Im folgenden sei $\omega = \omega_0$, d.h. die Schaltung wird bei Resonanz betrieben. Berechnen Sie die in der Schaltung umgesetzte Wirkleistung.

Lösung:

- (a) Die Eingangsimpedanz:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}_1} = \frac{(\underline{Z}_C + \underline{Z}_1)\underline{I}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_C + \underline{Z}_1$$

($\underline{Z}_1$: Eingangsimpedanz des Übertragers)

Trafogleichungen:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 \\ -\underline{I}_2 R &= j\omega M \underline{I}_1 + j\omega L_2 \underline{I}_2\end{aligned}$$

($\underline{U}_2$ ist hier schon substituiert: $\underline{U}_2 = -\underline{I}_2 R$)

$$-\underline{I}_2(R + j\omega L_2) = j\omega M \underline{I}_1$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_2 &= -\frac{j\omega M}{R + j\omega L_2} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_1 &= j\omega L_1 \underline{I}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R + j\omega L_2} \underline{I}_1 \\ \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R + j\omega L_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \frac{1}{j\omega C} + \underline{Z}_1 \\ &= \frac{1}{j\omega C} + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R + j\omega L_2}\end{aligned}$$

Da der Transformator ohne Streuung arbeitet, ist der Kopplungsfaktor $k = 1$. Somit gilt $M^2 = k^2 \cdot L_1 \cdot L_2 = L_1 \cdot L_2$. Dadurch kann die Eingangsimpedanz Folgendermassen getrennt nach Real- und Imaginärteil angegeben werden

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= -\frac{j}{\omega C} + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 L_1 L_2 (R - j\omega L_2)}{R^2 + (\omega L_2)^2} \\ &= \frac{\omega^2 L_1 L_2 R}{R^2 + (\omega L_2)^2} + j \left(-\frac{1}{\omega C} + \omega L_1 - \frac{\omega^3 L_1 L_2^2}{R^2 + (\omega L_2)^2} \right)\end{aligned}$$

(b) Im Resonanzfall gilt:

$$\text{Im}\{\underline{Z}(\omega_0)\} = 0$$

Daraus folgt:

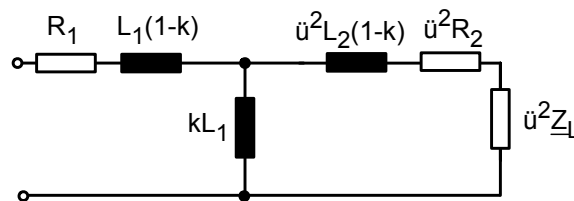
$$\begin{aligned}-\frac{1}{\omega_0 C} + \omega_0 L_1 - \frac{\omega_0^3 L_1 L_2^2}{R^2 + (\omega_0 L_2)^2} &= 0 \\ -\frac{1}{\omega_0 C} + \frac{\omega_0 L_1 R^2 + \omega_0^3 L_1 L_2^2 - \omega_0^3 L_1 L_2^2}{R^2 + (\omega_0 L_2)^2} &= 0 \\ -\frac{1}{\omega_0 C} &= \frac{\omega_0 L_1 R^2}{R^2 + (\omega_0 L_2)^2} \\ R^2 + (\omega_0 L_2)^2 &= \omega_0^2 L_1 R^2 C \\ \omega_0^2 (L_1 R^2 C - L_2^2) &= R^2 \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{L_1 C - \left(\frac{L_2}{R}\right)^2}}\end{aligned}$$

(c) Diese Teilaufgabe lässt sich auf 2 Art und Weisen lösen. Die erste Vorgehensweise ist eher mathematisch. Durch geschicktes Umformen kommt man auf eine vereinfachte Variante der Impedanz $\underline{Z}$:

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= -\frac{j}{\omega C} + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 L_1 L_2}{R + j\omega L_2} \\
&= -\frac{j}{\omega C} + \frac{(j\omega L_1)(R + j\omega L_2) + \omega^2 L_1 L_2}{R + j\omega L_2} \\
&= -\frac{j}{\omega C} + \frac{j\omega L_1 R - \omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 L_1 L_2}{R + j\omega L_2} \\
&= -\frac{j}{\omega C} + \frac{j\omega L_1 R}{R + j\omega L_2} \cdot \left(\frac{\frac{L_1}{L_2}}{\left(\frac{L_1}{L_2}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{j\omega C} + \frac{(j\omega L_1) \left(R \frac{L_1}{L_2}\right)}{j\omega L_1 + R \frac{L_1}{L_2}}
\end{aligned}$$

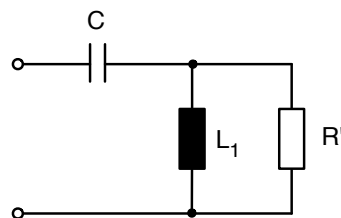
Diese Gleichung beschreibt eine Schaltung bestehend aus einem Kondensator in Reihe mit einer Parallelschaltung aus einer Spule mit Induktivität L_1 und einem Widerstand $R \frac{L_1}{L_2}$.

Der zweite Ansatz ist der Elektrotechnischere. Hierbei ist die Verwendung eines Ersatzschaltbild für den Transformator notwendig (Skript, Abb. 14.13):



mit: $R_1 = R_2 = 0$, da verlustlos; $L_1(1-k) = 0$ und $L_2(1-k) = 0$, da $k=1$;

es ergibt sich für die Schaltung das folgende einfache Ersatzschaltbild:



wegen $\underline{Z}_L = R$ gilt $R' = \dot{u}^2 \underline{Z}_L = \frac{L_1}{L_2} R$
 $C = C$ und $L_1 = L_1$

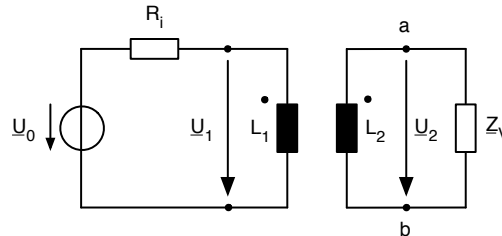
- (d) Zusatz: Im folgenden sei $\omega = \omega_0$, d.h. die Schaltung werde bei Resonanz betrieben.

I einprägt, Wirkleistung entsteht nur im Parallelkreis

$$P = \operatorname{Re}\{|\underline{I}|^2 \underline{Z}_{\text{parallel}}\} = |\underline{I}|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\frac{1}{R'} + \frac{1}{j\omega L_1}}\right) = \dots = |\underline{I}|^2 \frac{L_2}{RC}$$

Aufgabe 31

Eine Last $Z_v = R_v + jX_v$ soll mittels eines verlustlosen, streulosen Transformators an eine Spannungsquelle mit der Quellenspannung $\underline{U}_0$ und dem Innenwiderstand R_i angepasst werden.



- Berechnen Sie bei sekundärem Kurzschluss den Kurzschlussstrom $\underline{I}_K$ (Zählpfeil von a nach b)
- Berechnen Sie bei sekundärem Leerlauf die Ausgangsspannung $\underline{U}_{a0}$ an den Klemmen a und b.
- Berechnen Sie bezüglich der Klemmen a und b die komplexe Innenimpedanz der Schaltung.
- Geben Sie bezüglich der Klemmen a und b die Ersatzspannungsquellschaltung an.

Vom Transformator und der Spannungsquelle seien folgende Daten bekannt:
 $L_1 = 10\text{mH}$, $L_2 = 100\text{mH}$, $R_i = 2\Omega$, $f = 15.916\text{Hz}$.

- Mit Hilfe welcher Bauelemente der Last kann eine Leistungsanpassung erfolgen?
Geben Sie die Werte der Bauelemente an.
- Berechnen Sie den Wirkungsgrad der Schaltung $\eta = \frac{P_v}{P_{ges}}$ für $f = 15.916\text{Hz}$.

Lösung:

Transformatorgleichungen:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= (R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 + j\omega M\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= j\omega M\underline{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2)\underline{I}_2\end{aligned}$$

verlustfrei würde bedeuten, dass:

$$R_1 = R_2 = 0$$

aber hier:

$$\underline{U}_0 = (R_i + j\omega L_1)\underline{I}_1 + \omega M\underline{I}_2$$

streulos: $k = 1$ und

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

(a) Sekundärer Kurzschluss:

$$\underline{U}_2 = 0 \text{ und } \underline{I}_2 = -\underline{I}_K$$

$$\underline{U}_0 = (R_i + j\omega L_1)\underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_K$$

$$0 = j\omega M \underline{I}_1 - j\omega L_2 \underline{I}_K$$

zweite Gleichung nach $\underline{I}_1$ auflösen:

$$\underline{I}_1 = \frac{j\omega L_2}{j\omega M} \underline{I}_K = \frac{L_2}{M} \underline{I}_K$$

und in erste Gleichung einsetzen:

$$\underline{U}_0 = (R_i + j\omega L_1) \frac{L_2}{M} \underline{I}_K - j\omega M \underline{I}_K$$

$$\underline{I}_K = \frac{\underline{U}_0}{(R_i + j\omega L_1) \frac{L_2}{M} - j\omega M}$$

mit $M = \sqrt{L_1 L_2}$ folgt:

$$\begin{aligned} \underline{I}_K &= \frac{\underline{U}_0}{R_i \frac{L_2}{\sqrt{L_1 L_2}} + j\omega L_1 \frac{L_2}{\sqrt{L_1 L_2}} - j\omega \sqrt{L_1 L_2}} \\ &= \frac{\underline{U}_0}{R_i \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} + j\omega \sqrt{L_1 L_2} - j\omega \sqrt{L_1 L_2}} \\ &= \frac{\underline{U}_0}{R_i \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}} \end{aligned}$$

(b) Sekundärer Leerlauf:

$$\underline{I}_2 = 0$$

$$\underline{U}_0 = (R_i + j\omega L_1) \underline{I}_1$$

$$\underline{U}_{a0} = j\omega M \underline{I}_1$$

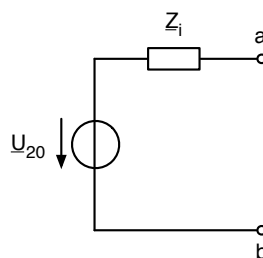
erste Gleichung in zweite einsetzen:

$$\underline{U}_{a0} = j\omega M \frac{\underline{U}_0}{R_i + j\omega L_1} = \frac{j\omega \sqrt{L_1 L_2}}{R_i + j\omega L_1} \underline{U}_0$$

(c) komplexe Innenimpedanz bzgl. a und b

$$\underline{Z}_i = \frac{\underline{U}_{a0}}{\underline{I}_K} = \frac{j\omega \sqrt{L_1 L_2}}{R_i + j\omega L_1} \underline{U}_0 \cdot \frac{R_i \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}}{\underline{U}_0} = \frac{j\omega R_i L_2}{R_i + j\omega L_1}$$

(d)



(e) Leistungsanpassung:

$$\underline{Z}_i = \underline{Z}_V^*$$

$$\underline{Z}_i = \frac{j\omega R_i L_2}{R_i + j\omega L_1}$$

mit $L_1 = 10mH$, $L_2 = 100mH$, $R_i = 2\Omega$, $f = 15.916Hz$ bzw.
 $\omega = 2\pi f = 100s^{-1}$

$$\underline{Z}_i|_{f=15.916Hz} = \frac{j20\Omega}{2 + j1} = (4 + j8)\Omega$$

$$\underline{Z}_i|_{f=15.916Hz} = (4 + j8)\Omega$$

$$\underline{Z}_V|_{f=15.916} = (4 - j8)\Omega$$

aus $\underline{Z}_i = \underline{Z}_V^*$ mit $\underline{Z}_V = R_V + jX_V$ folgt durch Koeffizientenvergleich:
 $R_V = 4\Omega$ und $X_V = -8\Omega$

Kondensator mit $\frac{1}{\omega C} = 8 \rightarrow C = \frac{1}{100 \cdot 8} F = 1.25mF$

(f) Wirkungsgrad der Schaltung:

Für $f = 15.916Hz$ bzw. $\omega = 100s^{-1}$

$$S_V = \underline{U}_V \underline{I}_V^* = \underline{Z}_V \underline{I}_V \underline{I}_V^* = \underline{Z}_V |\underline{I}_V|^2$$

$$P_V = \operatorname{Re}\{S_V\} = 4|\underline{I}_V|^2 \cdot \Omega$$

$$S_{ges} = \underline{U}_{a0} \underline{I}_V^* = (\underline{Z}_i \parallel \underline{Z}_V) \underline{I}_V \underline{I}_V^* = (\underline{Z}_i + \underline{Z}_V) |\underline{I}_V|^2$$

$$P_{ges} = \operatorname{Re}\{S_{ges}\} = \operatorname{Re}\{\underline{Z}_i + \underline{Z}_V\} |\underline{I}_V|^2 = 8|\underline{I}_V|^2 \cdot \Omega$$

$$\eta = \frac{P_V}{P_{ges}} = \frac{4|\underline{I}_V|^2}{8|\underline{I}_V|^2} = \frac{1}{2}$$

(wie üblich bei Leistungsanpassung!)