

Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel
Tel: 0721 608-42650
Olaf.Doessel@kit.edu

Übungsleiter: M.Sc. N. Pilia
Tel: 0721 608-48035
Nicolas.Pilia@kit.edu

Übungsblatt Nr. 7: Bode-Diagramme

Empfohlen für die Übung: Aufgaben 28, 29
Empfohlen für Zuhause: Aufgabe 27

Die für die Übung empfohlenen Aufgaben dienen als Orientierung und sollen eine grobe Richtlinie darstellen, welche Aufgaben vom Umfang und Schwierigkeitsgrad her in der Zeit der Übung zu schaffen sind.

Letztendlich entscheidet der Übungsleiter, welche Aufgaben in der Übung behandelt werden.

Zusätzlich wird empfohlen, die nicht in der Übung behandelten Aufgaben zu Hause zu bearbeiten.

Aufgabe 27

Gegeben ist der Zusammenhang $\tau_i = R_i \cdot C_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$), die folgenden Übertragungsfunktionen $\underline{G}_m(j\omega) = \frac{\underline{U}}{\underline{U}_e}$ und die normierte Kreisfrequenz $\Omega = \frac{\omega}{1s^{-1}}$.

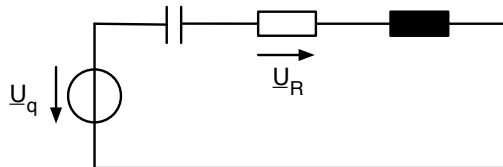
$$\begin{aligned}\underline{G}_1(j\omega) &= \frac{j\omega\tau_1}{(1 + j\omega\tau_2)(1 + j\omega\tau_3)} \\ \underline{G}_2(j\omega) &= \frac{1}{j\omega\tau_0} \\ \underline{G}_3(j\omega) &= \frac{1}{j\omega\tau_0} \cdot \frac{j\omega\tau_1}{(1 + j\omega\tau_2)(1 + j\omega\tau_3)}\end{aligned}$$

Zahlenwerte:

$R_0 = 10M\Omega$, $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 100\Omega$, $R_3 = 10000\Omega$, $C_0 = 1\mu F$, $C_1 = 100\mu F$, $C_2 = 100\mu F$, $C_3 = 10nF$

- (a) Skizzieren Sie die Bodediagramme der 3 Übertragungsfunktionen $\underline{G}_1(j\omega)$, $\underline{G}_2(j\omega)$ und $\underline{G}_3(j\omega)$.
- (b) Welche Bedingung muss eingehalten werden, damit die Übertragungsfunktion der Schaltung nach der Abbildung folgende Gestalt hat?

$$\underline{G}_1(j\omega) = \frac{\underline{U}_R}{\underline{U}_q} = \frac{j\omega\tau_1}{(1 + j\omega\tau_2)(1 + j\omega\tau_3)}$$



Hinweis: Beachten Sie, dass τ_1 , τ_2 und τ_3 nicht die selben Werte wie in a) haben.

Lösung:

- (a) Bodediagramme:

Zunächst werden die Zeitkonstanten τ_0 , bis τ_3 berechnet.

$$\begin{aligned}\tau_0 &= R_0 \cdot C_0 = 10 \cdot 10^6 \Omega \cdot 1 \cdot 10^{-6} F = 10 \frac{V}{A} \frac{As}{V} = 10s \\ \tau_1 &= R_1 \cdot C_1 = 100 \Omega \cdot 100 \cdot 10^{-6} F = 10^{-2} s \\ \tau_2 &= R_2 \cdot C_2 = 100 \Omega \cdot 100 \cdot 10^{-6} F = 10^{-2} s \\ \tau_3 &= R_3 \cdot C_3 = 10 \cdot 10^3 \Omega \cdot 10 \cdot 10^{-9} F = 10^{-4} s\end{aligned}$$

1. Übertragungsfunktion:

Die Übertragungsfunktion $\underline{G}_1(j\omega)$ kann in drei Übertragungsfunktionen zerlegt werden:

$$\underline{G}_1(j\omega) = \underline{G}_z(j\omega) \cdot \underline{G}_{N1}(j\omega) \cdot \underline{G}_{N2}(j\omega)$$

- i) Wir betrachten zunächst die Zählerübertragungsfunktion: Einsetzen der Zeitkonstante liefert:

$$\underline{G}_z(j\omega) = j\omega 10^{-2}s$$

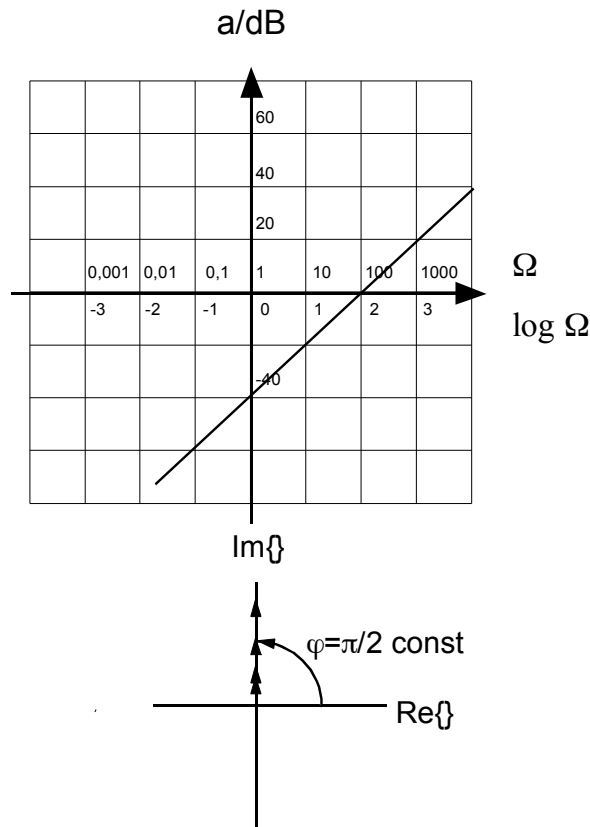
Mit der Normierung $\Omega = \frac{\omega}{\frac{1}{1s}}$ folgt:

$$\underline{G}_z(j\Omega) = j10^{-2}\Omega$$

Diese Übertragungsfunktion ist eine mit 20dB/Dekade ansteigende Gerade. Sie schneidet die Abszisse bei $\Omega = 100$ bzw. $\log\Omega = 2$.

Die Verstärkung ist $a_{\underline{G}_z}/dB = 20\log|j10^{-2}\Omega| = 20\log(10^{-2}\Omega)$,

die Phasenbeziehung $\varphi_{\underline{G}_z} = \arg\{j10^{-2}\Omega\} = \frac{\pi}{2}_{rad} = const$



- ii) 1. Übertragungsfunktion des Nenners

$$\underline{G}_{N1}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau_2} \Big|_{\omega=\frac{1}{s}\Omega}$$

$$\underline{G}_{N1}(j\Omega) = \frac{1}{1 + j10^{-2}\Omega}$$

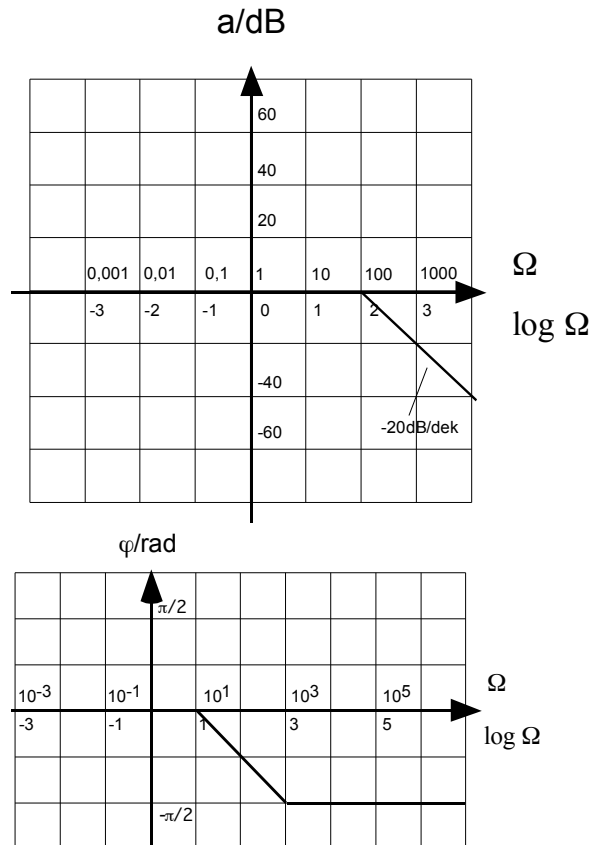
Daraus abgeleitet:

$$\begin{aligned} a_{\underline{G}_{N1}}/dB &= 20\log|1| - 20\log|1 + j10^{-2}\Omega| \\ &= 0 - 20\log\sqrt{1^2 + (10^{-2}\Omega)^2} \end{aligned}$$

und

$$\varphi_{\underline{G}_{N1}} = \arctan\left(\frac{0}{1}\right) - \arctan\left(\frac{10^{-2}\Omega}{1}\right) = -\arctan(10^{-2}\Omega)$$

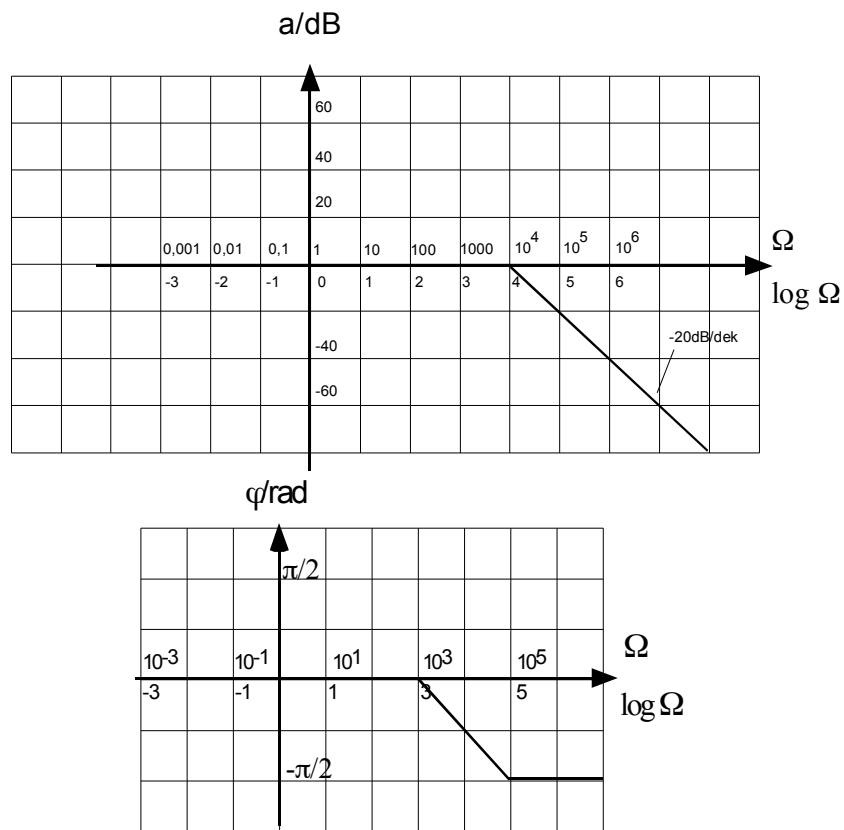
Für große Ω ist dies eine mit 20dB/Dekade fallende Gerade. Die sich über den gesamten Bereich Ω erstreckende Betragskennlinie besitzt ihr (Abwärts-)Knickstelle bei $\Omega = 100$ bzw. $\log \Omega = 2$.



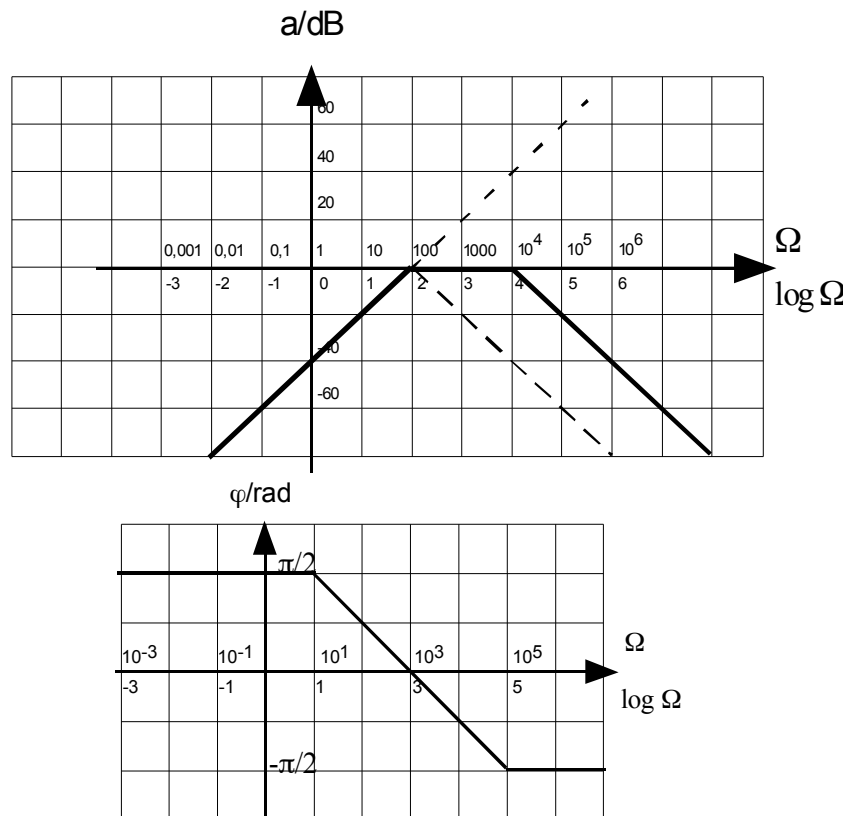
iii) 2. Übertragungsfunktion des Nenners

$$\begin{aligned} \underline{G}_{N2}(j\omega) &= \frac{1}{1 + j\omega\tau_2} \Big|_{\omega=\frac{1}{s}\Omega} \\ \underline{G}_{N2}(j\Omega) &= \frac{1}{1 + j10^{-4}\Omega} \\ a_{\underline{G}_{N2}}/dB &= 20\log|1| - 20\log|1 + j10^{-4}\Omega| \\ &= 0 - 20\log\sqrt{1^2 + (10^{-4}\Omega)^2} \\ \varphi_{\underline{G}_{N2}} &= \arctan\left(\frac{0}{1}\right) - \arctan\left(\frac{10^{-4}\Omega}{1}\right) = -\arctan(10^{-4}\Omega) \end{aligned}$$

Wie oben ist dies für große Ω eine mit 20 dB/Dekade fallende Gerade. Die Betragskennlinie besitzt ihre Knickstelle bei $\Omega = 10000$ bzw. $\log \Omega = 4$.



- iv) Damit ergeben sich durch Kombination der Graphen die Bodediagramme der Gesamtfunktion:



2. Übertragungsfunktion

$$\underline{G}_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega 10s}$$

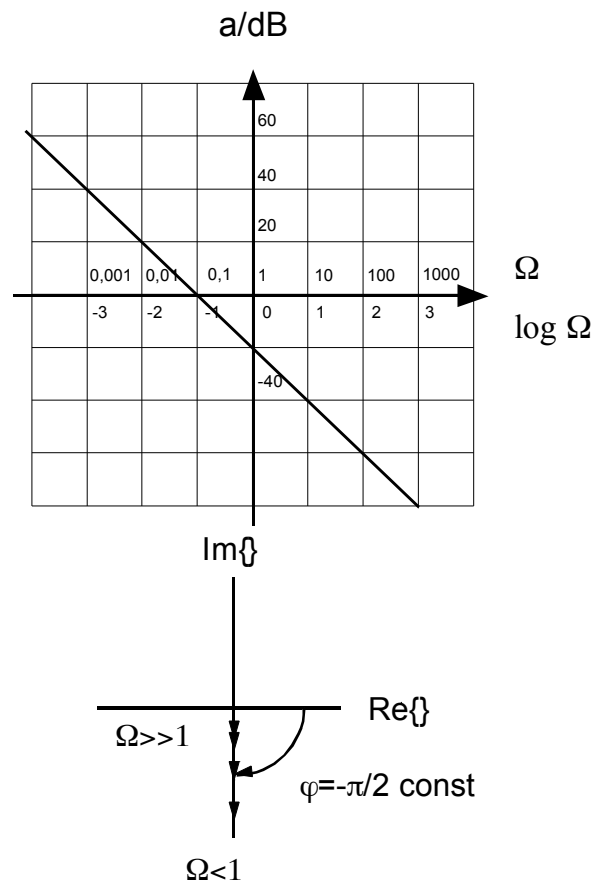
bzw.

$$\underline{G}_2(j\Omega) = \frac{1}{j10\Omega}$$

$$a_{\underline{G}_2}/dB = 20\log|1| - 20\log|j10\Omega| = -20\log(10\Omega)$$

$$\varphi_{\underline{G}_2} = \arg\left\{\frac{1}{j\omega 10s}\right\} = -\frac{\pi}{2}_{rad} = const$$

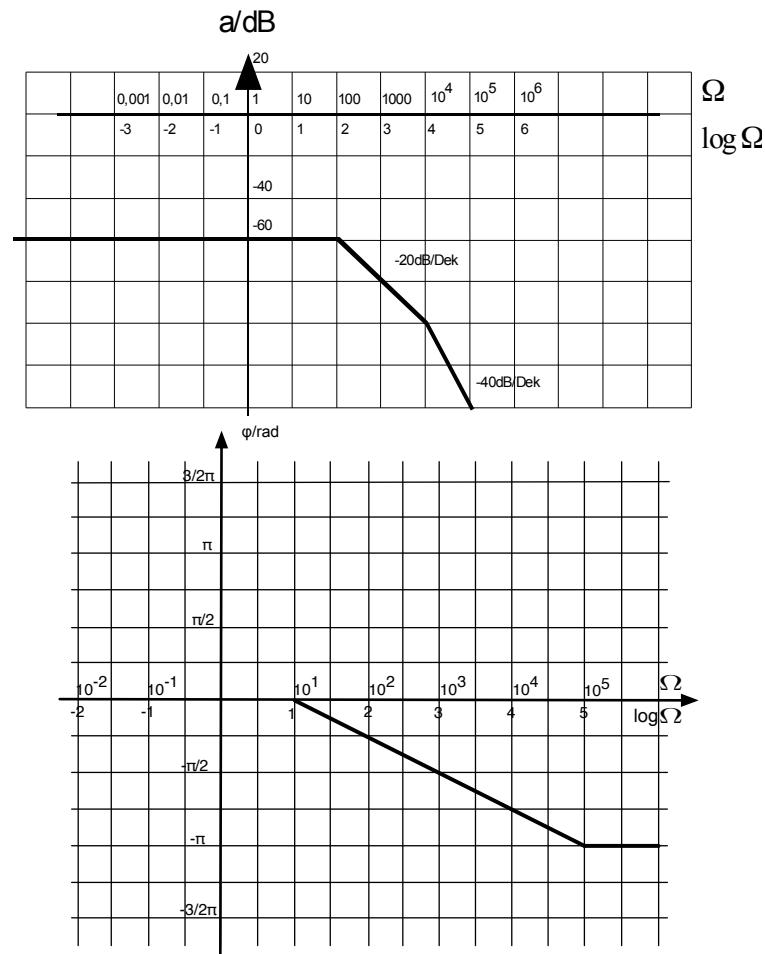
Diese Übertragungsfunktion ist eine mit -20 dB/Dekade fallende Gerade. Sie schneidet die Abszisse bei $\Omega = 0,1$ bzw. $\log\Omega = -1$.



3. Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion $\underline{G}_3(j\omega)$ ergibt sich durch die Überlagerung der Einzelfunktionen. Die ursprüngliche Phase erfährt eine zusätzliche Reduzierung um $\frac{\pi}{2}$. Für sehr große Ω kompensieren sich die Phasenbeiträge des D-Gliedes (Zählerfunktion) und die des I-Gliedes $\underline{G}_2(j\omega)$ so, dass als phasenbestimmende Glieder nur die beiden VZ₁-Glieder $\underline{G}_2(j\omega)$, $\underline{G}_3(j\omega)$ wirken. Die Phase für sehr große Ω beträgt somit $2 \times (\frac{\pi}{2})$.

Die Betragskennlinie erfährt eine "Drehung" nach rechts. Denn der ursprüngliche Anstieg mit +20 dB/Dekade (Zählerfunktion) wird durch die Übertragungsfunktion $\underline{G}_2(j\omega)$ gerade kompensiert.



(b) RLC-Schaltung

Durch Anwendung der Spannungsteilerformel erhält man für die gesuchte Übertragungsfunktion folgenden Zusammenhang:

$$\frac{U_R}{U_q} = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega CR}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR}$$

Dies soll mit der vorgegebenen Übertragungsfunktion übereinstimmen.

$$\frac{j\omega CR}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR} \stackrel{!}{=} \frac{j\omega\tau_1}{(1 + j\omega\tau_2)(1 + j\omega\tau_3)} = \frac{j\omega\tau_1}{1 - \omega^2\tau_2\tau_3 + j\omega(\tau_2 + \tau_3)}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$\begin{aligned} CR &= \tau_1 \\ LC &= \tau_2\tau_3 \\ CR &= \tau_2 + \tau_3 \end{aligned}$$

Auflösen nach τ_2 und τ_3 :

$$\begin{aligned}\tau_3 &= \frac{LC}{\tau_2} \\ RC &= \tau_2 + \frac{LC}{\tau_2} \\ \tau_2^2 - RC\tau_2 + LC &= 0 \\ \tau_{2(a,b)} &= \frac{RC}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{RC}{2}\right)^2 - LC}\end{aligned}$$

Positive Zeitkonstanten (physikalisch sinnvoll) erhält man, wenn die Lösungen der letzten Gleichung positiv und rein reell sind. Dazu muss gelten, d.h. der Term unter der Wurzel darf nicht negativ werden.

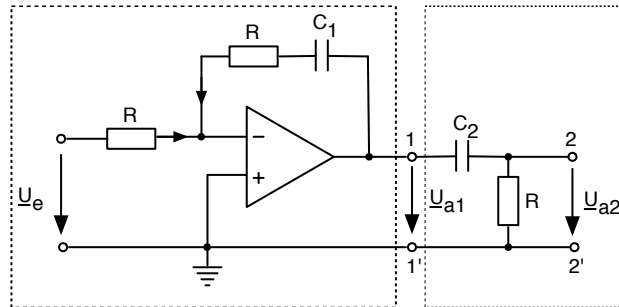
$$\begin{aligned}\left(\frac{RC}{2}\right)^2 - LC &\geq 0 \\ \left(\frac{RC}{2}\right)^2 &\geq LC \\ L &\leq \left(\frac{RC}{2}\right)^2 \frac{1}{C}\end{aligned}$$

Diese Ungleichung kann durch einen Faktor in eine Gleichung transferiert werden:

Mit $L = \alpha \frac{R^2 C}{4}$ ($\alpha \in [0 \cdots 1]$) folgt: $\tau_{2(a,b)} = \frac{RC}{2} (1 \pm \sqrt{1 - \alpha})$
 τ_3 erhält man durch Einsetzen von τ_2 in die Gleichung oben.

Aufgabe 28

Eine Wechselspannungsquelle speist eine Operationsverstärkerschaltung und nachfolgenden RC-Hochpass.



- (a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $\underline{G}_1(j\omega) = \frac{U_{a1}}{U_e}$. Führen Sie eine geeignete Normierung $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ ein und bestimmen Sie den Amplitudengang $a_{\underline{G}_1}/dB$ und den Phasengang $\varphi_{\underline{G}_1}$. Zeichnen Sie $a_{\underline{G}_1}$ und $\varphi_{\underline{G}_1}$ im Bodediagramm.
- (b) Berechnen Sie die komplexe Übertragungsfunktion $\underline{G}_2(j\omega) = \frac{U_{a2}}{U_{a1}}$ des passiven RC-Hochpassgliedes. Tragen Sie den Amplituden- und Phasengang in das Bodediagramm aus Teilaufgabe a) ein ($C_2 = \frac{1}{10} \cdot C_1$).
- (c) Zeichnen Sie die Kennlinien der Übertragungsfunktion $\underline{G}_{res}(j\omega) = \frac{U_{a2}}{U_e}$.

Lösung:

(a) Übertragungsfunktion:

$$\underline{G}_1(j\omega) = \frac{U_{a1}}{U_e} = -\frac{R + \frac{1}{j\omega C_1}}{R} = -\frac{1 + j\omega C_1 R}{j\omega C_1 R}$$

Bodediagramm:

$$a_{\underline{G}_1}/dB = 20\log \left| \frac{1 + j\omega C_1 R}{j\omega C_1 R} \right| = 20\log \left(\sqrt{1^2 + (\omega C_1 R)^2} \right) - 20\log \left(\sqrt{(\omega C_1 R)^2} \right)$$

Normierung:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ mit } \omega_0 = \frac{1}{RC_1}$$

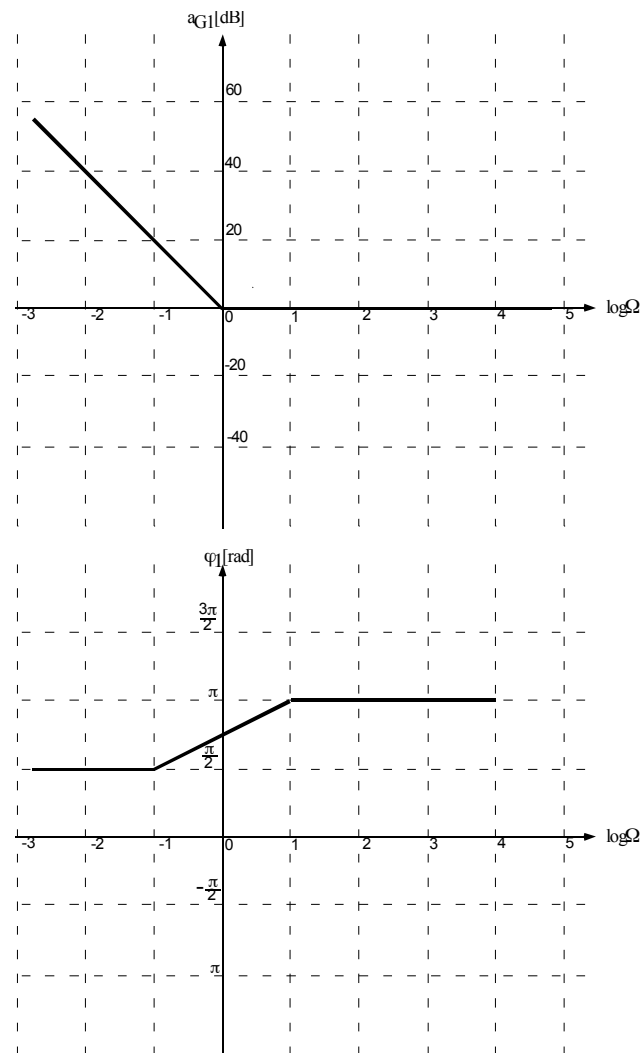
Amplitudengang:

$$\begin{aligned} a_{\underline{G}_1}/dB &= 20\log \left(\sqrt{1^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \omega_0 C_1 R \right)^2} \right) \\ &\quad - 20\log \left(\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0} \omega_0 C_1 R \right)^2} \right) \\ &= 20\log \left(\sqrt{1^2 + \Omega^2} \right) - 20\log \Omega \end{aligned}$$

Phasengang:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\underline{G}_1} &= \arg\{-1\} + \arg\{1 + j\Omega\} - \arg\{j\Omega\} \\
 &= \pi + \arctan\left(\frac{\Omega}{1}\right) - \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{\pi}{2} + \arctan(\Omega)
 \end{aligned}$$

π wird dazu addiert (oder subtrahiert), weil eine komplexe Zahl mit (-1) multipliziert einer Drehung um $\pm\pi$ entspricht!



(b) Übertragungsfunktion RC_2 – Hochpass

Die Ausgangsspannung des an den OP angeschlossenen RC_2 –Hochpass kann durch Anwenden der komplexen Spannungsteilerformel berechnet werden.

$$\begin{aligned}
 \underline{G}_2(j\omega) &= \frac{\underline{U}_{a2}}{\underline{U}_{a1}} = \frac{j\omega R_2 C_2}{1 + j\omega R_2 C_2} \\
 a_{\underline{G}_2}/\text{dB} &= 20 \log \left| \frac{j\omega C_2 R}{1 + j\omega C_2 R} \right| \\
 &= 20 \log \left(\sqrt{(\omega C_2 R)^2} \right) - 20 \log \left(\sqrt{1^2 + (\omega C_2 R)^2} \right)
 \end{aligned}$$

Mit der Normierung aus a) (dies erlaubt das Eintragen der Kennlinien von $\underline{G}_2(j\omega)$ ohne Umrechnung in das gleiche Diagramm wie $\underline{G}_1(j\omega)$)

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{\omega}{\omega_0} \text{ mit } \omega_0 = \frac{1}{RC_1} \\ a_{\underline{G}_2}/dB &= 20\log\left(\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}C_2R\right)^2}\right) \\ &- 20\log\left(\sqrt{1^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}C_2R\right)^2}\right) \\ &= 20\log\left(\sqrt{\left(\Omega\frac{C_2}{C_1}\right)^2}\right) - 20\log\left(\sqrt{1^2 + \left(\Omega\frac{C_2}{C_1}\right)^2}\right)\end{aligned}$$

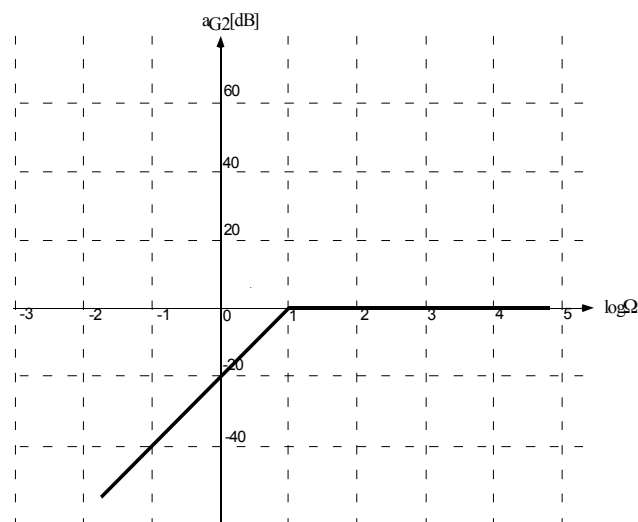
mit dem gegebenen Zusammenhang $C_2 = \frac{C_1}{10}$ folgt

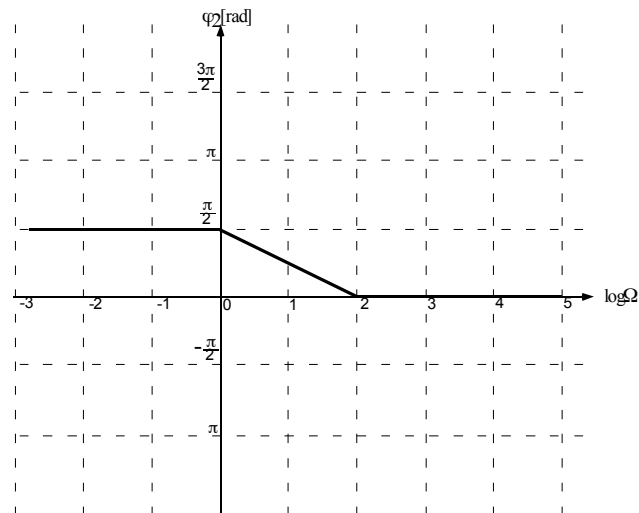
$$a_{\underline{G}_2}/dB = 20\log(10^{-1}\Omega) - 20\log\left(\sqrt{1^2 + (10^{-1}\Omega)^2}\right)$$

Die 3dB-Knickfrequenz liegt somit bei $10^{-1}\Omega = 1 \rightarrow \Omega = 10$
 $\rightarrow \log\Omega = 1$.

Phasengang:

$$\begin{aligned}\varphi_{\underline{G}_2} &= \arg\{j\Omega\} - \arg\{1 + j\Omega\} \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{10^{-1}\Omega}{1}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} + \arctan(10^{-1}\Omega)\end{aligned}$$

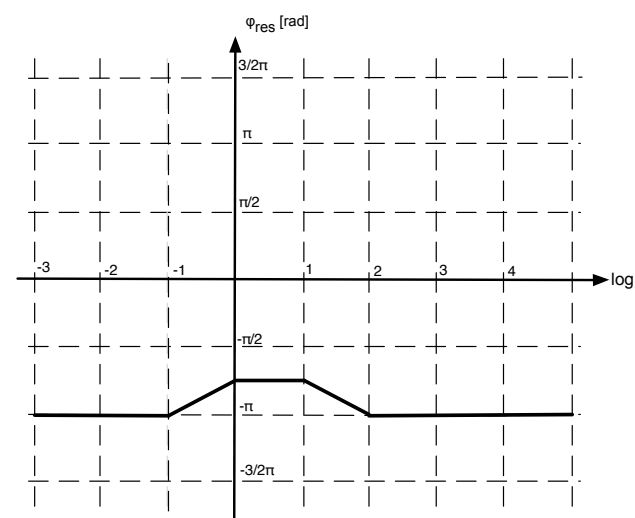
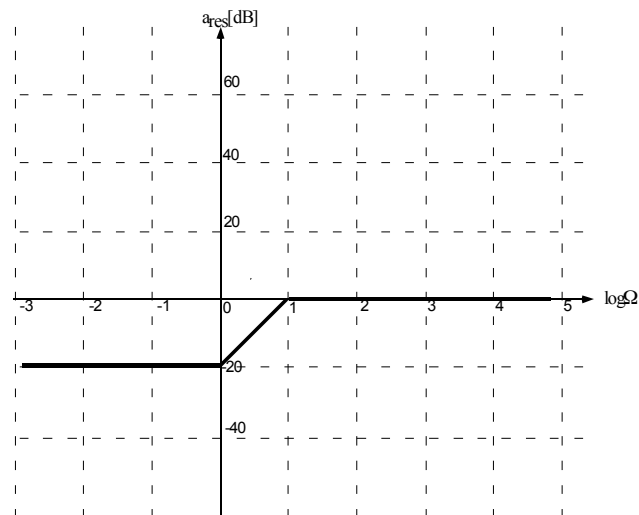




(c) Übertragungsfunktion der Schaltungen aus a) und b) zusammengefasst:

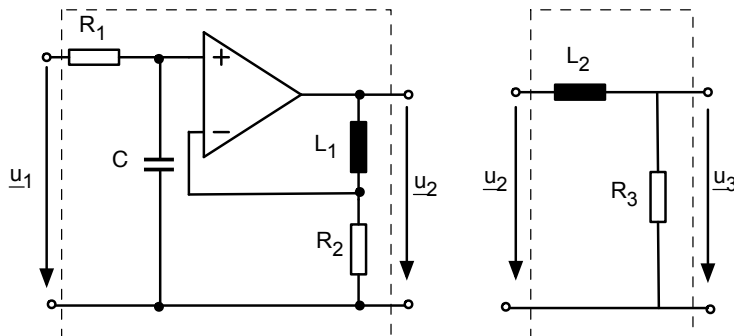
$$\underline{G}_{res}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{a2}}{\underline{U}_e} = \underline{G}_1(j\omega) \cdot \underline{G}_2(j\omega) = -\frac{1+j\omega C_1 R}{j\omega C_1 R} \cdot \frac{j\omega C_2 R}{1+j\omega C_2 R}$$

Die zeichnerische Kombination ergibt:



Aufgabe 29

Gegeben seien folgende Verstärker- und Tiefpassschaltungen mit $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $R_3 = 1k\Omega$, $L_1 = 0.1mH$, $L_2 = 200mH$, $C = 10nF$.



- (a) Skizzieren Sie die Bode-Diagramme (Amplituden- und Phasengang) des Spannungsverhältnisse $\underline{G}_1(j\omega) = \frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1}$ des Verstärkers ohne Tiefpass.
- (b) Berechnen Sie den Amplituden und Phasengang des Tiefpasses für $\underline{G}_2(j\omega) = \frac{\underline{u}_3}{\underline{u}_2}$ und zeichnen Sie auch diesen Verlauf in die Diagramme aus Teilaufgabe a) ein.
- (c) Ermitteln Sie graphisch die Bodediagramme der Gesamtschaltung.

Lösung:

- (a) Zuerst wird die Übertragungsfunktion ermittelt. Die Schaltung ist ein nicht invertierender Verstärker mit einem Spannungsteiler am Eingang. Dadurch lässt sich die Spannung am positiven Eingang folgendermaßen bestimmen:

$$\underline{U}_p = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R_1} \cdot \underline{U}_1 = \frac{1}{1 + j\omega R_1 C} \cdot \underline{U}_1$$

Auf die gleiche Art und Weise wird die Spannung am negativen Eingang bestimmt:

$$\underline{U}_n = \frac{R_2}{j\omega L_1 + R_2} \cdot \underline{U}_2$$

Bei einem idealen OP sind diese beiden Spannungen gleich groß, d.h.

$$\begin{aligned} \underline{U}_n &= \underline{U}_p \\ \frac{1}{1 + j\omega R_1 C} \cdot \underline{U}_1 &= \frac{R_2}{j\omega L_1 + R_2} \cdot \underline{U}_2 \\ \underline{G}_1(j\omega) &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R_2 + j\omega L_1}{R_2 + j\omega R_1 R_2 C} = \frac{1 + j\omega \frac{L_1}{R_2}}{1 + j\omega R_1 C} \end{aligned}$$

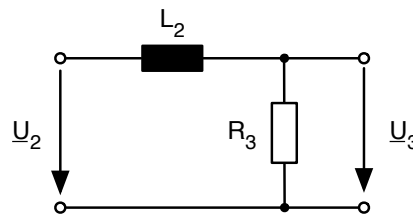
Normierung:

$$\begin{aligned}\Omega &= \omega \cdot \frac{L_1}{R_2} \rightarrow \omega = \Omega \cdot 50000s^{-1} \\ \underline{G}_1(j\omega) &= \frac{1+j\Omega}{1+jR_1C\frac{R_2}{L_1}\Omega} = \frac{1+j\Omega}{1+j0.01\Omega} \\ &= \frac{1+j\Omega}{1+j10^{-2}\Omega} \\ a_{\underline{G}_1}/dB &= 20\log \left| \frac{1+j\Omega}{1+j10^{-2}\Omega} \right| \\ &= 20\log \left(\sqrt{1^2 + \Omega^2} \right) - 20\log \left(\sqrt{1^2 + (10^{-2}\Omega)^2} \right)\end{aligned}$$

Die Knickfrequenz des ersten Terms liegt bei $\Omega = 1 \rightarrow \log\Omega = 1$, des zweiten bei $10^{-2}\Omega = 1 \rightarrow \Omega = 100 \rightarrow \log\Omega = 2$.

$$\begin{aligned}\varphi_{\underline{G}_1} &= \arg\{1+j\Omega\} - \arg\{1+j10^{-2}\Omega\} \\ &= \arctan\left(\frac{\Omega}{1}\right) - \arctan\left(\frac{10^{-2}\Omega}{1}\right) \\ &= \arctan(\Omega) - \arctan(10^{-2}\Omega)\end{aligned}$$

(b)



Per Spannungsteilerregel lässt sich der Zusammenhang zwischen Eingang und Ausgang beschreiben:

$$\underline{U}_3 = \frac{R_3}{R_3 + j\omega L_2} \cdot \underline{U}_2 = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L_2}{R_3}} \cdot \underline{U}_2$$

Daraus folgt direkt die Übertragungsfunktion

$$\underline{G}_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L_2}{R_3}}$$

Als Normierung dient $\Omega' = \omega \frac{L_2}{R_3} \rightarrow \omega = \Omega' \cdot \frac{R_3}{L_2} = \Omega' \cdot 5000s^{-1}$

$$\begin{aligned}\underline{G}_2(j\Omega') &= \frac{1}{1 + j\Omega'} \\ a_{\underline{G}_2}(j\Omega')/dB &= 20\log \left| \frac{1}{1 + j\Omega'} \right| = 0 - 20\log \left(\sqrt{1^2 + \Omega'^2} \right) \\ \varphi_{\underline{G}_2}(j\Omega') &= \arg\{1\} - \arg\{1 + j\Omega'\} \\ &= 0 - \arctan\left(\frac{\Omega'}{1}\right) = -\arctan(\Omega')\end{aligned}$$

Achtung: Um die Kurven in die Diagramme aus a) einzeichnen zu können, muss die gleiche Normierung wie dort verwendet werden!

$$\Omega' = \omega \cdot \frac{L_2}{R_3} = \Omega \cdot 50000s^{-1} \cdot \frac{L_2}{R_3} = 10\Omega$$

und damit

$$\begin{aligned}a_{\underline{G}_2}(j\Omega)/dB &= -20\log \left(\sqrt{1^2 + (10\Omega)^2} \right) \\ \varphi_{\underline{G}_2}(j\Omega) &= -\arctan(10\Omega)\end{aligned}$$

