

Nachrichtentechnik I – Organisatorisches

Holger Jäkel

Communications Engineering Lab (CEL)



- Organisatorisches
 - Organisatorisches
 - Das CEL
 - Zur Vorlesung
 - „Technisches“
 - Motivation und Übersicht
 - Literatur

- Organisatorisches
 - Organisatorisches
 - Das CEL
 - Zur Vorlesung
 - „Technisches“
 - Motivation und Übersicht
 - Literatur

■ Veranstaltung

- Umfang: 3+1 SWS, 6 LP

■ Vorlesung

- Montag, 11:30 - 13:00 Uhr, MTI
- Mittwoch, 11:30 - 13:00 Uhr, MTI, 14-tgl.
- Dozent: Holger Jäkel

■ Übung

- Mittwoch, 11:30 - 13:00 Uhr, MTI, 14-tgl.
- *Start der Übung: 25.4.2018*
- Übungsleiter: Marcus Müller

■ Kontakt

- Email: {holger.jaekel, marcus.mueller2}@kit.edu
- Telefon: 0721-608 {46272, 46275}
- Sprechstunden: Nach Vereinbarung



Termine

Woche	Montag	Mittwoch
16.4.-22.4.	VL	VL
23.5.-29.5.	VL	Ü
30.4.-06.5.	VL	VL (5)
07.5.-13.5.	VL	Ü
14.5.-20.5.	VL	VL
21.5.-27.5.	-	Ü (3)
28.5.-03.6.	VL	VL (10)
04.6.-10.6.	VL	Ü
11.6.-17.6.	VL	VL
18.6.-24.6.	VL	Ü (5)
25.6.-01.7.	VL (15)	VL
02.7.-08.7.	VL	Ü (6)
09.7.-15.7.	VL	VL
16.7.-22.7.	VL (20)	VL/Ü (Reserve)

■ Prüfung

■ Datum und Modus:

- 3.9.2018, 11:00 - 14:00 Uhr
- 3 h schriftlich

■ Hilfsmittel:

- Ein nicht programmierbarer Taschenrechner
- Ein beidseitig von eigener Hand mit Bleistift, Kugelschreiber, Füller o. Ä. beschriebenes A4-Blatt (Original, keine Kopie)

■ **An- und Abmeldung:** online

■ **Falls nicht online angemeldet:**

- Abgabe der Prüfungsanmeldung im Sekretariat des CEL.
- Zur Prüfung Immatrikulationsbescheinigung mitbringen!

■ Materialien

- erhältlich über ILIAS
- Passwort:

- Organisatorisches
 - Organisatorisches
 - **Das CEL**
 - Zur Vorlesung
 - „Technisches“
 - Motivation und Übersicht
 - Literatur



- Grundlagenfächer
 - Wahrscheinlichkeitstheorie (Jäkel)
 - Nachrichtentechnik I (Jäkel)

- Modellfächer¹
 - Praktikum *Nachrichtensysteme* (Jäkel)
 - *Software Radio* (N.N.)

 - Nachrichtentechnik II (Jäkel)
 - Angewandte Informationstheorie (Jäkel)
 - *Signalverarbeitung in der Nachrichtentechnik* (Jäkel)
 - *Advanced Radio Communications 2* (Jäkel)
 - *Seminar: Ausgewählte Kapitel der NT* (Jäkel)

¹Kursiv geschriebene Vorlesung finden im Sommersemester statt; ausgegraute Kurse sind gegenwärtig unklar, werden evtl. nach Bestellen der Nachfolger wieder angeboten.

- Modellfächer (ctd.)
 - *Verfahren der Kanalcodierung (Friedrichs, Tesat)*
 - Das Berufsfeld des Ingenieurs in modernen Unternehmen (Klausing, VDE)
 - Strategisches Management (Renk, BP)
 - Spectrum Management (Löffler, LS telcom)

- Abschlussarbeiten

- Modelle²
 - 14: Nachrichtensysteme
 - 16: Kommunikationstechnik (mit IHE und IPQ)
 - 17: Information and Communication (mit IHE und IPQ)
 - 19: Ausrüstungssysteme der Luft- und Raumfahrt (mit ITE und IHE)

²Gehen trotz Wechsel des Lehrstuhlinhabers fast „glatt“; dennoch bitte Rücksprache halten.

■ Themengebiete („alt“)

- Software Defined Radio und Cognitive Radio
- Dynamische Spektrumsallokation
- Rekonfigurierbare Architekturen in der Kommunikation
- Ad-hoc Netze
- Ultra-Wideband Systeme
- CDMA-Systeme
- OFDM-Systeme
- Funksignalanalyse
- Mobilfunksysteme
- Radarsignalverarbeitung

■ Projektpartner („alt“)

- Industrie
- EU
- DFG
- BMBF
- Bundesnetzagentur (RegTP)

- Organisatorisches
 - Organisatorisches
 - Das CEL
 - **Zur Vorlesung**
 - „Technisches“
 - Motivation und Übersicht
 - Literatur

Lehrbuch zur Vorlesung

[Jon11] F. Jondral, *Nachrichtenübertragung*, Schlembach, 2011

Hinweis

- Die vorliegenden Folien orientieren sich vom Grundsatz an dem Lehrbuch [Jon11].
- Dennoch ergeben sich Unterschiede:
 - Der Aufbau (Reihenfolge und Gruppierung der Kapitel) weicht ab. Die in der Vorlesung gewählte Form soll das Verständnis für die Nachrichtentechnik erleichtern.
 - Auf Unterschiede in der Notation wird gesondert hingewiesen. Insbesondere sind zu nennen: Bezeichnungen der Signale im Basisband und Bandpassbereich; Definition der Autokorrelationsfunktion.

- Grundlagen der Nachrichtentechnik
 - Proakis, Salehi, *Digital Communications*, McGraw Hill, 2008
 - Kammeyer, *Nachrichtenübertragung*, Teubner, 1995
 - Tse, Viswanath, *Fundamentals of Wireless Communication*, Cambridge University Press, 2008
 - Gallager, *Principles of Digital Communications*, Cambridge University Press, 2008
 - Sklar, *Digital Communications*, Prentice Hall, 2001
 - Kroschel, *Datenübertragung*, Springer, 1991
- Weitere Literatur ist in den jeweiligen Kapiteln angegeben

- Primär: Wissen der vermittelten Inhalte
- Sekundär:
 - Verständnis der Darstellung von Nachrichtentechnik durch abstrakte Methoden („Hinter die Gleichungen schauen“)
 - Reaktivieren früher gelernter Inhalte („Wofür war das eigentlich gut?“)
 - Bereitschaft zum lockeren Herangehen an Probleme

- Die Vorlesung basiert auf folgenden Komponenten³:
 - Folien als Gerüst, die thematisch durch die Vorlesung führen und bereits einen großen Teil des Inhalts abdecken
 - Tafel zur ergänzenden Bearbeitung/Erklärung
 - Simulationen zur Anwendung/Visualisierung des Gelernten
 - Buch zum Nachlesen gewisser Ergänzungen und Details

- Demnach erheben die Folien keinen Anspruch auch Vollständigkeit, sondern sind in Zusammenhang mit den Tafelanschrieben zu sehen.

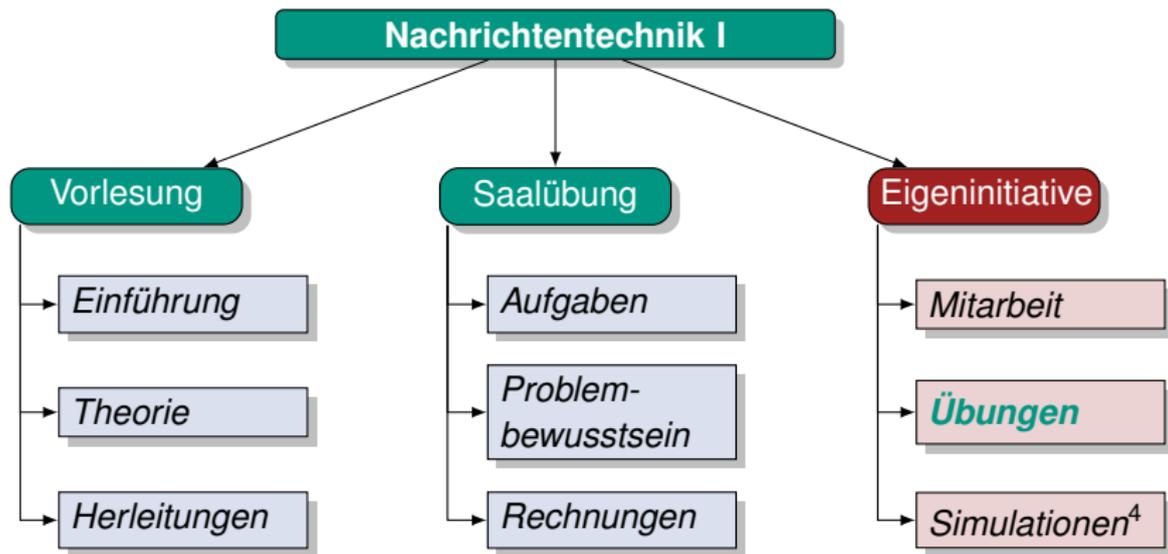
³ . . . und natürlich der Übung.

- Zwischenfragen sind immer gerne gesehen
- Das Forum kann unter der Maxime „von Studierenden für Studierende“ u. U. die Erklärung sinnvoll ergänzen. Hier werde ich ebenfalls reinschauen und (bei einem Stocken der Diskussion) weiterhelfen.
- Des Öfteren findet sich auf den Folien der Hinweis „**Übung**“. Diese können und sollen Sie selbstständig bearbeiten. Falls es zu schwierig ist oder Sie eine Lösung überprüft haben wollen, können Sie gerne auf mich zukommen.



- Gelegentlich stellen die Folien Feinheiten/Probleme zur Diskussion, die weder auf der Folie mit klarem ja/nein bzw. richtig/falsch beantwortet werden, noch bei der gemeinsamen Diskussion unbedingt eine klare Antwort erreichen (sollen). Dies dient dem Zweck, Bewusstsein für kritische Punkte zu schaffen und zum Nachdenken anzuregen.
- Dementsprechend befinden sich auf den Folien – für einen Vortrag außergewöhnlich – viele Fußnoten, die Feinheiten klären oder provokativ neue Fragen aufwerfen.





⁴Nicht unterschätzen! Extrem wertvoll zur Visualisierung, Überprüfen des Verständnisses, Gefühl für Realisierungsaspekte, „Mathe-zu-Code“

⁵... natürlich sinngemäß auch für andere Vorlesungen gültig...

- Organisatorisches
 - Organisatorisches
 - Das CEL
 - Zur Vorlesung
 - „Technisches“
 - Motivation und Übersicht
 - Literatur



- Jupyter Notebooks: einfaches und intuitives Arbeiten mit Python⁶
- Einfache Installation: Anaconda
 - Bringt bereits Python, Jupyter und alle benötigten Pakete mit
 - Quelle: <https://www.continuum.io/downloads> (Python 3.5 Version)
- Zugriff auf Jupyter über den Anaconda Navigator oder die Kommandozeile
- Simulationen im Notebook-Format (Endung: .ipynb) lassen sich aus Jupyter heraus öffnen und bearbeiten



⁶...und anderen Sprachen...

- An einigen Stellen⁷ erlaubt sich die im Folgenden präsentierte Darstellung „mathematische Faulheit“. Damit werden manche mathematische Feinheiten im Interesse der leichteren Verständlichkeit und der zeiteffizienten Darstellung übergangen, sofern sie nicht direkte Voraussetzung für das Verständnis oder die Umsetzung der Aussagen sind.
- Bei Interesse ist dies dargestellt in:
 - [Gal08]: R. Gallager, *Principles of Digital Communications*, Cambridge University Press, 2008
 - [Lap09]: A. Lapidoth, *A Foundation in Digital Communication*, Cambridge University Press, 2009

⁷ Etwa bei Fragen der Existenz von Integralen, der Vertauschung von Integralen und Grenzwerten etc.

- Signale werden durch Kleinbuchstaben ($x(t)$, $x[n]$), deren Bildbereiche durch Großbuchstaben ($X(z)$, $X(f)$, $X[k]$) gekennzeichnet.
- Runde Klammern symbolisieren kontinuierliche Variablen/Wertebereich, eckige Klammern symbolisieren diskrete/abgetastete Größen.
- Vektoren des \mathbb{C}^n oder des \mathbb{R}^n werden durch kleine fettgedruckte Buchstaben gekennzeichnet; Bsp.: $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$
- Matrizen aus $\mathbb{C}^{n \times n}$ werden durch große fettgedruckte Buchstaben gekennzeichnet; Bsp.: $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$
- Die komplexe Konjugation wird als \mathbf{x}^* , \mathbf{A}^* geschrieben, während komplexe Konjugation bei gleichzeitiger Transposition mit $\mathbf{A}^H = (\mathbf{A}^*)^T$ notiert wird.
- Zufallsgrößen werden durch Großbuchstaben gekennzeichnet. Vektoren von Zufallsgrößen als fettgedruckte Großbuchstaben; Bsp.: \mathbf{X} , \mathbf{X}

- Organisatorisches
 - Organisatorisches
 - Das CEL
 - Zur Vorlesung
 - „Technisches“
 - **Motivation und Übersicht**
 - Literatur

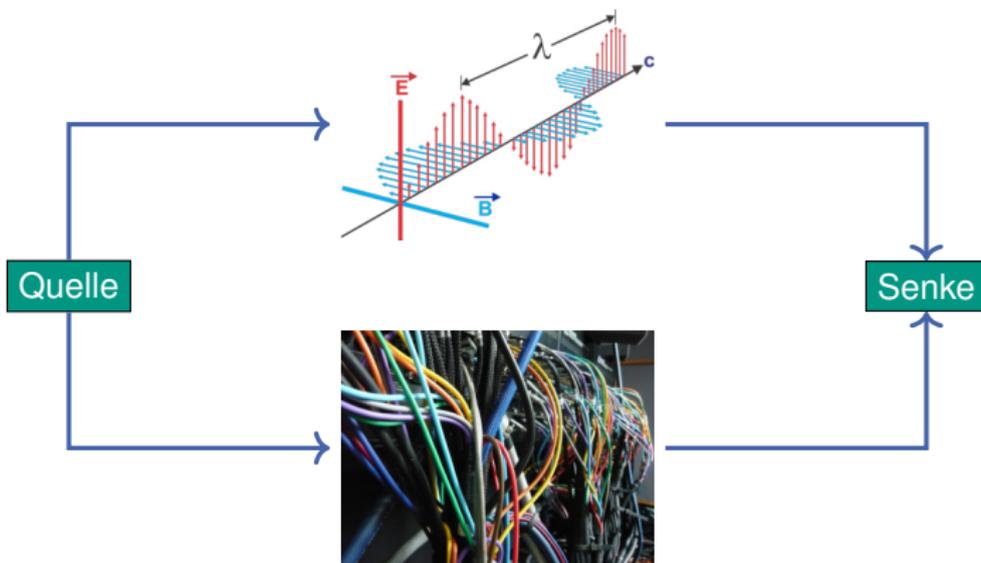


■ Ziel/Aufgabe der Nachrichtentechnik:

- Übertragung (digitaler) Daten zwischen Teilnehmern
- Verwendung physikalischer Träger (Spannungen, Ströme, elektromagnetische Wellen) zur Übermittlung der Nachrichten
- Bereitstellen von Methoden und Algorithmen zur bestmöglichen Erledigung dieser Aufgabe
- Betrachten der effektiven Realisierung von Algorithmen



■ Graphische Darstellung:⁸



⁸Bildquellen:

<https://pixabay.com/de/elektromagnetische-wellen-wellenlänge-1526374/>
<https://www.flickr.com/photos/wordridden/5067660452>

■ Mechanismen und Methoden:

- „Geeignete“ Darstellung der Sendedaten: *Quellencodierung*
- Aufprägen der (digitalen) Information auf physikalische Signale: *Modulation*
- Daten-Entscheidung im Empfänger: *Entscheidungstheorie, Demodulation*
- Verschieben der Signale in einen geeigneten Frequenzbereich: *Mischen*⁹
- Aufprägen von Fehlerschutz: *Kanalcodierung*
- Beseitigung der Fehler (sofern möglich): *Kanaldecodierung*
- Identifikation der maximal möglichen Übertragungskapazität: *Kanalkapazität*

⁹Im Englischen aufgrund des Modulationssatzes der Fouriertransformation oft als *modulation* bezeichnet.

- **Mechanismen und Methoden:** (ctd.)
 - Beschreibung des Übertragungsmediums: *Kanalmodellierung, Rauschen*
 - Anpassen der Empfangsparameter: *Synchronisation*
 - Beseitigen der Kanaleinflüsse: *Entzerrung*

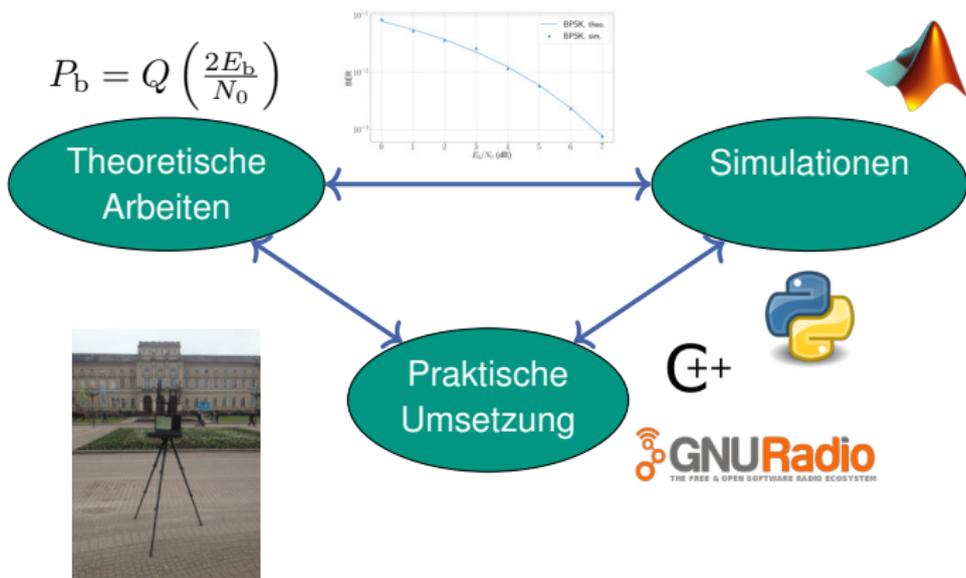
 - Systemkonzepte: *Spreizverfahren, OFDM, MIMO-Systeme*

 - Kommunikationsnetze: *Vielfachzugriff, OSI-Modell,*

 - *Systembeispiele*

- **Bemerkung:** Darüber hinaus gibt es viele kleine „Helferlein“, wie z.B. Interleaver, Scrambler, etc., welche bei der Realisierung der Methoden hilfreich sind.

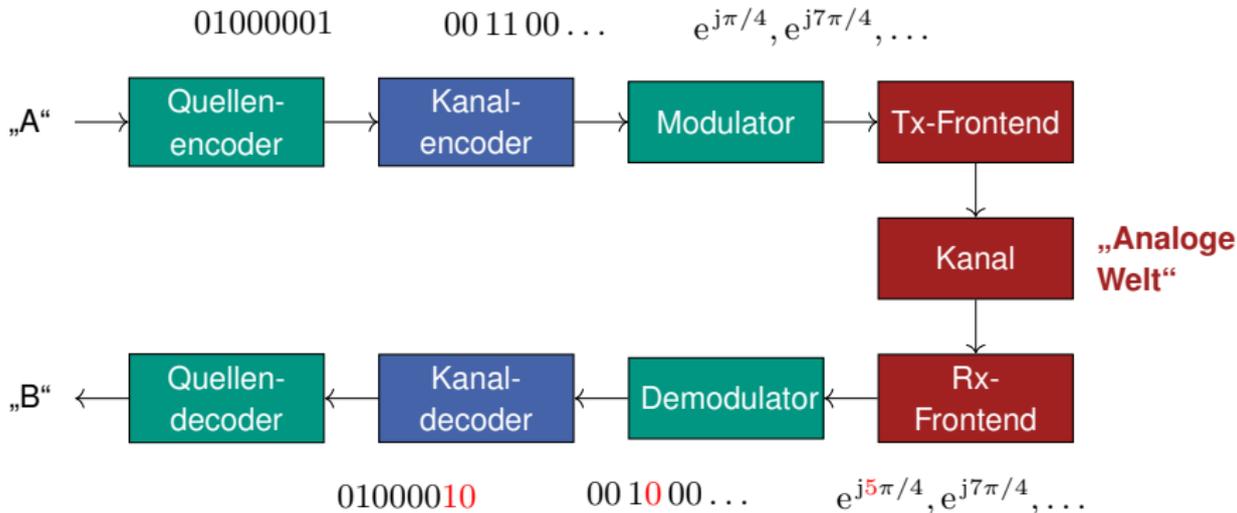
■ Tätigkeiten im Bereich der NT/am CEL¹⁰



¹⁰Bildquellen: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:{Gnuradio_logo.svg, Python.svg, C_plus_plus.svg, Matlab_Logo.png}



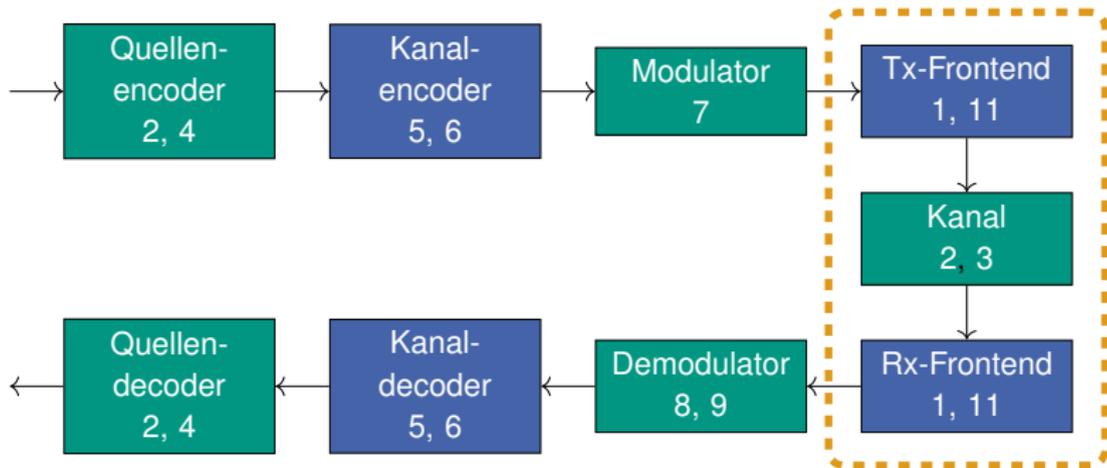
■ Übersicht:^{11 12}



¹¹ Im Kanal kommt eine Frequenzverschiebung hinzu, die graphisch nicht wiedergegeben ist.

¹² Die Auswirkungen der Fehler sind zur Verdeutlichung überdramatisiert bzw. unrealistisch dargestellt.

Einordnung der Kapitel von [Jon11]



Kommunikations-
netze
12, 15

Systemkonzepte
7, 11, 15

Empfangs-
signalverarbeitung
13, 14

■ Kapitel der Vorlesung:

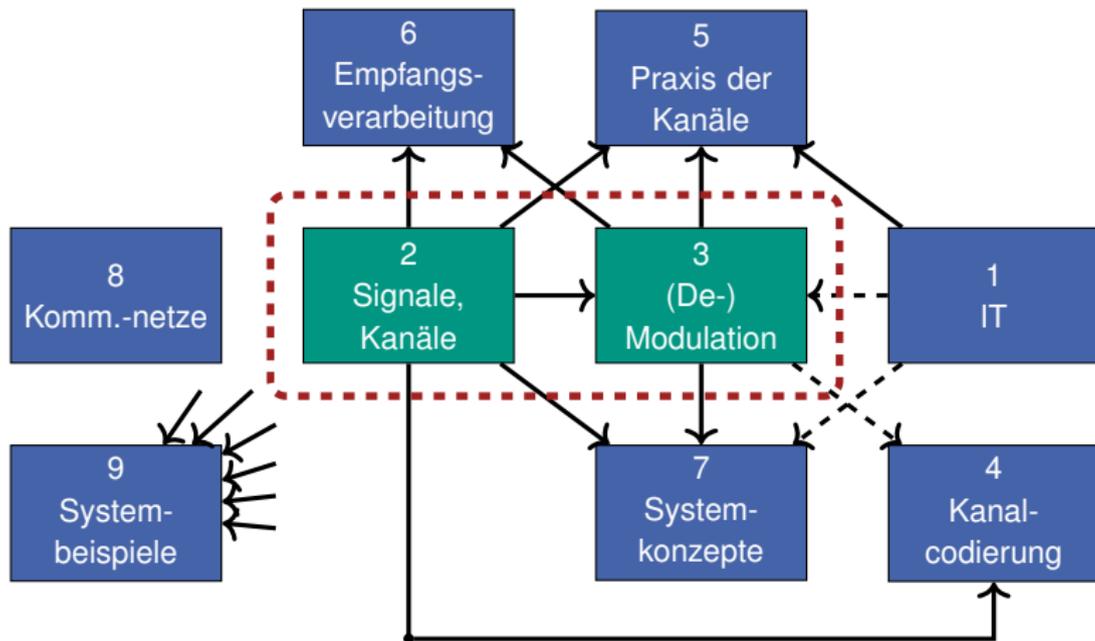
- Grundlagen der Informationstheorie
- Signale, Systeme und Kanäle
- Modulation und Demodulation
- Kanalcodierung und -decodierung
- Theorie und Praxis der Nachrichtenkanäle
- Empfangssignalverarbeitung
- Systemkonzepte
- Grundlagen der Kommunikationsnetze
- Systembeispiele



■ Kapitel der Vorlesung:

Nr.	Inhalt	VL-Termine
1	Grundlagen der Informationstheorie	1-2
2	Signale, Systeme und Kanäle	3-5
3	Modulation und Demodulation	6-9
4	Kanalcodierung und -decodierung	10-13
5	Theorie und Praxis der Nachrichtenkanäle	14
6	Erfangssignalverarbeitung	15-16
7	Systemkonzepte	17-19
8	Grundlagen der Kommunikationsnetze	20
9	Systembeispiele	20





- Organisatorisches
 - Organisatorisches
 - Das CEL
 - Zur Vorlesung
 - „Technisches“
 - Motivation und Übersicht
 - Literatur



- [Jon11] F. Jondral, *Nachrichtenübertragung*, Schlembach, 4. Auflage, 2011
- [Fi77] Prof. A. G. Fischer, *Über das Lernen*, aus dem Vorwort zum Vorlesungsscript "Werkstoffe der Elektrotechnik", Uni Dortmund, 1977
- [Gal08] R. Gallager, *Principles of Digital Communications*, Cambridge University Press, 2008
- [Lap09] A. Lapidoth, *A Foundation in Digital Communication*¹³, Cambridge University Press, 2009

¹³online erhältlich unter: http://www.afidc.ethz.ch/A_Foundation_in_Digital_Communication/Home.html

Nachrichtentechnik I – Informationstheorie

Holger Jäkel

Communications Engineering Lab (CEL)



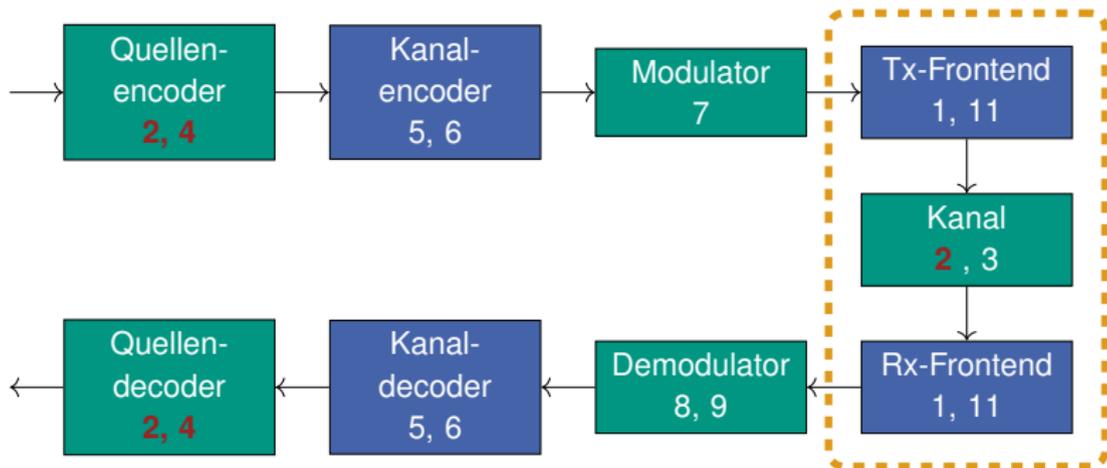
- 1 Grundlagen der Informationstheorie
 - Grundlegende Betrachtungen
 - Informationstheorie diskreter Quellen
 - Informationstheorie diskreter Kanäle
 - Lernziele
 - Literatur

- Folgende Diskussionen erfolgen gemäß¹

[Jon11]: F. Jondral, *Nachrichtenübertragung*, Schlembach, 4. Auflage, 2011

¹Von dort entstammt die Struktur der Folien, die Formeln und die meisten Bilder.

Einordnung der Kapitel von [Jon11]



Kommunikations-
netze
12, 15

Systemkonzepte
7, 11, 15

Empfangs-
signalverarbeitung
13, 14

- 1 Grundlagen der Informationstheorie
 - Grundlegende Betrachtungen
 - Informationstheorie diskreter Quellen
 - Informationstheorie diskreter Kanäle
 - Lernziele
 - Literatur

- **Frage:** Was ist Information?
- **Antwort:** Wurde – in bahnbrechender Art und Weise – in

[Sha48]: C. E. Shannon, *A Mathematical Theory of Communications*, The Bell System Technical Journal, Vol. XXVI, 1948²

gegeben.

²Online verfügbar unter
<http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=6773067>

- **Bis Shannon:** Nachrichtenübertragung ohne „festen Boden“, teilweise experimentell, teilweise intuitiv
- **Idee Shannon:** Verwende (mathematische und abstrakte) Modelle für die Modellierung der Vorgänge bei Nachrichtenübertragung
- Graphisch:³



³Nach [Sha48]

■ Begrifflichkeiten:

- Eine *Quelle* emittiert (Quell-)Symbole X und erzeugt damit zu sendende Nachrichten.
- Der *Sender* codiert die Quellsymbole zur Übertragung, so dass eine für den Kanal passende Form erreicht wird.
- Ein *Kanal* überträgt diese Nachrichten mit Hilfe von (Kanal-)Symbolen; er wird durch Übergangswahrscheinlichkeiten charakterisiert.
- Der *Empfänger* erstellt aus den beobachteten Kanalausgängen Schätzungen der Ausgangssymbole, bezeichnet als Y .
- Die *Senke* erhält Y und stellt die Nachrichten in der gewünschten Form dar.



■ Beispiele:

- Quelle: Tastatureingabe \rightarrow Buchstaben des Alphabets; Codierung \rightarrow ASCII-Darstellung der Buchstaben in Bitwörtern

$$\begin{aligned}\text{„NT I“} &\rightarrow 0x4E\ 0x54\ 0x20\ 0x49 \\ &= 01001110\ 01010100\ 00100000\ 01001001\end{aligned}$$

- Sender: Codieren der Sendebits zum Schutz gegen Übertragungsfehler; einfache Möglichkeit: N -faches Wiederholen (hier: $N = 3$)

$$\begin{aligned}\text{„N“} &\rightarrow 0x4E = 01001110 \\ &\rightarrow 000\ 111\ 000\ 000\ 111\ 111\ 111\ 000\end{aligned}$$

- Kanal: Verfälscht die Nachrichten

$$\begin{aligned}\text{„N“} &\rightarrow 000\ 111\ 000\ 000\ 111\ 111\ 111\ 000 \\ &\rightarrow 010\ 111\ 000\ 010\ 111\ 111\ 100\ 000\end{aligned}$$



■ Beispiele:

- Empfänger: schätzt Kanaleingänge basierend auf seinen Beobachtungen (hier: „Mehrheitsentscheidung“)

$$010\ 111\ 000\ 010\ 111\ 111\ 100\ 000 \rightarrow 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0$$

- Senke: Rückcodieren der Nachrichten

$$0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \rightarrow 01001100 = 0x4C$$
$$\rightarrow \text{„L“}$$

Das vorliegende Kapitel beschäftigt sich mit der Darstellung und der (math.) Analyse. Fragen der technischen Realisierung und theoretischen Leistungsfähigkeit der Übertragung werden in späteren Kapiteln behandelt.

Das folgende Kapitel bietet nur einen kurzen Überblick zur Informationstheorie. Über das Diskutierte hinaus existiert ein reichhaltiges Feld, das sich mit verschiedenen Typen von Quellen und Kanälen, Kompression, Netzwerkinformationstheorie u. v. a. m. beschäftigt.

- 1 Grundlagen der Informationstheorie
 - Grundlegende Betrachtungen
 - Informationstheorie diskreter Quellen
 - Information und Entropie einer Quelle
 - Codes und Codierung
 - Das Codierungstheorem von Shannon und der Shannon-Code
 - Huffman-Codierung
 - Praktische Verfahren
 - Informationstheorie diskreter Kanäle
 - Lernziele
 - Literatur



Definition

Eine *diskrete Quelle* ist ein Mechanismus, der zu diskreten Zeitpunkten zufällige Symbole aus $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_N\}$ generiert. Sie wird beschrieben durch eine Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ mit den W'keiten

$$P(x_i) = P(X = x_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

- **Bemerkung:** In der „reinen“ Informationstheorie ist der Zeittakt oft nicht von Belang. Falls die Betrachtungen auf einen Zeittakt bezogen werden, wird darauf hingewiesen.

- **Ziel:** Messen der Information von Ereignissen
- **Frage:** Was ist Information?
- **Antwort:** Informativ ist, was mit geringer Wahrscheinlichkeit auftritt

Definition

Die in einem Elementarereignis $\{X = x_i\}$ enthaltene *Information* ist:

$$I_X(x_i) := \log_2 \frac{1}{P(x_i)} = -\log_2 P(x_i) \quad (\text{bit})$$

Wegen $P(x_i) \in [0, 1]$ folgt $I_X(x_i) \geq 0$.

■ Beispiele:

- Für eine binäre Quelle ($\mathcal{X} = \{0, 1\}$) mit gleichwahrscheinlichen Bits folgt:

$$I(0) = I(1) = -\log_2 \left(\frac{1}{2} \right) = 1 \quad (\text{bit})$$

- Für eine „schiefe“ Binärquelle mit $P(1) = 1/(3 \cdot 10^7)$ folgt:⁴

$$I_X(1) = -\log_2 \left(\frac{1}{3 \cdot 10^7} \right) = \log_2 (3 \cdot 10^7) = 24.84 \quad (\text{bit})$$

$$I_X(0) = -\log_2 \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 10^7} \right) = 4.81 \cdot 10^{-8} \quad (\text{bit})$$

⁴Entspricht etwa der Wahrscheinlichkeit bei einem Flugzeugabsturz in Europa zu sterben.



■ Bemerkungen:

- Nur W'keiten der Ereignisse sind wichtig, die eigentlichen Werte sind nicht von Belang.
- Die Einheit „bit“ ist eine Pseudoeinheit, die sich durch den Logarithmus zur Basis 2 ergibt. Das Beispiel der „fairen“ Binärquelle stellt einen Zusammenhang zu „Dateneinheit Bit“ her.
- Die Information ist umso größer, je unwahrscheinlicher ein Ereignis ist.
- Werden K (stochastisch) unabhängige Beobachtungen b_1, \dots, b_K betrachtet, so folgt für den Block von K Beobachtungen:^{5 6}

$$I((b_1, \dots, b_K)) = I(b_1) + I(b_2) + \dots + I(b_K)$$

Bei gleichwahrscheinlichen Binärsymbolen ergibt sich

$$I((b_1, \dots, b_K)) = K \quad (\text{bit}).$$

⁵**Übung:** Nachweis; Hinweis: Was war die Definition der stoch. Unabhängigkeit?

⁶Die doppelten Klammern entstehen, da die Information des Vektors (b_1, \dots, b_K) berechnet wird.



- **Bisher:** Beschreiben der Information einzelner Ereignisse
- **Gesucht:** Mittlere Information pro Quellsymbol

Definition

Die *Entropie* einer Quelle ist

$$H(X) = \sum_{i=1}^N P(x_i) I(x_i) = - \sum_{i=1}^N P(x_i) \log_2(P(x_i)).$$

■ Bemerkungen:

- Die Entropie beschreibt die mittlere Information pro Quellsymbol.
- Da die Information nicht-negativ ist, gilt dies auch für die Entropie.
- Die Entropie wird maximal, falls alle Symbole mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten:^{7 8}

$$\max_{P(x_i)} H(X) = \log_2(N)$$

$$\arg \max_{P(x_i)} H(X) = \left(\frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N} \right)$$

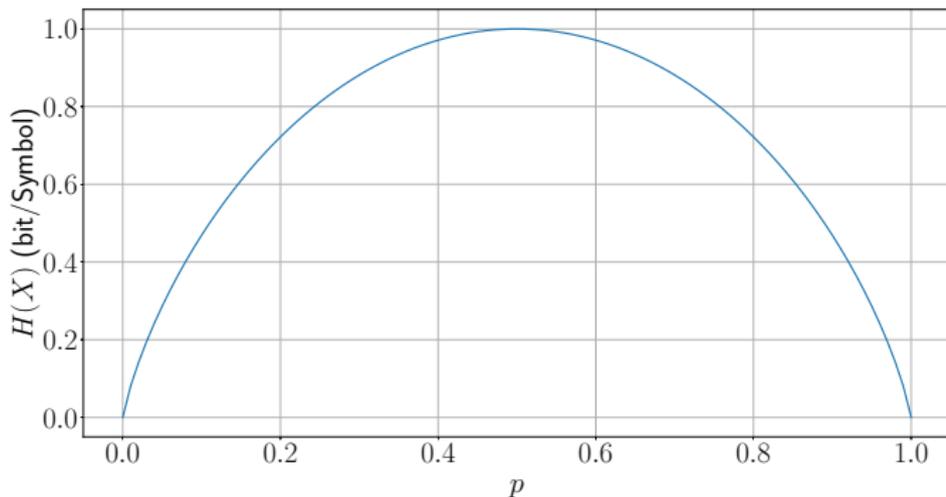
⁷**Übung:** Nachweis; Hinweis: Entropie für Gleichverteilung und $\ln(x) \leq x - 1$.

⁸Interpretieren Sie das Resultat anschaulich.



- **Beispiel:** Binärquelle mit $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ und $p := P(0)$ hat Entropie

$$H_b(p) := -p \log_2(p) - (1 - p) \log_2(1 - p)$$



■ Erinnerung:

- Eine *Quelle* wird durch eine Zufallsvariable beschrieben, die Werte aus $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_N\}$ mit den Wahrscheinlichkeiten $P(x_n)$ liefert.
- Die maximale Entropie einer Quelle mit N möglichen Symbolen ist

$$H_0 = \log_2 N.$$

und wird als *Entscheidungsgehalt der Quelle* bezeichnet.

- **Terminologie:** Unter *Quellencodierung* versteht man die Darstellung der von der Quelle gelieferten Zeichen.



Definition

Eine (*Quellen-*)*Codierung* bildet die Symbole einer Quelle auf eine Menge \mathcal{C} von Codewörtern (Bitfolgen) ab:

$$C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}.$$

Die Länge eines Codeworts ist $L(x_n)$. Die *mittlere Codewortlänge* einer Codierung lautet

$$L = \sum_{n=1}^N P(x_n) L(x_n).$$

■ Bemerkungen:

- Oft ist⁹ $\mathcal{C} \subseteq \{0, 1\}^*$; dann handelt es sich um *binäre Codierung*.
- Haben alle Codewörter dieselbe Länge, so handelt es sich um einen *Code fester Länge*; sind die Längen verschieden, so ist es ein *Code variabler Länge*.

■ Beispiele:

- Bei Morse-Code: Wörter variabler Länge bestehend aus $\mathcal{C} \subseteq \{., -, \text{SPACE}\}^*$
- In 7-Bit ASCII ist die Codewortlänge immer 7. Somit ist $L(x_n) = 7$ und damit $L = 7$.

⁹Gängige Notation: $A^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$; Folgen beliebiger Länge mit Elementen aus A



Definition

Eine Quellencodierung besitzt die *Präfixeigenschaft*, falls kein Codewort dem Anfang eines anderen Codeworts entspricht.

- **Bemerkung:** Für Codes mit Präfixeigenschaft sind die Codewörter inhärent voneinander getrennt. Die Symbole (Codewörter) müssen nicht durch Trennzeichen („Kommata“) unterbrochen werden; der Code heißt *kommafrei*.



- (Binär-)Codes mit Präfixeigenschaft können auf „natürliche Weise“ mit Knoten in (Binär-)Bäumen identifiziert werden:
 - Ausgehend von einer Wurzel wird (binär) verzweigt
 - Wird ein Knoten als Codewort-Knoten gewählt, so sind nachfolgende Knoten „gesperrt“ (Präfixeigenschaft)
 - Codewort ergibt sich aus Pfad zum Codewort-Knoten

■ Bemerkungen:

- Sind alle möglichen Endknoten mit Codewörtern belegt, so gilt

$$\sum_{n=1}^N 2^{-L(x_n)} = 1.$$

- Obige Aussage lässt sich verallgemeinern. Dies führt auf die *Kraft'sche Ungleichung*, die in weiterführenden Vorlesungen diskutiert wird.

■ Beispiel:

- Betrachte die Quelle mit 10 Symbolen $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{10}\}$ und

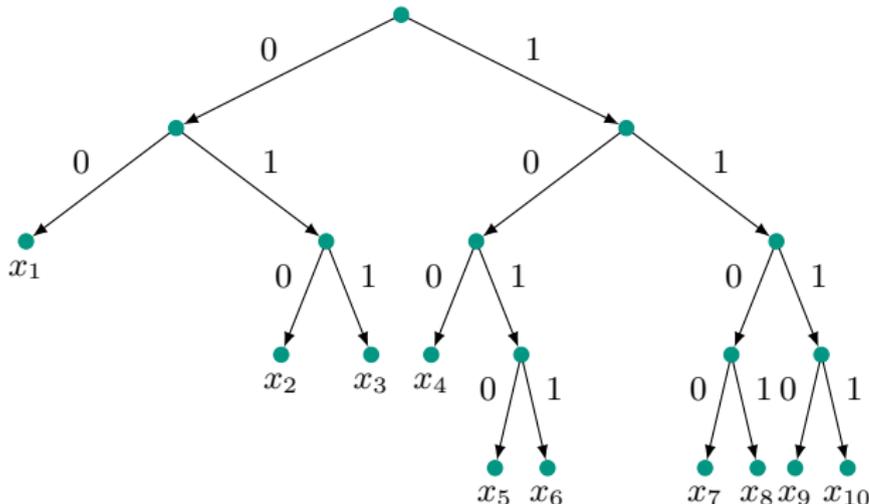
$$P(x_n) = \begin{cases} 0.4, & n = 1 \\ 0.1, & n = 2, 3, 4 \\ 0.05, & n = 5, \dots, 10 \end{cases}$$

Es folgt $H_0 = 3.322$ bit/Symbol und $H(X) = 2.822$ bit/Symbol. (Übung: Nachrechnen)



■ Beispiel: (ctd.)

- Eine mögliche (vorläufig rein willkürliche) Baumdarstellung eines Codes lautet



- Die entstehenden Codewörter

00, 010, 011, 100, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111

besitzen mittlere Codewortlänge $L = 2.9$ bit/Symbol.

Definition

Eine Quellencodierung heißt *günstiger* als eine zweite Quellencodierung, falls sie eine kleinere mittlere Wortlänge besitzt.

Eine Codierung heißt *optimal*, falls sie günstiger als alle anderen Codierung ist, also die minimale mittlere Codewortlänge besitzt.



Das Codierungstheorem von Shannon und der Shannon-Code

Theorem (Codierungstheorem von Shannon)¹⁰

Für jede Quelle und jede Binärcodierung mit Präfixeigenschaft stellt die Entropie eine untere Schranke für die mittlere Codewortlänge dar:

$$H(X) \leq L.$$

Für jede beliebige Quelle existiert eine Binärcodierung mit Präfixeigenschaft und

$$H(X) \leq L < H(X) + 1.$$

¹⁰Für weitere Details und die Nachweise siehe auch [Sha48], [CT06].



Das Codierungstheorem von Shannon und der Shannon-Code

■ Shannon-Codierung¹¹

- Betrachte eine Quelle \mathcal{X} mit zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $P(x_n)$
- Sortiere Symbole gemäß absteigender Wahrscheinlichkeiten:

$$P(x_1) \geq P(x_2) \geq \dots \geq P(x_N)$$

- Bilde

$$Q_n = \sum_{i=1}^{n-1} P(x_i)$$

- Wähle Codewortlängen gemäß:

$$2^{-L(x_n)} \leq P(x_n) \leq 2^{-L(x_n)+1}$$

- Binärcodierung von Q_n , abgebrochen nach $L(x_n)$ Stellen, ergibt die Codierung.

¹¹Weitere Details siehe [CT06, S. 115, 150]

Das Codierungstheorem von Shannon und der Shannon-Code

■ Beispiel: ¹² (Shannon-Codierung)

	$P(x_n)$	Q_n	$L(x_n)$	$(Q_n)_2$	Code
x_1	0.25	0.0	2	0.00_2	00
x_2	0.2	0.25	3	0.010_2	010
x_3	0.2	0.45	3	$0.011 \dots_2$	011
x_4	0.15	0.65	3	$0.101 \dots_2$	101
x_5	0.07	0.8	4	$0.1100 \dots_2$	1100
x_6	0.05	0.87	5	$0.11011 \dots_2$	11011
x_7	0.025	0.92	6	$0.111010 \dots_2$	111010
x_8	0.025	0.945	6	$0.111100 \dots_2$	111100
x_9	0.02	0.97	6	$0.111110 \dots_2$	111110
x_{10}	0.01	0.99	7	$0.1111110 \dots_2$	1111110
		1.0			

¹²Datei: shannon.ipynb

Das Codierungstheorem von Shannon und der Shannon-Code

- **Beispiel:** ¹³ (Shannon-Codierung)

- Es ist

$$H_0 = 3.322 \text{ bit/Symbol}$$

$$H(X) = 2.769 \text{ bit/Symbol}$$

$$L = 3.17 \text{ bit/Symbol}$$

- Die Ungleichung

$$H(X) \leq L < H(X) + 1$$

ist erfüllt.

- Die Konstruktionsmethode liefert keinen optimalen Code. Dies erkennt man daran, dass im Codebaum (nächste Folie) nicht alle Endknoten belegt sind.

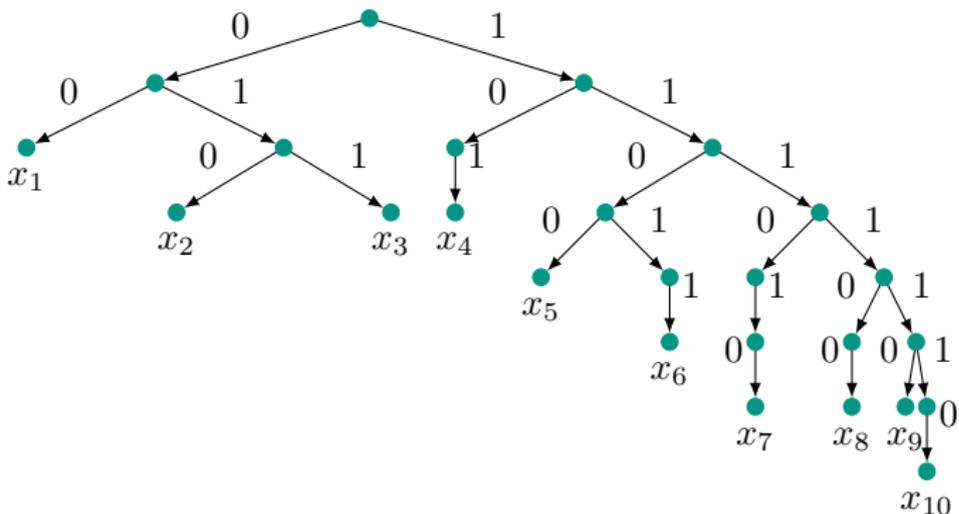
- **Übung:** Überlegen Sie sich ein weiteres Beispiel, in dem die Shannon-Codierung ein suboptimales Ergebnis liefert.

¹³ **Datei:** shannon.ipynb

Das Codierungstheorem von Shannon und der Shannon-Code

■ Beispiel: ¹⁴ (Shannon-Codierung)

■ Codebaum



¹⁴ Datei: shannon.ipynb



Das Codierungstheorem von Shannon und der Shannon-Code

Definition

Die *Redundanz einer Quelle* ist deren Abstand von der maximal möglichen Entropie:

$$R := H_0 - H(X)$$

Die *Redundanz einer Codierung/eines Codes* beschreibt den Abstand der mittleren Codewortlänge von der Entropie:

$$R_C := L - H(X)$$



Das Codierungstheorem von Shannon und der Shannon-Code

■ Bemerkungen:

- Für das vorige Beispiel (Shannon-Code) gilt $R = 0.554$ bit/Symbol und $R_C = 0.401$ bit/Symbol.
 - Das Codierungstheorem von Shannon sichert die Existenz einer Codierung mit $0 \leq R_C \leq 1$.
-
- **Frage:** Existiert eine Methode zur Konstruktion optimaler Codes?
 - **Antwort:** *Huffman-Codierung* erzeugt optimale Codes mit Präfixeigenschaft

■ Algorithmus: (*Huffman-Codierung*)

- Sortiere die Symbole gemäß absteigender Wahrscheinlichkeiten.
- Unterscheide die beiden unwahrscheinlichsten Symbole durch 1 Bit und fasse sie zu einem neuen Zeichen mit addierter Wahrscheinlichkeit zusammen.
- Wiederhole obige Schritte bis die Summenwahrscheinlichkeit 1 entsteht.

■ Bemerkungen:

- Aufgrund des Sortiervorgangs ist der Huffman-Code nicht eindeutig.
- Falls mehrere Optionen existieren, führen diese jedoch auf dieselbe mittlere Codewortlänge.

■ Diskussion:

- Konstruktion des Codes von den beiden Endknoten her.
- Da der Code optimal sein soll, muss $L(x_N) = L(x_{N-1})$ sein; sonst wäre ein Endknoten unbesetzt und man könnte die Codelänge reduzieren.
⇒ Die Codewörter von x_N und x_{N-1} sollen sich nur im letzten Bit unterscheiden.
- Der Beitrag von x_N und x_{N-1} zur mittleren Codewortlänge ist somit $L(x_N) \cdot (P(x_N) + P(x_{N-1}))$.
- Werden x_N und x_{N-1} durch 1 Bit unterschieden, so tragen diese beiden in der Codierung der verbleibenden $N - 1$ Symbole den Anteil $(L(x_N) - 1) \cdot (P(x_N) + P(x_{N-1}))$.
- Bezeichnet L_i die mittlere Codewortlänge bei i Symbolen, so folgt bei obiger Konstruktion

$$L_N = L_{N-1} + P(x_N) + P(x_{N-1}).$$



■ Beispiel:¹⁵ (Huffman-Codierung)

- Anwendung des Codierungsschemas führt auf nebenstehende Codewörter¹⁶

- Es ist

$$L_{\text{Huffman}} = 2.83 \text{ bit/Symbol}$$

- Vergleich:

$$H_0 = 3.322 \text{ bit/Symbol}$$

$$H(X) = 2.769 \text{ bit/Symbol}$$

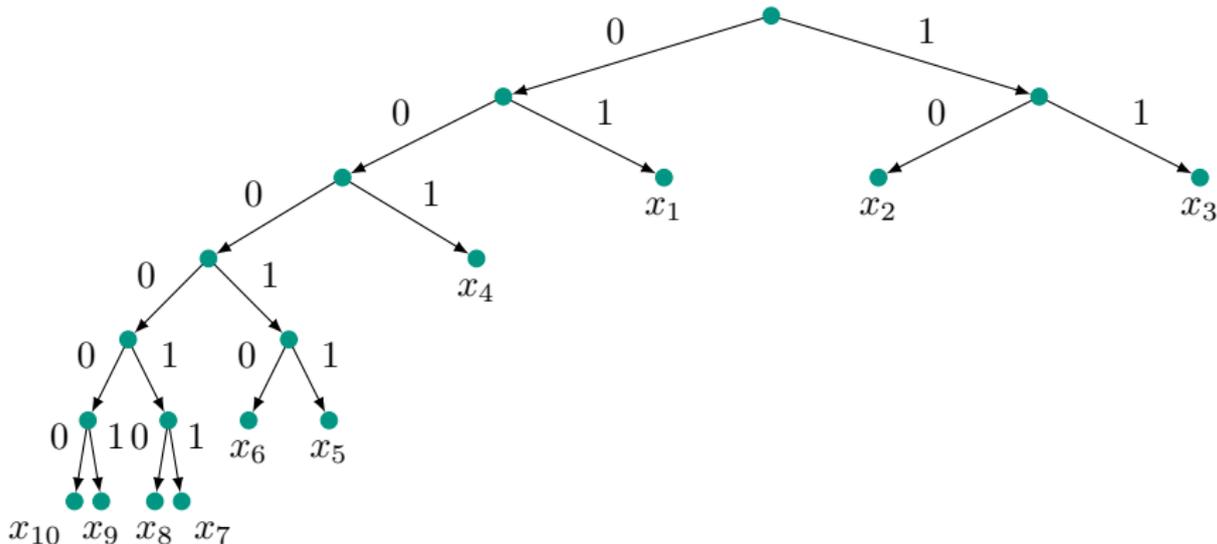
$$L_{\text{Shannon}} = 3.17 \text{ bit/Symbol}$$

	$P(x_n)$	$L(x_n)$	Code
x_1	0.25	2	01
x_2	0.2	2	10
x_3	0.2	2	11
x_4	0.15	3	001
x_5	0.07	5	00011
x_6	0.05	5	00010
x_7	0.025	6	000011
x_8	0.025	6	000010
x_9	0.02	6	000001
x_{10}	0.01	6	000000

¹⁵Datei: huffman.ipynb

¹⁶Vgl. Tafel; resultierender Codebaum auf nächster Folie

■ Beispiel: ¹⁷ (Huffman-Codierung)



¹⁷ Datei: huffman.ipynb





- **Beispiel:** ¹⁸ (Huffman-Codierung)
 - Codieren Sie die Buchstaben des deutschen Alphabets durch Huffman-Codierung. Recherchieren Sie hierzu die Wahrscheinlichkeiten der Buchstaben.
 - Vergleichen Sie die Huffman-Darstellung von „Nachrichtentechnik ist toll“ mit der ASCII-Darstellung. (Entfernen Sie zur Vereinfachung die Leerzeichen.)

¹⁸ **Datei:** huffman.ipynb



- Die folgende Aufstellung listet einige gängige Verfahren auf.
- Neben der Codierung (im Sinne von „Darstellung“, „Umcodierung“) werden auch komprimierende Verfahren aufgeführt.
- Allen Verfahren ist gemeinsam, dass Bits erzeugt werden, die es anschließend zu übertragen gilt.
- **Hinweis:** Machen Sie sich bewusst, dass Speichern und Auslesen ebenfalls eine Übertragung¹⁹ darstellt!

¹⁹ ... nur über die Zeit...



- Zeichencodierung
 - ASCII (7 Bit pro Zeichen)
 - ISO 8859-1 (8 Bit pro Zeichen)
 - Unicode (UTF-8, UTF-16)

- Bildcodierung
 - Raw²⁰
 - Verlustfrei
 - 10-14 Bit Helligkeitsinformation pro Pixel
 - JPEG²¹
 - Redundanzreduktion, „visuell verlustfrei“ bei ca. 2 Bit pro Pixel
 - Basierend auf Huffman-Codierung oder Arithmetischer Codierung

²⁰Quelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Rohdatenformat_\(Fotografie\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Rohdatenformat_(Fotografie))

²¹Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/JPEG>



- Kompression: ZIP²²
 - Verlustfrei
 - Basierend auf Deflate, welches auf einer Erweiterung von LZ77²³ und Huffman-Codierung beruht

- Videocodierung: MPEG
 - ... bei Interesse nachlesen

²²Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/ZIP-Dateiformat>

²³Lempel-Ziv 1977: Wörterbuch-Verfahren, das „beobachtete Sequenzen lernt und auf diese referenziert“.



- 1 Grundlagen der Informationstheorie
 - Grundlegende Betrachtungen
 - Informationstheorie diskreter Quellen
 - Informationstheorie diskreter Kanäle
 - Transinformation
 - Mittlere Transinformation und bedingte Entropie
 - Der diskrete gedächtnislose Kanal
 - Lernziele
 - Literatur

- **Erinnerung:** Modell der Nachrichtenübertragung



Definition

Ein *diskreter Kanal* hat endliche Mengen an Ein- und Ausgangssymbolen

Eingang : Quellsymbole aus

$$\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_N\}$$

Ausgang : Symbole aus

$$\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_M\}.$$

Der diskrete Kanal wird beschrieben durch seine *Übergangswahrscheinlichkeiten*²⁴ $P(Y = y_m | X = x_n)$.

²⁴Eine Abhängigkeit zwischen (aufeinander folgenden) Symbolen wird nicht betrachtet. Der Kanal ist „gedächtnislos“.

- **Frage:** Welche Information liefert die Beobachtung des Kanalausgangs $\{Y = y_m\}$ über den Kanaleingang $\{X = x_n\}$?

- **Antwort:**

- Auftretenswahrscheinlichkeit der Quellsymbole lautet *a priori*

$$P(X = x_n)$$

- Was lernt man durch die Beobachtung? → *a-posteriori Wahrscheinlichkeit*:
W'keit, dass x_n gesendet wurde, nach Beobachtung von y_m :

$$P(X = x_n | Y = y_m)$$



Definition

Die *Transinformation*²⁵ zwischen²⁶ $X = x_n$ und $Y = y_m$ lautet

$$I(x_n; y_m) := \log_2 \frac{P(x_n|y_m)}{P(x_n)}.$$

Sie beschreibt die gegenseitige Information zwischen den Ereignissen $\{X = x_n\}$ (a-priori W'keit) und $\{X = x_n|Y = y_m\}$ (a-posteriori W'keit).

Bestimmt der Ausgang eindeutig das Sendesymbol, so folgt $P(x_n|y_m) = 1$ und somit $I(x_n; y_m) = I(x_n)$.

²⁵Englisch: *mutual information*

²⁶Verkürzende Schreibweise von $\{X = x_n\}$ bzw. analog für Y .

■ Bemerkungen:

- Anwendung der Regel von Bayes liefert:

$$\begin{aligned} I(x_n; y_m) &= \log_2 \frac{P(x_n | y_m)}{P(x_n)} \\ &= \log_2 \frac{P(x_n, y_m)}{P(x_n) P(y_m)} \\ &= \log_2 \frac{P(y_m | x_n)}{P(y_m)} \\ &= I(y_m; x_n) \end{aligned}$$

⇒ Die Transinformation ist symmetrisch.



■ Bemerkungen: (ctd.)

- Ist der Kanalausgang unabhängig vom Kanaleingang, so folgt $P(x_n|y_m) = P(x_n)$ und somit

$$\begin{aligned} I(x_n; y_m) &= \log_2 \frac{P(x_n|y_m)}{P(x_n)} \\ &= \log_2 \frac{P(x_n, y_m)}{P(x_n) P(y_m)} \\ &= \log_2 \frac{P(x_n)P(y_m)}{P(x_n) P(y_m)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

⇒ Die Transinformation unabhängiger Ereignisse ist 0.



- **Beispiel:** Ein (*gedächtnisloser*) *Binärkanal* wird durch $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$ und die Übergangswahrscheinlichkeiten

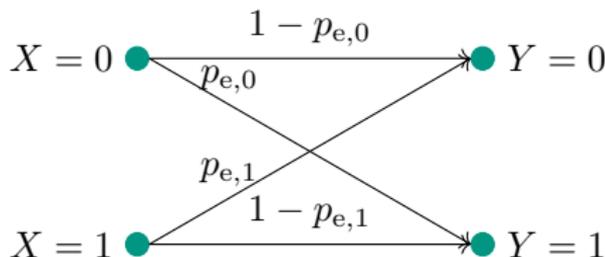
$$P(Y = 0|X = 0) = 1 - p_{e,0}$$

$$P(Y = 1|X = 0) = p_{e,0}$$

$$P(Y = 0|X = 1) = p_{e,1}$$

$$P(Y = 1|X = 1) = 1 - p_{e,1}$$

beschrieben. Der Binärkanal heißt *symmetrisch* (engl.: *binary symmetric channel, BSC*), falls $p_{e,0} = p_{e,1} = p_e$.



■ Beispiel: (ctd.)

- Für $p_{e,0} = p_{e,1} = 0$ ist der Kanal störungsfrei. Gilt zudem $P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$, so folgt:

$$I_{XY}(0; 0) = \log_2 \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} \right) = \log_2(2) = 1 \quad (\text{bit})$$

- Für $p_{e,0} = p_{e,1} = \frac{1}{2}$ und $P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$ ist der Kanal nutzlos:

$$I_{XY}(0; 0) = \log_2 \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \right) = \log_2(1) = 0 \quad (\text{bit})$$



Definition

Die bereits verwendete a-posteriori Wahrscheinlichkeit $P(X = x_n | Y = y_m)$ führt auf die *bedingte Information* über x_n nach Empfang von y_m und ist definiert als:

$$I(x_n | y_m) = -\log_2(P(x_n | y_m))$$

■ Bemerkungen:

- Die bedingte Information wird als a-posteriori Information interpretiert, d. h. sie beschreibt die Information über x_n nach Beobachtung von y_m .
- Die bedingte Information erfüllt ebenfalls $I(x_n|y_m) \geq 0$.
- Durch Anwendung der Logarithmus-Gesetze folgt

$$\begin{aligned} I(x_n; y_m) &= \log_2 \frac{P(x_n|y_m)}{P(x_n)} \\ &= I(x_n) - I(x_n|y_m) \end{aligned}$$

und somit $I(x_n; y_m) \in \mathbb{R}$.



■ Beispiel/Übung:

- Gegeben ist die Verbundverteilung gemäß Tabelle:

	Y	0	1
X			
0		$\frac{6}{8}$	$\frac{1}{8}$
1		0	$\frac{1}{8}$

- Berechnen Sie „alle bisher bekannten Informationsbegriffe“.

Mittlere Transinformation und bedingte Entropie

Definition

Die *mittlere Transinformation* entsteht durch Mittelung der Transinformation über x_n und y_m und ist definiert als:²⁷

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M P(x_n, y_m) I_{XY}(x_n; y_m) \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M P(x_n, y_m) \log_2 \left(\frac{P(x_n | y_m)}{P(x_n)} \right) \end{aligned}$$

²⁷ In [Jon11] werden Ergebnisse/Ereignisse in Verbundwahrscheinlichkeiten mit Semikolon getrennt. Hier und im Folgenden sind diese durch Kommata getrennt.



Mittlere Transinformation und bedingte Entropie

Definition

Die *bedingte Entropie* entsteht durch Mittelung der bedingten Information und lautet:

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M P(x_n, y_m) I_{X|Y}(x_n|y_m) \\ &= - \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M P(x_n, y_m) \log_2 P(x_n|y_m) \end{aligned}$$



Mittlere Transinformation und bedingte Entropie

■ Bemerkungen:^{28 29}

- Es gilt:

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y).$$

- Für die Transinformation folgt:

$$0 \leq I(X; Y) \leq H(X).$$

- X und Y stochastisch unabhängig $\iff I(X; Y) = 0 \iff H(X|Y) = H(X)$.
- $H(X|Y)$ beschreibt die mittlere Information in X nach Beobachtung von Y und wird als *Äquivokation* bezeichnet. Sie beschreibt die im Kanal verlorengegangene Information.

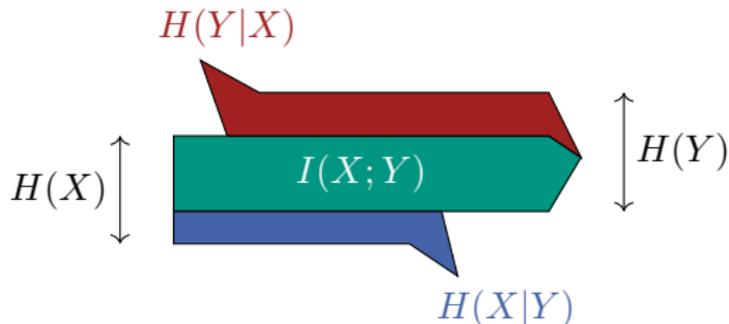
²⁸ **Übung:** Nachweis

²⁹ Aufgrund der Symmetrie bleiben die Zusammenhänge bei Vertauschung von X und Y ebenfalls gültig.



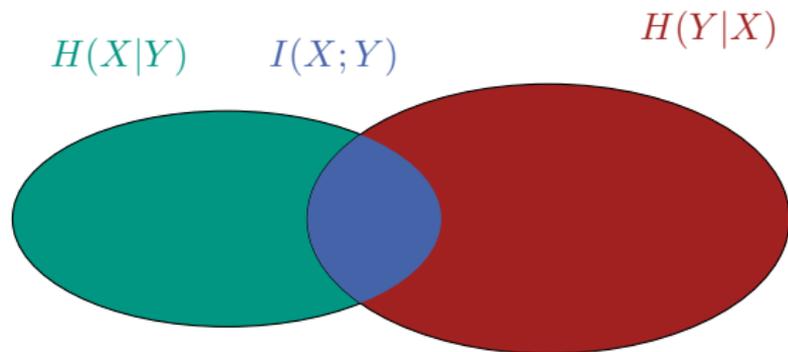
Mittlere Transinformation und bedingte Entropie

■ Graphische Darstellung I:



Mittlere Transinformation und bedingte Entropie

■ Graphische Darstellung II:



$$H(X) = \boxed{H(X|Y)} + \boxed{I(X;Y)}$$

$$H(Y) = \boxed{H(Y|X)} + \boxed{I(X;Y)}$$

Mittlere Transinformation und bedingte Entropie

- **Beispiel:** Betrachte den BSC mit $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$, $p_0 = P(X = 0)$ und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(Y = j|X = i) = \begin{cases} 1 - p_e, & j = i \\ p_e, & i \neq j \end{cases}$$

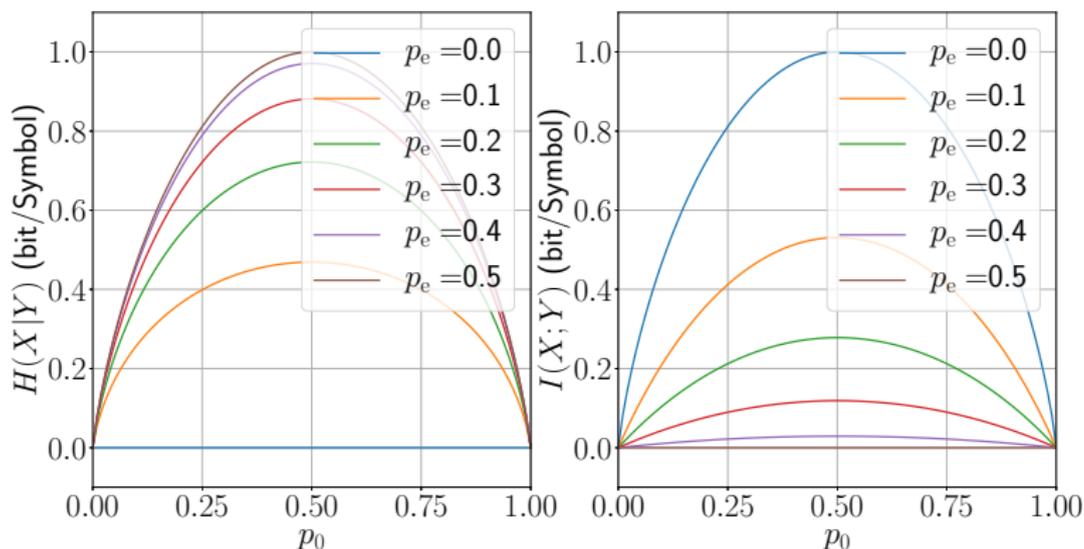
Es folgt:

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= P_{Y|X}(0|0)P_X(0) \log_2 \frac{P_{Y|X}(0|0)}{P_Y(0)} \\ &\quad + P_{Y|X}(1|0)P_X(0) \log_2 \frac{P_{Y|X}(1|0)}{P_Y(1)} \\ &\quad + P_{Y|X}(0|1)P_X(1) \log_2 \frac{P_{Y|X}(0|1)}{P_Y(0)} \\ &\quad + P_{Y|X}(1|1)P_X(1) \log_2 \frac{P_{Y|X}(1|1)}{P_Y(1)} \end{aligned}$$



Mittlere Transinformation und bedingte Entropie

■ Beispiel: (ctd.) Graphische Darstellung



Definition

Der *diskrete Kanal* besitzt die Eingangsmenge $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_N\}$, die Ausgangsmenge $\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_M\}$ und die Übergangswahrscheinlichkeiten $P(Y = y_m | X = x_n) = P(y_m | x_n)$.

Zusammenfassen aller Übergangswahrscheinlichkeiten liefert die Kanalübergangsmatrix

$$\mathbf{P} = (P(y_m | x_n))_{nm}$$

der Dimension $N \times M$.

Definition

Der DMC heißt *gedächtnislos*, engl.: *discrete memoryless channel*, *DMC*, falls für die Übertragung einer Folge von Symbolen gilt:

$$\begin{aligned} P(Y_1 = v_1, \dots, Y_K = v_K | X_1 = u_1, \dots, X_K = u_K) \\ = \prod_{k=1}^K P(Y_k = v_k | X_k = u_k) \end{aligned}$$



- **Bisher:** Transformation beschreibt Information zwischen X und Y
- **Rechnung:** Durch Umformung³⁰ folgt

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M P(x_n, y_m) \log_2 \left(\frac{P(x_n | y_m)}{P(x_n)} \right) \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M P(y_m | x_n) P(x_n) \log_2 \left(\frac{P(y_m, x_n)}{P(y_m) P(x_n)} \right) \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M P(y_m | x_n) P(x_n) \log_2 \left(\frac{P(y_m | x_n)}{\sum_{n=1}^N P(y_m | x_n) P(x_n)} \right) \end{aligned}$$

³⁰Bedingte W'keiten; Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit



■ Erinnerung:

$$I(X; Y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M P(y_m|x_n) \cdot P(x_n) \log_2 \left(\frac{P(y_m|x_n)}{\sum_{n=1}^N P(y_m|x_n) \cdot P(x_n)} \right)$$

Beobachtung: Transinformation abhängig von Statistik der Quelle $P(x_n)$ und Übergangswahrscheinlichkeiten des Kanals $P(y_m|x_n)$.



- **Frage:** Welche Information ist maximal (!) über einen Kanal übertragbar?
- **Lösung/Antwort:** Beseitigen der Abhängigkeit von der Eingangsverteilung

Definition

Die *Kanalkapazität* eines DMC ist definiert als

$$C = \max_{P(x_n)} I(X; Y) \quad (\text{bit/Kanalnutzung}).$$

Das Maximum ist hierbei über alle möglichen Eingangsverteilungen zu bilden.

■ Bemerkungen:

- „Eigentlich“ ist die Kanalkapazität als Supremum und nicht als Maximum zu definieren. Bei endlichen Eingangsalphabeten wird das Supremum aber zu einem Maximum. [Yeu08]
- Die Kanalkapazität hängt nicht mehr von der Quellstatistik, sondern nur noch von den Übergangswahrscheinlichkeiten ab.
- Die Übertragung auf Kanäle mit nicht endlichen und nicht zeit-diskreten Ein- und Ausgängen ist ebenfalls möglich. Siehe beispielsweise [CT06].

Definition

Ein DMC heißt *symmetrisch*, falls jede Spalte/Zeile der Kanalübergangsmatrix P eine Permutation jeder anderen Spalte/Zeile ist.

Satz^{31 32}

Für einen symmetrischen DMC wird die Kapazität bei Gleichverteilung auf der Menge der Eingangssymbole *erreicht*.³³

³¹Nachweis: Siehe [CT06]

³²Ähnliche Aussagen gibt es auch für „schwächere“ Forderungen an die Übergangsmatrix. [Gal68]

³³**Hinweis:** Dies ist nicht unbedingt die einzige maximierende Verteilung, sondern eine mögliche.



■ Beispiel:

- Für den BSC ist:

$$P = \begin{pmatrix} 1 - p_e & p_e \\ p_e & 1 - p_e \end{pmatrix}$$

- Nach voriger Aussage wird die Transinformation für $P(X = 0) = \frac{1}{2}$ maximiert.³⁴
- Für $P(X = 0) = \frac{1}{2}$ folgt aufgrund der Symmetrie $P(Y = 0) = \frac{1}{2}$.

³⁴Vgl. die Bilder zur Äquivokation und zur Transinformation aus dem vorherigen Beispiel.



■ Beispiel: (ctd.)

- Die Kapazität ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} C &= (1 - p_e) \frac{1}{2} \log_2 \frac{1 - p_e}{\frac{1}{2}} + p_e \frac{1}{2} \log_2 \frac{p_e}{\frac{1}{2}} \\ &\quad + p_e \frac{1}{2} \log_2 \frac{p_e}{\frac{1}{2}} + (1 - p_e) \frac{1}{2} \log_2 \frac{1 - p_e}{\frac{1}{2}} \\ &= p_e \log_2(2p_e) + (1 - p_e) \log_2(2(1 - p_e)) \\ &= 1 + p_e \log_2(p_e) + (1 - p_e) \log_2(1 - p_e) \\ &= H(X) - H_b(p_e) \end{aligned}$$

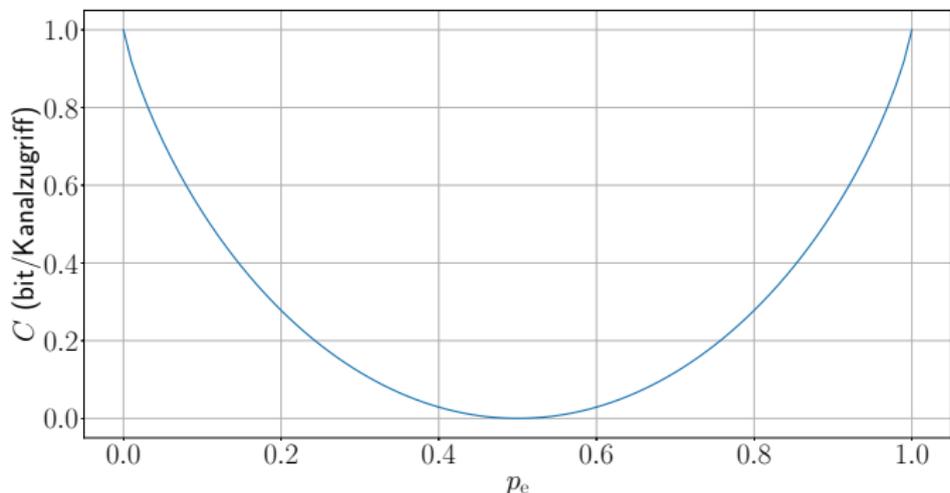
- Die maximale³⁵ Kapazität ist:

$$C_{\text{Binärkanal, max}} = 1 \quad (\text{bit/Kanalnutzung}).$$

³⁵Bzgl. der Fehlerwahrscheinlichkeit p_e maximal.



- **Beispiel:** (ctd.)
 - Graphische Darstellung³⁶



³⁶Übung: Erklären Sie die Symmetrie zu $p_e = \frac{1}{2}$

- 1 Grundlagen der Informationstheorie
 - Grundlegende Betrachtungen
 - Informationstheorie diskreter Quellen
 - Informationstheorie diskreter Kanäle
 - **Lernziele**
 - Literatur

- Die folgende Aufstellung fasst die zentralen Punkte zusammen.
- Es wird aufgezeigt, welche Punkte nach Bearbeitung des Kapitels klar sein sollten.
- **Hinweise:**
 - Die Auflistung ist nicht vollständig, sondern führt die wichtigsten Aussagen auf; nicht erwähnte Inhalte sind dennoch bedeutsam.
 - Oft enthalten die Nachweise wichtige Ideen; diese also nicht vernachlässigen.
 - Stets versuchen, Gleichungen in Verbindung mit Interpretationen und Anwendungen zu sehen
 - Des weiteren sollten alle kleinen nützlichen Ergänzungen verstanden sein.
 - Es ist immer eine gute Idee, etwas Gelerntes im Rechner umzusetzen. Dies hilft beim Verständnis und schärft das Bewusstsein für mögliche Probleme.

Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- Shannon'sches Modell der Nachrichtenübertragung; Begriffe
- Information und Entropie
 - Eigenschaften; insbesondere max. Entropie
 - Beispiel der Binärquelle
- Codierungsverfahren
 - Begriff der Codierung und der (mittleren) Codewortlänge
 - Präfixeigenschaft von Codes; Baumdarstellung von Codes
 - Optimale Codes und deren Bezug zur Baumdarstellung
 - Codierungstheorem von Shannon
 - Codierung nach Shannon und Huffman

Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- Shannon'sches Modell der Nachrichtenübertragung; Begriffe
- Diskreter Kanal; Gedächtnislosigkeit
- Transinformation
 - Eigenschaften
 - Beispiel des Binärkanals
- DMC
 - Symmetriebegriff
 - Kapazität

- 1 Grundlagen der Informationstheorie
 - Grundlegende Betrachtungen
 - Informationstheorie diskreter Quellen
 - Informationstheorie diskreter Kanäle
 - Lernziele
 - Literatur

- **Bemerkung:** Interessante Literatur zur Informationstheorie, deren Geschichte und zur Kryptologie:
 - Axel Roch, *Claude E. Shannon – Spielzeug, Leben und die geheime Geschichte seiner Theorie der Information*, gegenstalt Verlag, 2. Auflage, Berlin 2010, ISBN: 978-3-9813156-0-8
 - James Gleick, *The Information: A History, a Theory, a Flood*, Pantheon Books, New York, 2011, ISBN 9780375423727
 - Simon Singh, *Geheime Botschaften*, Carl Hanser Verlag, München 1999, ISBN 3-441-19873-3



- [Jon11] F. Jondral, *Nachrichtenübertragung*, Schlembach, 4. Auflage, 2011
- [Sha48] C. E. Shannon, *A Mathematical Theory of Communications*, The Bell System Technical Journal, Vol. XXVI, 1948 (online verfügbar unter <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=6773067>)
- [CT06] T. Cover, J. Thomas, *Elements of Information Theory*, Wiley, 2006
- [Yeu08] R. Yeung, *Information Theory and Network Coding*, Springer, 2008
- [Gal68] R. Gallager, *Information Theory and Reliable Communications*, Wiley, 1968

Nachrichtentechnik I – Signale, Systeme und Kanäle

Holger Jäkel

Communications Engineering Lab (CEL)



- 2 Signale, Systeme und Kanäle
 - Signale und Systeme im komplexen Basisband
 - Kanäle
 - Lernziele
 - Literatur



- Folgende Diskussionen erfolgen gemäß¹

[Jon11]: F. Jondral, *Nachrichtenübertragung*, Schlembach, 4. Auflage, 2011

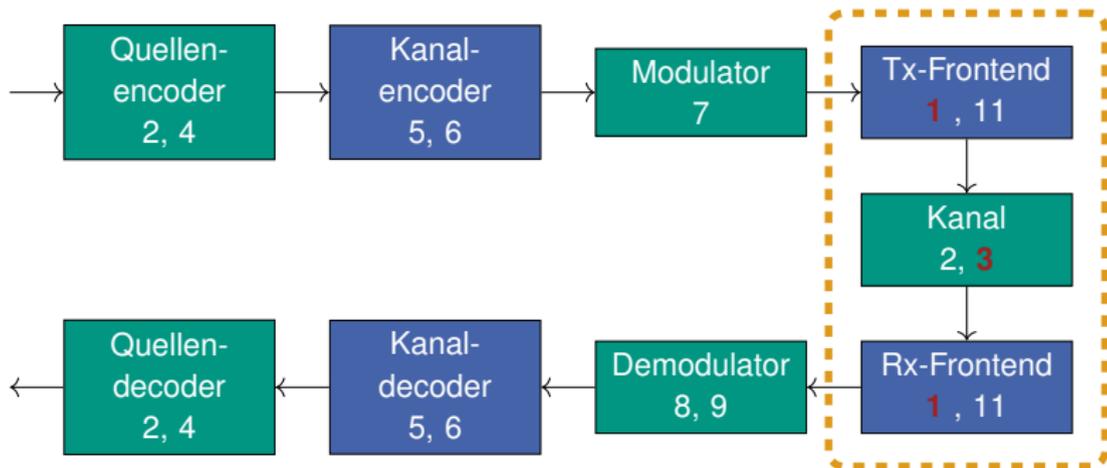
¹Von dort entstammt die Struktur der Folien, die Formeln und die meisten Bilder.

- Weitere Ergänzungen entstammen oft

[PS08]: J. Proakis, M. Salehi, *Digital Communications*, McGraw-Hill, 2008

[Kam04]: K.-D. Kammeyer, *Nachrichtenübertragung*, Teubner, 3. Auflage, 2004

Einordnung der Kapitel von [Jon11]



Kommunikations-
netze
12, 15

Systemkonzepte
7, 11, 15

Empfangs-
signalverarbeitung
13, 14

- 2 Signale, Systeme und Kanäle
 - Signale und Systeme im komplexen Basisband
 - Grundlegende Betrachtungen
 - Signale im äquivalenten Tiefpassbereich
 - LTI-Systeme im äquivalenten Tiefpassbereich
 - Das Antwortverhalten äquivalenter Tiefpasssysteme
 - Das Antwortverhalten von LTI-Systemen auf Zufallssignale
 - Zufallssignale im äquivalenten Tiefpassbereich
 - Komplexwertige Gauß'sche Zufallsprozesse
 - Beispiele
 - Kanäle
 - Lernziele
 - Literatur

■ Aufgaben der (drahtlosen) Nachrichtenübertragung:

- Übertragung von Nachrichten an (mobile) Teilnehmer
- (Effiziente) Ausnutzung des elektromagnetischen Spektrums \implies Parallelnutzung für viele verschiedene Dienste
- Berücksichtigen der physikalischen Ausbreitungsbedingungen \implies Je nach Anwendung unterschiedliche Frequenzbereiche vorteilhaft

- **Ansatz/Lösung:** Aufteilen des Spektrums in *Frequenzbänder* \implies Ein Nutzer hat Zugriff auf den Bereich² $[f_T - B/2, f_T + B/2]$ der *Bandbreite* B um die *Trägerfrequenz* f_T

²Durch die Frequenz-Symmetrie reellwertiger Signale [PJ15] wird bei $-f_T$ ebenfalls die Breite B belegt.

■ Frequenzbereiche:³

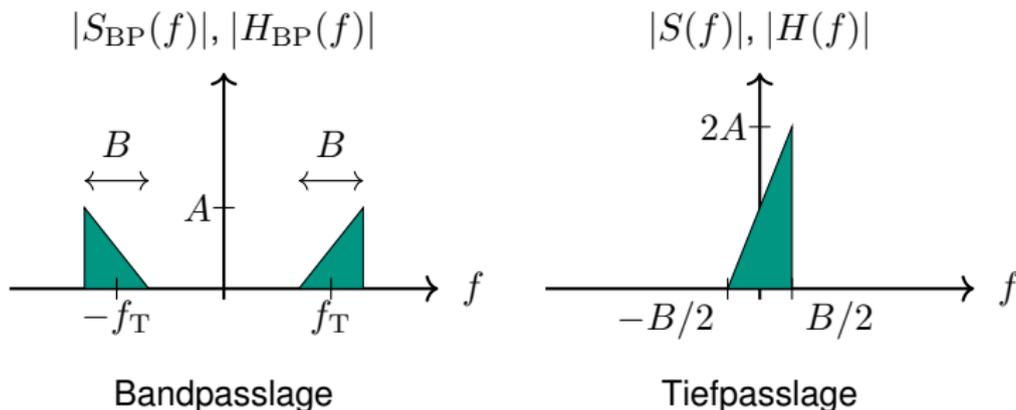
Bezeichnung ⁴	f	λ
SLF	30 – 300 Hz	1 – $10 \cdot 10^3$ km
ULF	0.3 – 3 kHz	$0.1 – 1 \cdot 10^3$ km
VLF; Längstwellen	3 – 30 kHz	10 – 100 km
LF; Langwellen	30 – 300 kHz	1 – 10 km
MF; Mittelwellen	0.3 – 3 MHz	0.1 – 1 km
HF; Kurzwellen	3 – 30 MHz	10 – 100 m
VHF; Ultrakurzwellen	30 – 300 MHz	1 – 10 m
UHF; Dezimeterwellen	0.3 – 3 GHz	0.1 – 1 m
SHF; Zentimeterwellen	3 – 30 GHz	10 – 100 mm
EHF; Millimeterwellen	30 – 300 GHz	1 – 10 mm

³Abkürzungen: S=super, U=ultra, V=very, L=low, M=medium, H=high, F=frequency

⁴Notation: Frequenzbereich; Wellenlängen



- **Motivation:** Betrachten der Signale unabhängig von deren Trägerfrequenz
⇒ Signal/Kanal in *Bandpasslage* wird zum Signal/Kanal in *Tiefpasslage*
- Graphisch (Amplitudenspektrum):^{5 6}



⁵**Erinnerung:** Für reellwertige Signale $s_{BP}(t)$ gilt $S_{BP}(-f) = S_{BP}^*(f)$; damit $|S_{BP}(-f)| = |S_{BP}(f)|$.

⁶Eine Begründung des Faktors 2 erfolgt in Kürze.

Definition

Ist der von $s_{\text{BP}}(t)$ belegte Frequenzbereich viel kleiner als die Trägerfrequenz f_{T} , so wird $s_{\text{BP}}(t)$ als *Bandpasssignal* bezeichnet.

Satz⁷

Ein reellwertiges Bandpassignal $s_{\text{BP}}(t) \in \mathbb{R}$ kann als

$$s_{\text{BP}}(t) = a(t) \cos(2\pi f_{\text{T}}t + \vartheta(t))$$

dargestellt werden. Hierbei bezeichnet $a(t)$ die *Amplitude*, $\vartheta(t)$ die *Phase* und f_{T} die *Trägerfrequenz* des Signals.

⁷**Nachweis:** Siehe [PS08]



- Anwendung von $\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$ liefert

$$\begin{aligned}s_{\text{BP}}(t) &= a(t) \cos(\vartheta(t)) \cos(2\pi f_{\text{T}}t) - a(t) \sin(\vartheta(t)) \sin(2\pi f_{\text{T}}t) \\ &=: s_{\text{I}}(t) \cos(2\pi f_{\text{T}}t) - s_{\text{Q}}(t) \sin(2\pi f_{\text{T}}t)\end{aligned}$$

Definition

Die Größen

$$\begin{aligned}s_{\text{I}}(t) &:= a(t) \cos(\vartheta(t)) \\ s_{\text{Q}}(t) &:= a(t) \sin(\vartheta(t))\end{aligned}$$

werden als *Inphasenkomponente* und *Quadraturkomponente* von $s_{\text{BP}}(t)$ bezeichnet.

Definition

Die *komplexe Einhüllende* eines Signals $s_{\text{BP}}(t)$ ist definiert als

$$s(t) := a(t)e^{j\vartheta(t)} = s_{\text{I}}(t) + js_{\text{Q}}(t).$$

Mittels der komplexen Einhüllenden folgt die Darstellung

$$\begin{aligned} s_{\text{BP}}(t) &= s_{\text{I}}(t) \cos(2\pi f_{\text{T}}t) - s_{\text{Q}}(t) \sin(2\pi f_{\text{T}}t) \\ &= \text{Re} \{ s(t)e^{j2\pi f_{\text{T}}t} \}. \end{aligned}$$

■ Bemerkungen:

- Real- und Imaginärteil der komplexen Einhüllenden entsprechen der Inphasen- bzw. der Quadraturkomponente.
- Je nach Autor besitzt obige Darstellung verschiedene Vorfaktoren. So verwendet beispielsweise [Kam04] einen Vorfaktor $\sqrt{2}$. Bitte bei Verwendung verschiedener Lehrbücher beachten.



- Nun: Betrachtung des Frequenzgehalts der Signale
- Anwendung der Fouriertransformation auf $s_{\text{BP}}(t)$ liefert:

$$\begin{aligned} S_{\text{BP}}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{BP}}(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re} \{ s(t) e^{j2\pi f_{\text{T}} t} \} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} s(t) e^{-j2\pi(f-f_{\text{T}})t} + \frac{1}{2} s^*(t) e^{-j2\pi(f+f_{\text{T}})t} dt \\ &= \frac{1}{2} (S(f-f_{\text{T}}) + S^*(-f-f_{\text{T}})) \end{aligned}$$



- Von letzter Folie:⁸

$$S_{\text{BP}}(f) = \frac{1}{2} (S(f - f_T) + S^*(-f - f_T))$$

■ Feststellungen:

- Wenn die Frequenzanteile von $s(t)$ um $f = 0$ liegen, so enthält $s_{\text{BP}}(t)$ Frequenzanteile um $\pm f_T$.
- Wenn sich die Frequenzanteile von $s_{\text{BP}}(t)$ um f_T konzentrieren, konzentrieren sich die Frequenzanteile von $s(t)$ um 0.

⁸Sie erkennen die Symmetrie für reellwertige Signale!?!)

Definition

Die komplexe Einhüllende $s(t)$ eines Bandpasssignals $s_{\text{BP}}(t)$ wird als *äquivalentes Tiefpasssignal* oder *äquivalentes Basisbandsignal* bezeichnet.

Hinweis

Die Notation weicht im Folgenden von derjenigen in [Jon11] ab:

- Der Bandpassbereich ist stets durch Index „ BP “ kenntlich gemacht.
- Alle Signale/Frequenzbereiche ohne Index beschreiben das Basisband.

■ Bemerkungen:

- Die Energie eines Signals kann im Bandpass- oder im Tiefpassbereich berechnet werden. Es gilt:⁹

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{BP}}^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt$$

- Zur Äquivalenz der Darstellung muss die Trägerfrequenz f_T angegeben werden.

⁹Übung: Nachweis (Hinweis: Satz von Parseval)

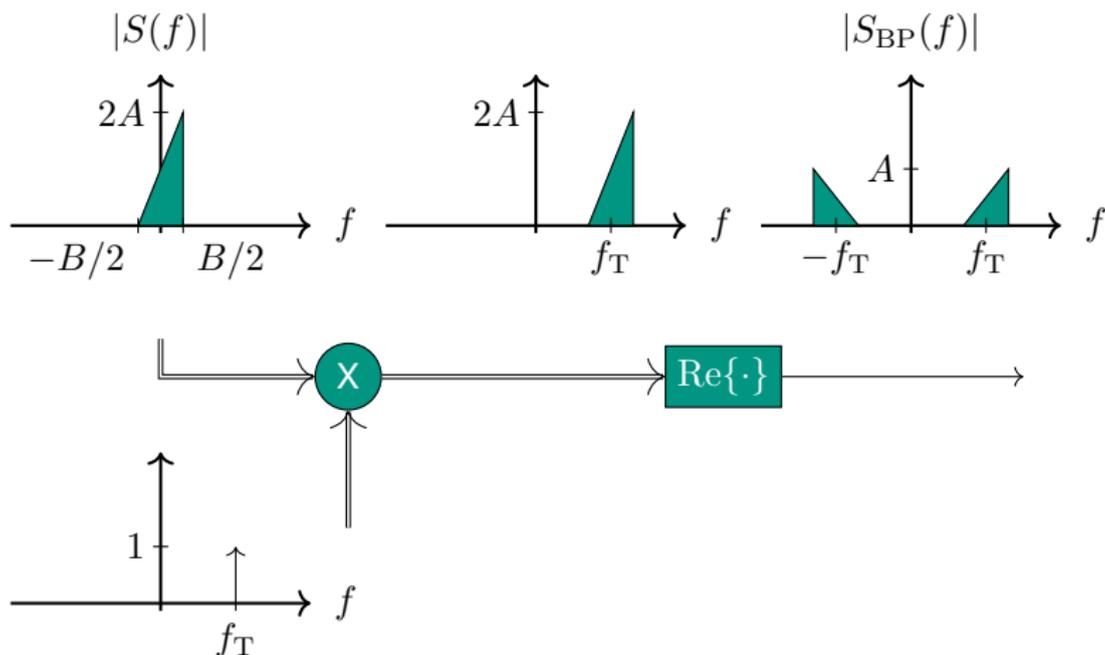


- **Frage:** Wie entstehen $s_{\text{BP}}(t)$ und $s(t)$ aus dem jeweils anderen Signal?
- **Antwort:** Verwende die Beziehung

$$S_{\text{BP}}(f) = \frac{1}{2} (S(f - f_{\text{T}}) + S^*(-f - f_{\text{T}}))$$

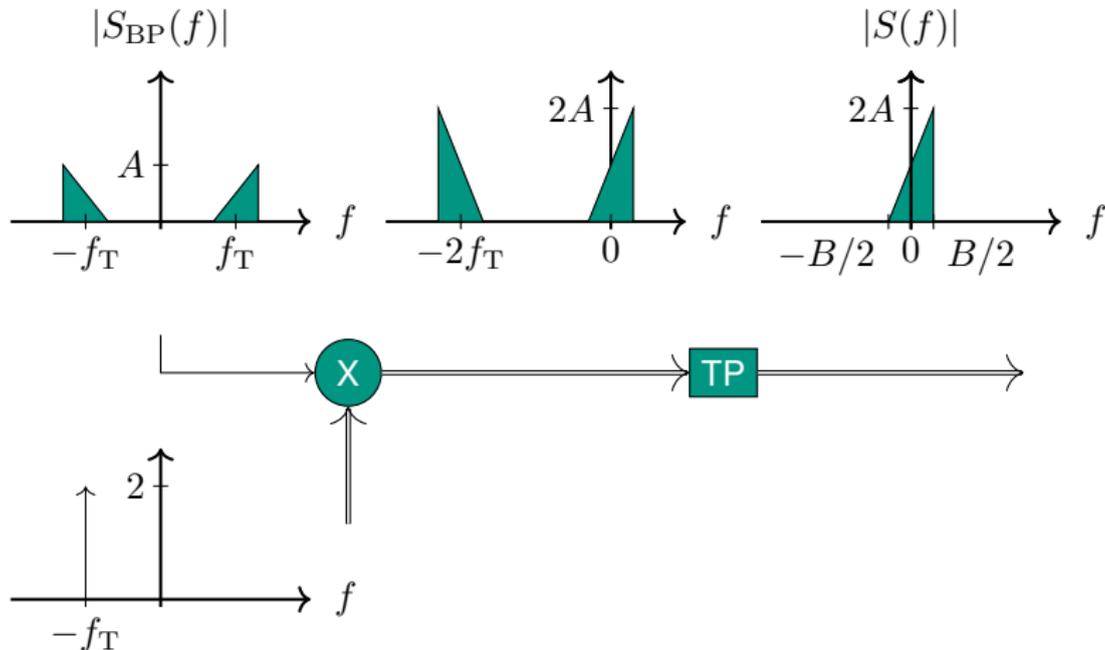


- Äquivalentes Basisbandsignal zu Bandpassignal im Frequenzbereich¹⁰



¹⁰Doppelte Linien bezeichnen komplexwertige Signale; einfache Linien reellwertige Signale.

- Bandpasssignal zu äquivalentem Basisbandsignal im Frequenzbereich



■ **Bemerkung:**¹¹ (Alternative Herleitung des Basisbandsignals)

- Beschränken von $S_{\text{BP}}(f)$ auf den Bereich nicht-negativer Frequenzen liefert das aus der Vorlesung „Signale und Systeme“ bekannte *analytische Signal*:^{12 13}

$$s^+(t) = s_{\text{BP}}(t) + j\mathcal{H}\{s_{\text{BP}}(t)\}$$



$$\begin{aligned} S^+(f) &= S_{\text{BP}}(f) + j(-j \cdot \text{sign}(f)) \cdot S_{\text{BP}}(f) \\ &= S_{\text{BP}}(f) \cdot (1 + \text{sign}(f)) \end{aligned}$$

- Anschließende Linksverschiebung erzeugt $S(f)$.

¹¹ Details siehe [PJ15]; Vorsicht: dort referenziert $S_{XX}(f)$ das Leistungsdichtespektrum.

¹² **Erinnerung:** $\mathcal{H}\{s_{\text{BP}}(t)\}$ bezeichnet die Hilbert-Transformierte des Signals $s_{\text{BP}}(t)$

¹³ **Beachte:** Aufgrund der fehlenden Symmetrie im Frequenzbereich ist $s^+(t)$ nicht mehr reellwertig!



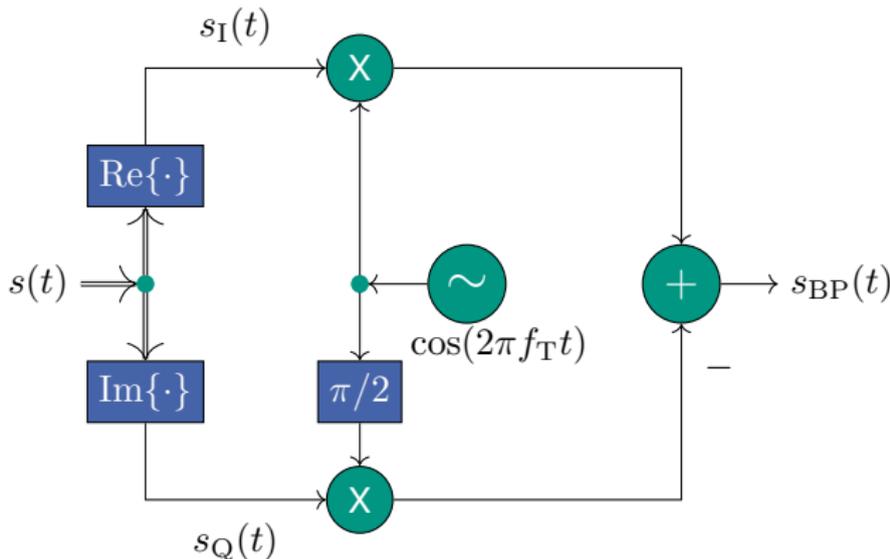
- **Fragen:** Wie erhalten wir nun *praktisch*
 - ... $s_{BP}(t)$ aus $s(t)$?
 - ... $s(t)$ aus $s_{BP}(t)$?

- **Antwort:** Verwende die bisherigen Resultate/Formeln als „Bauanleitung“

- **Hinweis:** Die Farbgebung der Grafiken dient sowohl der optischen Trennung der Blöcke als auch (gelegentlich) der Gruppierung ähnlicher Blöcke.

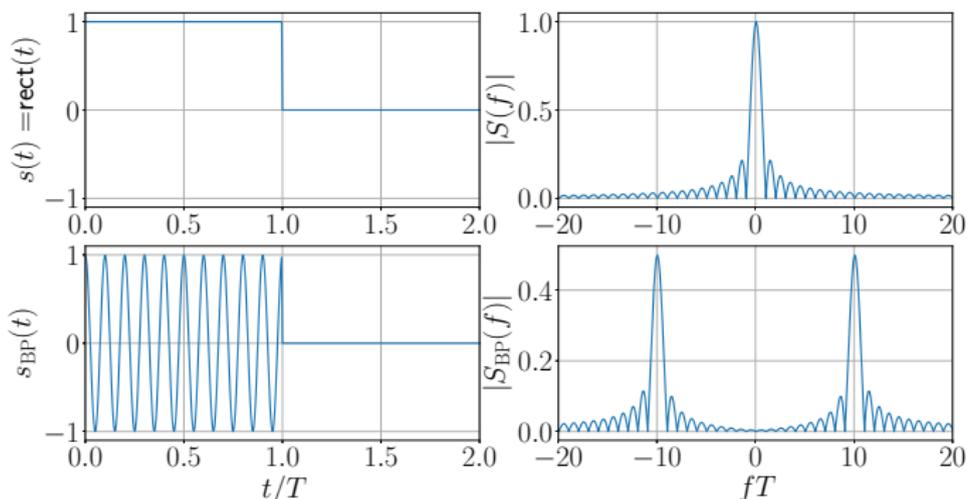


- Erzeugen des Bandpasssignals aus dem äquivalenten Basisbandsignal im Zeitbereich¹⁴



¹⁴**Hinweis:** Der Block $\pi/2$ führt eine Verzögerung um $\pi/2$ durch. Hierdurch entsteht $\sin(\cdot)$ aus $\cos(\cdot)$.

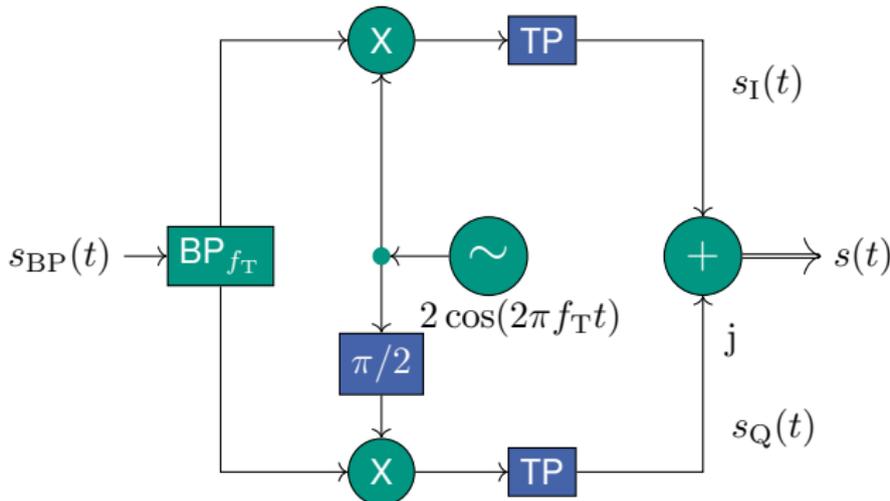
- **Beispiel:**¹⁵ Rechteck $s(t) = \text{rect}_{T=1}s(t/s - 0.5)$ im Basisband und Bandpasssignal $s_{\text{BP}}(t) = s(t) \cos(2\pi f_T t)$ für $f_T = 10$ Hz



¹⁵ **Datei:** baseband_2_bandpass.ipynb



- Erzeugen des äquivalenten Basisbandsignals aus dem Bandpasssignal im Zeitbereich¹⁶



¹⁶Übung: Zeigen Sie mittels der Additionstheoreme, dass hierdurch das Basisbandsignal entsteht.

■ Nachweis:¹⁷

- Vor dem TP liegt das Signal:¹⁸

$$\begin{aligned}x_{\text{vor TP}}(t) &= s_{\text{BP}}(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_{\text{T}}t) \\&= [s_{\text{I}}(t) \cos(2\pi f_{\text{T}}t) - s_{\text{Q}}(t) \sin(2\pi f_{\text{T}}t)] \cdot 2 \cos(2\pi f_{\text{T}}t) \\&\stackrel{(a)}{=} s_{\text{I}}(t) 2 \cos(2\pi f_{\text{T}}t) \cos(2\pi f_{\text{T}}t) - s_{\text{Q}}(t) 2 \sin(2\pi f_{\text{T}}t) \cos(2\pi f_{\text{T}}t) \\&\stackrel{(b)}{=} s_{\text{I}}(t) (1 + \cos(4\pi f_{\text{T}}t)) - s_{\text{Q}}(t) (\sin(0) + \sin(4\pi f_{\text{T}}t)) ,\end{aligned}$$

wobei (a) Ausmultiplizieren ist und (b) durch Additionstheoreme folgt.

- Der anschließende TP filtert alle höherfrequenten Anteile und

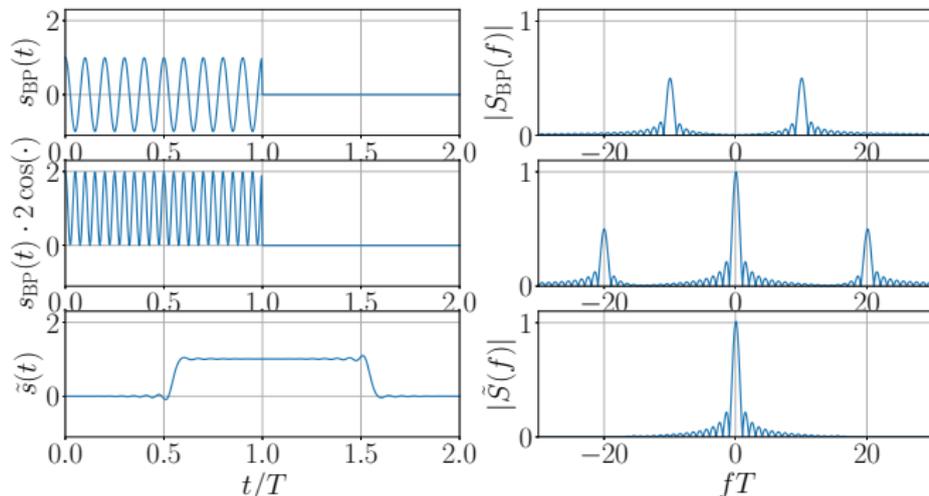
$$x_{\text{vor TP}}(t) * h_{\text{TP}}(t) = s_{\text{I}}(t)$$

erzeugt die Inphasenkomponente. ■

¹⁷Das Bandpassfilter wird hier vernachlässigt.

¹⁸ $\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$, $\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y))$

- **Beispiel:**¹⁹ Bandpassfunktion $s_{BP}(t) = s(t) \cos(2\pi f_T t)$, für $s(t) = \text{rect}_{T=1} s(t/s - 0.5)$, $f_T = 10$ Hz hin zum Basisbandsignal²⁰



¹⁹ **Datei:** bandpass_2_baseband.ipynb

²⁰ **Fragen:** Wieso $\tilde{s}(t)$? Wieso entsteht eine Zeitverschiebung? Wieso ergibt sich kein Rechteckimpuls?

■ Zwischenfazit:

- Beschreibung von Bandpasssignalen im äquivalenten Basisband
- Darstellung unabhängig von der Trägerfrequenz
- „Bonbon“: Anwendung des Sampling-Theorems deutlich vereinfacht²¹

■ Nun: Beschreibung von Systemen in äquivalenter Weise

²¹ **Konkret:** $f_A > B$ anstelle von $f_A > 2(f_T + B/2)$.



LTI-Systeme im äquivalenten Tiefpassbereich

■ Erinnerung/Motivation:²²

- In LTI-Systemen entsteht das Ausgangssignal als Faltung des Eingangssignals mit der *Impulsantwort*:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau) d\tau$$



$$Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$

- Für reellwertige Impulsantworten gilt $H(-f) = H^*(f)$

■ Ziel: Definiere äquivalentes System im Tiefpassbereich

²²Siehe [PJ15]



LTI-Systeme im äquivalenten Tiefpassbereich

Definition

Die Funktion $h(t)$ in der Beziehung

$$h_{\text{BP}}(t) = 2 \operatorname{Re} \{ h(t) e^{j2\pi f_{\text{T}} t} \}$$

charakterisiert das zu $h_{\text{BP}}(t)$ *äquivalente Tiefpasssystem* $h(t)$ bzw. das *äquivalente Basisbandsystem* $h(t)$.



LTI-Systeme im äquivalenten Tiefpassbereich

■ Bemerkungen:

- Es folgt der Zusammenhang:

$$h_{\text{BP}}(t) = h(t)e^{j2\pi f_{\text{T}}t} + h^*(t)e^{-j2\pi f_{\text{T}}t}$$



$$H_{\text{BP}}(f) = H(f - f_{\text{T}}) + H^*(-f - f_{\text{T}})$$

- Man beachte den Faktor 2, der bei äquivalenten Tiefpasssignalen nicht auftritt. Dessen Motivation wird bald geklärt werden.
- Während $h_{\text{BP}}(t)$ ein reellwertiges System beschreibt, charakterisiert $h(t)$ (im Allg.) ein komplexwertiges System.
- Zur (direkten) Berechnung von $h(t)$ aus $h_{\text{BP}}(t)$ können die Methoden wie bei Signalen diskutiert verwendet werden.



Das Antwortverhalten äquivalenter Tiefpasssysteme

- **Frage:**²³ Kann aus der Antwort im äquivalenten Tiefpassbereich auf die Antwort im Bandpassbereich geschlossen werden?
- **Antwort:** Gegeben seien die Zusammenhänge

$$s_{\text{BP}}(t) = \text{Re} \{ s(t) e^{j2\pi f_{\text{T}} t} \} \circ \bullet S_{\text{BP}}(f) = \frac{1}{2} (S(f - f_{\text{T}}) + S^*(-f - f_{\text{T}}))$$

$$h_{\text{BP}}(t) = 2\text{Re} \{ h(t) e^{j2\pi f_{\text{T}} t} \} \circ \bullet H_{\text{BP}}(f) = H(f - f_{\text{T}}) + H^*(-f - f_{\text{T}})$$

$$r_{\text{BP}}(t) = \text{Re} \{ r(t) e^{j2\pi f_{\text{T}} t} \} \circ \bullet R_{\text{BP}}(f) = \frac{1}{2} (R(f - f_{\text{T}}) + R^*(-f - f_{\text{T}}))$$

²³ ... mit hoffentlich positiver Antwort, da sonst das Konzept wenig sinnvoll wäre ...



Das Antwortverhalten äquivalenter Tiefpasssysteme

- **Antwort:** (ctd.) Aus den Beziehungen folgt²⁴

$$\begin{aligned}R_{\text{BP}}(f) &= S_{\text{BP}}(f)H_{\text{BP}}(f) \\ &= \frac{1}{2} \left(S(f - f_{\text{T}}) + S^*(-f - f_{\text{T}}) \right) \\ &\quad \cdot \left(H(f - f_{\text{T}}) + H^*(-f - f_{\text{T}}) \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \left(S(f - f_{\text{T}})H(f - f_{\text{T}}) + S^*(-f - f_{\text{T}})H^*(-f - f_{\text{T}}) \right) \\ &\stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \left(R(f - f_{\text{T}}) + R^*(-f - f_{\text{T}}) \right)\end{aligned}$$

Somit ist:

$$R(f) = S(f)H(f) \bullet \text{---} \circ r(t) = s(t) * h(t)$$

²⁴ **Frage:** Wann/wieso gilt (*)?

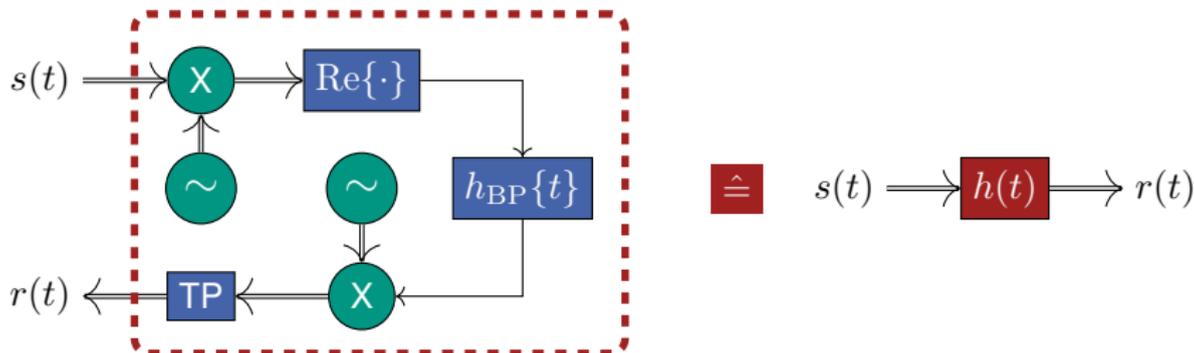
Das Antwortverhalten äquivalenter Tiefpasssysteme

Feststellung

Die Betrachtung von Signalen und Systemen kann unabhängig von der Trägerfrequenz im Basisband erfolgen! Sämtliche Beziehungen (wie z.B. Faltung im Zeitbereich, Multiplikation im Frequenzbereich) bleiben erhalten.

Das Antwortverhalten äquivalenter Tiefpasssysteme

■ Darstellung: ²⁵ ²⁶



²⁵ **Bemerkung:** In dieser vereinfachten Darstellung fehlen einige wichtige Elemente wie z.B. Verstärker, weitere Filter und A/D-, D/A-Wandler. Diese werden zur Vereinfachung nicht dargestellt.

²⁶ Der Oszillator erzeugt hier eine geeignete komplexe Schwingung; beachte den Doppelpfeil.

Das Antwortverhalten von LTI-Systemen auf Zufallssignale

- **Motivation:** Signale der Nachrichtentechnik sind zufällig²⁷ \implies „Deterministische Systemtheorie“ kann die Zusammenhänge nicht vollständig beschreiben
- **Frage:** Lassen sich die bisher erarbeiteten Mechanismen auf zufällige Signale anpassen?

²⁷ ... andernfalls müsste man sie nicht übertragen ...



Das Antwortverhalten von LTI-Systemen auf Zufallssignale

- **Frage:** Wie verhält sich ein LTI-System bei zufälligen Eingangssignalen?
- **Antwort:** Es faltet jede Musterfunktion und somit letztlich den Prozess mit der Impulsantwort $g(t)$; insgesamt folgt²⁸

$$Y(t) = X(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)X(t - \tau) d\tau$$

- **Beachte:** Da $Y(t)$ zufällig ist, muss dessen Statistik analysiert werden!

²⁸Hier ist von allgemeinen reellwertigen Prozessen die Rede; insofern wird gegenwärtig auf die Notation „BP“ verzichtet.



Das Antwortverhalten von LTI-Systemen auf Zufallssignale

- **Annahme:** Eingangsprozess ist schwach stationär
- **Erinnerung:** $X(t)$ schwach stationär \implies

$$E(X(t)) = m_X$$
$$\varphi_{XX}(t, t - \tau) = E(X(t)X(t - \tau)) = \varphi_{XX}(\tau)$$

Das Antwortverhalten von LTI-Systemen auf Zufallssignale

Hinweis

Die Definition der Autokorrelationsfunktion erfolgt wie in der Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie“ im WS 16/17.

In [Jon11] bzw. [JW02] wird $\tilde{\varphi}_{XX}(\tau) = E(X(t)X(t + \tau))$ verwendet; es ergibt sich der Zusammenhang:

$$\varphi_{XX}(\tau) = \tilde{\varphi}_{XX}(-\tau).$$

Das Antwortverhalten von LTI-Systemen auf Zufallssignale

- **Frage:** Welche Statistiken erster und zweiter Ordnung ergeben sich am Ausgang?
- **Antwort:**
 - Erwartungswert:²⁹

$$\begin{aligned} E(Y(t)) &= E\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)X(t-\tau) d\tau\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \cdot E(X(t-\tau)) d\tau \\ &= m_X G(0) \end{aligned}$$

²⁹Übung: Erklären Sie das Resultat anschaulich.

Das Antwortverhalten von LTI-Systemen auf Zufallssignale

■ Antwort: (ctd.)

- Autokorrelationsfunktion (AKF):

$$\begin{aligned}\varphi_{YY}(t, t + \tau) &= E(Y(t) Y(t - \tau)) \\ &= E \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu) X(t - \nu) g(\xi) X(t - \tau - \xi) d\nu d\xi \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu)g(\xi) \cdot E(X(t - \nu)X(t - \tau - \xi)) d\nu d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu)g(\xi) \cdot \varphi_{XX}(\tau + \xi - \nu) d\nu d\xi\end{aligned}$$

- Konsequenz: Der Ausgangsprozess ist wieder schwach stationär!³⁰

³⁰ Frage: Woran sehen Sie das?



Das Antwortverhalten von LTI-Systemen auf Zufallssignale

- **Problem:** Berechnung der Ausgangs-AKF im Zeitbereich nicht praktikabel und nicht anschaulich interpretierbar
- **Lösung:** Verwende die Fouriertransformation

$$\begin{aligned}\Phi_{YY}(f) &= \mathcal{F}\{\varphi_{YY}(\tau)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu)g(\xi) \cdot \varphi_{XX}(\tau + \xi - \nu) d\nu d\xi \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &\stackrel{(*)}{=} \Phi_{XX}(f) \cdot |G(f)|^2\end{aligned}$$

und erhalte $\varphi_{XX}(\tau)$ durch Rücktransformation.³¹

³¹ **Übung:** Führen Sie (*) ausführlich durch.



Das Antwortverhalten von LTI-Systemen auf Zufallssignale

■ Graphische Darstellung:



$$m_X$$

$$m_Y$$

$$\varphi_{XX}(\tau)$$

$$\varphi_{YY}(\tau)$$

$$\Phi_{XX}(f)$$

$$\Phi_{YY}(f)$$

- **Folgerungen:** Nach Herleitung und graphischer Veranschaulichung ist $Y(t)$ schwach stationär.

Zufallssignale im äquivalenten Tiefpassbereich

Definition

Ein reellwertiges Zufallssignal $X_{BP}(t)$, dessen Frequenzgehalt um die Frequenz f_T konzentriert ist³² heißt *Bandpassprozess*.

Ein Bandpassprozess kann im äquivalenten Basisband beschrieben werden. Es gilt

$$X_{BP}(t) = \operatorname{Re} \{ X(t) e^{j2\pi f_T t} \}$$

mit dem *äquivalenten Basisbandprozess*

$$X(t) = A(t) e^{j\vartheta(t)} = X_I(t) + jX_Q(t).$$

³²Bedenke: Diese Aussage bezieht sich auf das Leistungsdichtespektrum $\Phi_{X_{BP} X_{BP}}(f)$.



Zufallssignale im äquivalenten Tiefpassbereich

■ Bemerkung:

- Da der Prozess zufällig ist, sind
 - Amplitude $A(t)$
 - Phase $\vartheta(t)$
 - Inphasenkomponente $X_I(t)$
 - Quadraturkomponente $X_Q(t)$

alles Zufallssignale.

- Es folgt der bekannte Zusammenhang:

$$X_{BP}(t) = X_I(t) \cos(2\pi f_T t) - X_Q(t) \sin(2\pi f_T t)$$

Zufallssignale im äquivalenten Tiefpassbereich

- **Annahme:** Der Prozess $X_{\text{BP}}(t)$ sei mittelwertfrei und schwach stationär
- **Frage:** Was kann über die Quadraturkomponenten und den äquivalenten Basisbandprozess ausgesagt werden?
- **Lösung:** Statistik von $X(t)$
 - Betrachte den Erwartungswert: Aufgrund Linearität folgt

$$E(X_{\text{BP}}(t)) = 0 \implies E(X(t)) = 0 \implies E(X_{\text{I}}(t)) = E(X_{\text{Q}}(t)) = 0.$$



Zufallssignale im äquivalenten Tiefpassbereich

- **Lösung:** Statistik von $X(t)$ (ctd.)
 - Betrachte die Autokorrelationsfunktion

$$\begin{aligned}\varphi_{X_{\text{BP}}X_{\text{BP}}}(\tau) &= E(X_{\text{BP}}(t) X_{\text{BP}}(t - \tau)) \\ &= E ([X_{\text{I}}(t) \cos(2\pi f_{\text{T}}t) - X_{\text{Q}}(t) \sin(2\pi f_{\text{T}}t)] \\ &\quad \cdot [X_{\text{I}}(t - \tau) \cos(2\pi f_{\text{T}}(t - \tau)) - X_{\text{Q}}(t - \tau) \sin(2\pi f_{\text{T}}(t - \tau))]) \\ &= \varphi_{X_{\text{I}}X_{\text{I}}}(\tau) \cos(2\pi f_{\text{T}}t) \cos(2\pi f_{\text{T}}(t - \tau)) \\ &\quad - \varphi_{X_{\text{I}}X_{\text{Q}}}(\tau) \cos(2\pi f_{\text{T}}t) \sin(2\pi f_{\text{T}}(t - \tau)) \\ &\quad - \varphi_{X_{\text{Q}}X_{\text{I}}}(\tau) \sin(2\pi f_{\text{T}}t) \cos(2\pi f_{\text{T}}(t - \tau)) \\ &\quad + \varphi_{X_{\text{Q}}X_{\text{Q}}}(\tau) \sin(2\pi f_{\text{T}}t) \sin(2\pi f_{\text{T}}(t - \tau))\end{aligned}$$



Zufallssignale im äquivalenten Tiefpassbereich

- **Lösung:** Statistik von $X(t)$ (ctd.)
 - Anwendung der Additionstheoreme³³ liefert

$$\begin{aligned}\varphi_{X_{BP}X_{BP}}(\tau) &= \frac{1}{2} \cos(2\pi f_T \tau) (\varphi_{X_I X_I}(\tau) + \varphi_{X_Q X_Q}(\tau)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cos(2\pi f_T (2t - \tau)) (\varphi_{X_I X_I}(\tau) - \varphi_{X_Q X_Q}(\tau)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin(2\pi f_T \tau) (\varphi_{X_I X_Q}(\tau) - \varphi_{X_Q X_I}(\tau)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin(2\pi f_T (2t - \tau)) (\varphi_{X_I X_Q}(\tau) + \varphi_{X_Q X_I}(\tau))\end{aligned}$$

³³ $\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y))$, $\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y))$,
 $\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2} (\sin(x - y) + \sin(x + y))$



Zufallssignale im äquivalenten Tiefpassbereich

- **Lösung:** Statistik von $X(t)$ (ctd.)

- Da der Prozess $X_{BP}(t)$ schwach stationär ist, darf die rechte Seite nicht von t abhängen; es folgt:

$$\varphi_{X_I X_I}(\tau) = \varphi_{X_Q X_Q}(\tau)$$

$$\varphi_{X_Q X_I}(\tau) = -\varphi_{X_I X_Q}(\tau)$$

und schließlich

$$\varphi_{X_{BP} X_{BP}}(\tau) = \varphi_{X_I X_I}(\tau) \cos(2\pi f_T \tau) - \varphi_{X_Q X_I}(\tau) \sin(2\pi f_T \tau)$$



Zufallssignale im äquivalenten Tiefpassbereich

- **Lösung:** Statistik von $X(t)$ (ctd.)
 - Für den äquivalenten Tiefpassprozess ergibt sich:³⁴

$$\begin{aligned}\varphi_{XX}(\tau) &= \frac{1}{2} E(X(t)X^*(t-\tau)) \\ &= \frac{1}{2} E((X_I(t) + jX_Q(t))(X_I^*(t-\tau) - jX_Q^*(t-\tau))) \\ &= \varphi_{X_I X_I}(\tau) + j\varphi_{X_Q X_I}(\tau)\end{aligned}$$

und somit

$$\varphi_{X_{BP} X_{BP}}(\tau) = \operatorname{Re} \left\{ \varphi_{XX}(\tau) e^{j2\pi f_T \tau} \right\}$$

³⁴**Beachte:** Im Gegensatz zur Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie“ wird die AKF komplexer Signale mit Vorfaktor $1/2$ definiert. Der Grund erschließt sich durch das Ergebnis.



Zufallssignale im äquivalenten Tiefpassbereich

■ Bemerkungen:

- Die AKF des Basisbandprozesses legt (in Kombination mit der Trägerfrequenz) die AKF des Bandpassprozesses eindeutig fest.
- Aufgrund des Vorfaktors $1/2$ bei der AKF-Definition für komplexe Prozesse folgt

$$P_X = \varphi_{XX}(0) = \varphi_{X_{BP}X_{BP}}(0) = P_{X_{BP}}.$$

- Transformieren der AKF in den Frequenzbereich liefert für das Leistungsdichtespektrum

$$\Phi_{X_{BP}X_{BP}}(f) = \frac{1}{2} (\Phi_{XX}(f - f_T) + \Phi_{XX}(-f - f_T)).$$

$\Phi_{XX}(f)$ ist reellwertig und nicht-negativ.



Zufallssignale im äquivalenten Tiefpassbereich

- Nochmal zur KKF von $X_I(t)$ und $X_Q(t)$:
 - Nachgewiesen wurde bisher $\varphi_{X_Q X_I}(\tau) = -\varphi_{X_I X_Q}(\tau)$.
 - Es gilt aber für jede AKF stets $\varphi_{X_Q X_I}(\tau) = \varphi_{X_I X_Q}(-\tau)$. Kombinieren liefert

$$\varphi_{X_I X_Q}(\tau) = -\varphi_{X_I X_Q}(-\tau),$$

d. h. die KKF ist eine in τ ungerade Funktion.

- Da eine KKF zudem stetig ist, muss gelten:

$$\varphi_{X_I X_Q}(0) = 0$$

⇒ Für $\tau = 0$ sind Inphasen- und Quadraturkomponente unabhängig.³⁵

³⁵Wären sie für alle Zeitpunkte unabhängig, so wäre $\varphi_{X_I X_Q}(\tau) \equiv 0$. Damit wäre $\varphi_{X X}(\tau)$ reellwertig und schließlich gälte $\Phi_{X X}(f) = \Phi_{X X}(-f)$.



Zufallssignale im äquivalenten Tiefpassbereich

■ Fazit:

- Bei stochastischen Prozessen „geht fast alles wie bei Signalen“ mit ähnlichen Resultaten.
- Aufgrund schwacher Stationarität ergeben sich besondere Eigenschaften von AKF und KKF.



Komplexwertige Gauß'sche Zufallsprozesse

- **Definition:** Sei $Z(t) = m + X(t) + jY(t)$ eine komplexwertige Zufallsvariable. Besitzt der Vektor $(X, Y)^T$ eine rotationsinvariante zweidimensionale Normalverteilung³⁶, so heißt $Z(t)$ eine *komplexwertige normalverteilte Zufallsvariable*.
- **Bemerkungen:**
 - Für eine allgemeine Definition kann auf die Forderung der Rotationsinvarianz verzichtet werden. In diesem Fall ist obige Definition ein Spezialfall der allgemeinen Definition und wird als *zirkulärsymmetrisch* bezeichnet. [NeMa93]
 - Für rotationsinvariante Gaußverteilungen wird zudem meist $m = 0$ gefordert oder aufgrund bestimmter Annahmen geschlussfolgert. Dem schließen sich die folgenden Betrachtungen an.
 - Oft wird die Schreibweise $Z(t) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2)$ verwendet.

³⁶Bild!



Komplexwertige Gauß'sche Zufallsprozesse

- Sei $Z(t) = X_I(t) + jX_Q(t)$ und $Z_{BP}(t) = \text{Re}\{Z(t)e^{j2\pi f_T t}\}$.³⁷
- Aufgrund früherer Analysen muss somit gelten:

$$\varphi_{X_I X_I}(\tau) = \varphi_{X_Q X_Q}(\tau)$$

$$\varphi_{X_Q X_I}(\tau) = -\varphi_{X_I X_Q}(\tau)$$

- **Nun:** Analyse der Prozesse durch Betrachtung der Verteilung für beliebige endliche Beobachtungen.

³⁷... und somit $Z(t)$ der äquivalente Basisbandprozess eines mittelwertfreien, schwach stationären Bandpassprozesses $X(t)$.



Komplexwertige Gauß'sche Zufallsprozesse

- Es seien:
 - $N \in \mathbb{N}$ eine beliebige Beobachtungslänge
 - t_1, \dots, t_N beliebige Beobachtungszeiten
- ⇒ Bilde den *Beobachtungsvektor*

$$\mathbf{Z} := (Z(t_1), \dots, Z(t_N))^T = \mathbf{X}_I + j\mathbf{X}_Q \in \mathbb{C}^N$$

- Dann folgt für die Autokovarianz- und Kreuzkovarianzmatrizen:³⁸

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{X}_I \mathbf{X}_I} &= C_{\mathbf{X}_Q \mathbf{X}_Q} \\ C_{\mathbf{X}_I \mathbf{X}_Q} &= -C_{\mathbf{X}_Q \mathbf{X}_I} \end{aligned}$$

³⁸Nach [NeMa93]



- Dies ist genau dann der Fall, wenn die *Pseudo-Kovarianzmatrix*³⁹ zu null wird:

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{ZZ} &:= E(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T) \\ &= \mathbf{C}_{X_I X_I} - \mathbf{C}_{X_Q X_Q} + j(\mathbf{C}_{X_I X_Q} + \mathbf{C}_{X_Q X_I}) \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

- In diesem Fall ist die Verteilung von \mathbf{Z} nur noch von der Kovarianzmatrix

$$\mathbf{C}_{ZZ} = E(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^H)$$

abhängig.

³⁹Beachte, dass der Erwartungswert null ist.

■ Beispiel:

- Im eindimensionalen Fall ergibt sich:

$$Z = X_I + jX_Q \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2)$$

- Für die Quadraturkomponenten folgt:

$$E(X_I^2) = E(X_Q^2) = \frac{\sigma^2}{2}$$

Sie besitzen somit eine identische Leistung.

- Zudem sind Inphasen- und Quadraturkomponente unkorreliert und damit (da gaußverteilt) unabhängig.



■ Beispiel: (ctd.)

- Es ergibt sich die Dichte:

$$\begin{aligned} f(x_I, x_Q) &\stackrel{(a)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\sigma^2}{2}}} \exp\left(-\frac{x_I^2}{2\frac{\sigma^2}{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\sigma^2}{2}}} \exp\left(-\frac{x_Q^2}{2\frac{\sigma^2}{2}}\right) \\ &\stackrel{(b)}{=} \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x_I^2 + x_Q^2}{\sigma^2}\right) \\ &\stackrel{(c)}{=} \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{\sigma^2}\right), \end{aligned}$$

wobei (a) aufgrund der Unabhängigkeit gilt sowie (b), (c) Rechnung und Definition des komplexen Betrags sind.

- Die Dichte hängt nur vom Betrag ab. Anschaulich: Die „Höhenlinien“ der Verteilung sind Kreise.



- Die Rotationsinvarianz von $Z(t)$ lässt sich anschaulich begründen:
 - Damit die Verteilung des (Stör-)Basisbandprozesses unabhängig von der Trägerfrequenz ist, muss die Verteilung rotationsinvariant sein.
 - Da das Rauschen in nachrichtentechnischen Systemen in elektronischen Bauteilen entsteht und diese getrennt realisiert sind, müssen Inphasen- und Quadraturkomponente unabhängig sein. Da sie in derselben Umgebung liegen, sollten sie zudem dieselbe Leistung haben. Dies entspricht genau der hergeleiteten Bedingung für $Z(t)$.⁴⁰

⁴⁰Diese Erklärung gilt für das thermische *Johnson-Rauschen*.

System/Technik	Frequenz f_T	Bandbreite B	Sendeleistung
UKW-Radio	≈ 100 MHz	≈ 60 kHz	SWR 1 ⁴¹ : 80 W
GSM 900	≈ 900 MHz	≈ 200 kHz	Mobil ≤ 2 W Basis ≤ 15 W
GSM 1800	≈ 1.8 GHz	≈ 200 kHz	Mobil ≤ 1 W Basis ≤ 6.3 W
LTE	≈ 800 MHz ≈ 1.8 GHz ≈ 2.6 GHz	≤ 20 MHz	Mobil ≤ 200 mW Basis ≤ 1 W
DECT	≈ 1.9 GHz	≈ 1.5 MHz	≤ 250 mW
WLAN IEEE 802.11b/g	≈ 2.4 GHz	≈ 20 MHz	≤ 100 mW
WLAN IEEE 802.11a/n ⁴²	≈ 5.1 GHz	≈ 20 MHz	≤ 100 mW

⁴¹Sender auf der Hornisgrinde

⁴²In 802.11n und späteren Releases ist Kanalbündelung zur Erhöhung der Bandbreite möglich. [Saut15]

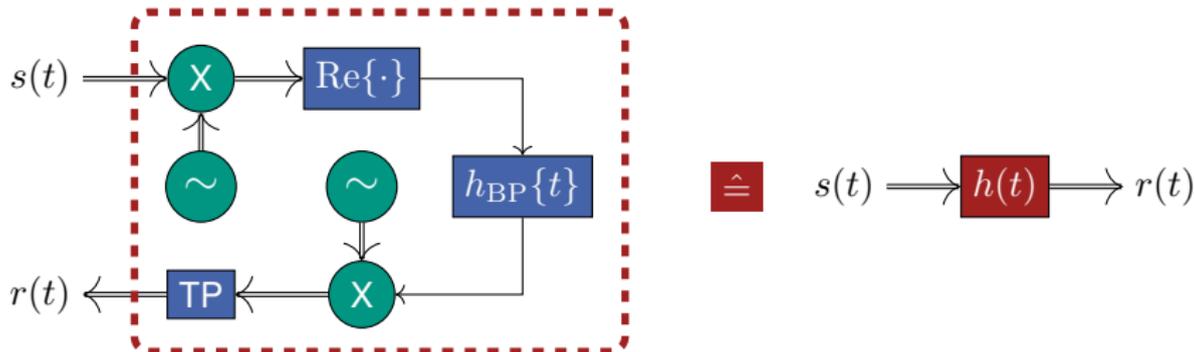
⁴³Zahlen nur ungefähre Werte ohne Gewähr. Wurden „auf die Schnelle zusammengesucht“.



- 2 Signale, Systeme und Kanäle
 - Signale und Systeme im komplexen Basisband
 - Kanäle
 - Grundlegende Betrachtungen
 - Verzerrungsfreie Übertragung
 - Der Einweg-Mobilfunkkanal
 - Der Zweiwege-Mobilfunkkanal
 - Der Mehrwege-Mobilfunkkanal
 - Mehrwege-Ausbreitung: NLOS
 - Kohärenz- und Fadingbegriffe
 - Beispiele
 - Lernziele
 - Literatur



- Erinnerung: ⁴⁴ ⁴⁵ Darstellung eines Übertragungssystems



⁴⁴ **Bemerkung:** In dieser vereinfachten Darstellung fehlen einige wichtige Elemente wie z.B. Verstärker, weitere Filter und A/D-, D/A-Wandler. Dieser werden zur Vereinfachung nicht dargestellt.

⁴⁵ Der Oszillator erzeugt hier eine geeignete komplexe Schwingung; beachte den Doppelpfeil.

- **Frage:** Was ist ein Kanal?
- **Antwort:** Ein Kanal ist ein physikalisches System, über das ein Sendesignal von einem Sender zu einem Empfänger übertragen wird.
- **Beispiele:**
 - Kupferkabel
 - Glasfaser
 - Luft/Freiraum
 - Wasser

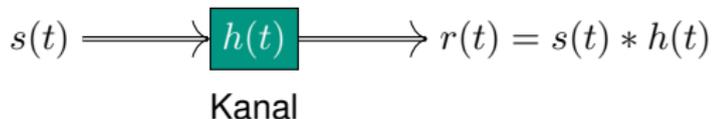


- **Frage:** Was bewirkt ein Kanal?
- **Antwort:** Ein Kanal überträgt und/aber verschlechtert das Signal

- **Beispiele:**
 - Verzögerung
 - Verzerrung (Frequenz- und Phasenverschiebung; Pulsverzerrung)
 - Rauschen/Störungen

- **Folgerung:** Entgegenwirkende Maßnahmen
 - Synchronisation
 - Entzerrung
 - Fehlerkorrektur

- Beschreibung des Kanals durch ein LTI-System



- *Ideale Übertragung:*

- Mathematisch:

$$r(t) = s(t) \implies h(t) = \delta(t) \quad \bullet \quad H(f) = 1$$

- **Physikalisch nicht realisierbar**

- *Verzerrungsfreie Übertragung:*

- Zulassen einer Verzögerung und einer Dämpfung
- Mathematisch:

$$r(t) = as(t - t_0) \implies h(t) = a\delta(t - t_0) \circ \bullet H(f) = ae^{-j2\pi ft_0}$$

- **Physikalisch nicht realisierbar**

- *Ideal bandbegrenzte Übertragung:*

- Zulassen einer Verzögerung und einer Dämpfung; Bandbegrenzung
- Mathematisch:

$$H(f) = a e^{-j2\pi f t_0} \text{rect}_{2f_g}(f) \bullet \longrightarrow h(t) = 2f_g a \frac{\sin(2\pi f_g(t - t_0))}{2\pi f_g(t - t_0)}$$

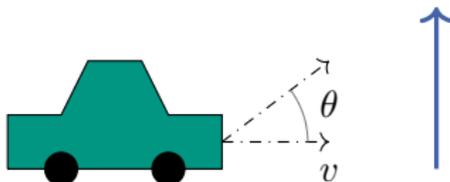
- **Physikalisch nicht realisierbar**

- Bei einer Einweg-Ausbreitung ohne Bewegung ergibt sich, falls eine harmonische Schwingung („unmodulierter Träger“) gesendet wird, das Empfangssignal als

$$r_{BP}(t) = \text{Re} \left\{ A e^{j2\pi f_T t + j\varphi_0} \right\}$$

- Bewegt sich der Sender, so folgt, falls θ den Winkel zwischen Fahrtrichtung und Ausbreitungsrichtung bezeichnet:

$$r_{BP}(t) = \text{Re} \left\{ A e^{j2\pi f_T \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta\right) t + j\varphi_0} \right\}$$



■ Bemerkungen:

- Aufgrund der Bewegung entsteht eine Doppler-Verschiebung.⁴⁶

$$f_D = -f_T \cdot \frac{v}{c} \cdot \cos \theta$$

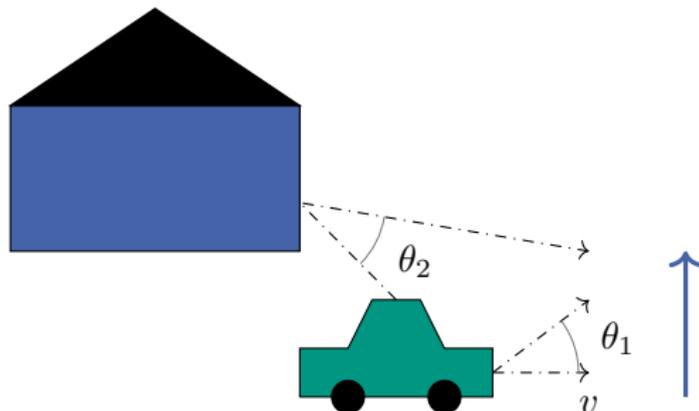
- Die Signalform bleibt erhalten; es entsteht *keine Dämpfung* und *keine Verzerrung*.
- **Ergänzung:** Da der Dopplereffekt frequenzabhängig ist, ist die Annahme *einer* Dopplerverschiebung nur für harmonische Schwingungen zutreffend. Sofern ein Signal eine „echte Bandbreite“ besitzt, werden Signalanteile unterschiedlich verschoben.
- **Übung:** Überlegen Sie sich, wie groß der Fehler bei Annahme *einer* Dopplerverschiebung für GSM und LTE ist. Rechnen Sie hierzu zur Vereinfachung mit $f_T = 1 \text{ GHz}$ und $B = 200 \text{ kHz}$ bzw. $B = 20 \text{ MHz}$.

⁴⁶Hier im Gegensatz zu [Jon11] ohne „ Δ “ und mit Minuszeichen, damit eine positive Radialgeschwindigkeit eine Verringerung der Frequenz bewirkt. Annahme: Eine Station ist stationär.



- Signale treffen im Empfänger unter den Winkeln θ_1 und θ_2 ein \implies aus dem Einwegmodell folgt:⁴⁷

$$\begin{aligned} r_{\text{BP}}(t) &= \text{Re} \left\{ A e^{j2\pi f_{\text{T}} t} \left(e^{j2\pi \frac{vt}{\lambda} \cos \theta_1} + e^{j2\pi \frac{vt}{\lambda} \cos \theta_2} \right) \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ A e^{j2\pi f_{\text{T}} t} e^{j2\pi \frac{vt}{\lambda} \frac{\cos \theta_1 + \cos \theta_2}{2}} 2 \cos \left(2\pi \frac{vt}{\lambda} \frac{\cos \theta_1 - \cos \theta_2}{2} \right) \right\} \end{aligned}$$



⁴⁷Die Phasendrehung φ_0 wird zur Vereinfachung weggelassen.

■ Folgerung:

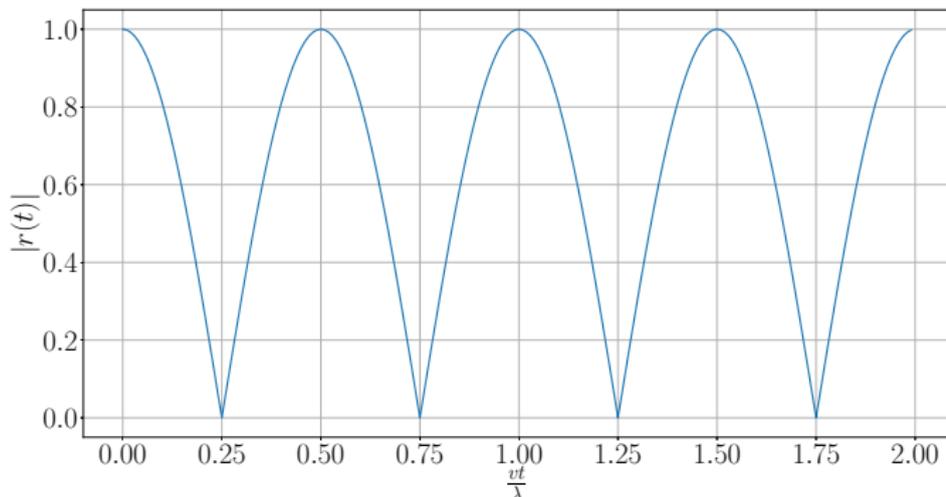
- Bei $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$ ergeben sich Nullstellen bei Änderung der Phase um $vt = \lambda/2$ bzw. $\Delta t = \lambda/(2v)$. Räumlich entspricht dies $\Delta x = \lambda/2$.
- Für den Betrag des Basisbandsignals folgt

$$|r(t)| = \left| 2A \cos \left(2\pi \frac{vt}{\lambda} \frac{\cos \theta_1 - \cos \theta_2}{2} \right) \right|$$

⇒ Die Signalamplitude ändert sich „schnell“ → *schnelles Fading*, engl.: *fast fading*



- **Graphisch:** Betrag der komplexen Einhüllenden



- **Beispiel:** Bei GSM-900 ist $f_T = 900$ MHz und damit $\lambda \approx 30$ cm. Für $v = 60$ km/h ergibt sich der zeitliche und räumliche Abstand zwischen zwei Einbrüchen zu

$$\Delta t = \frac{0.3 \text{ m}}{2 \cdot \frac{60000 \frac{\text{m}}{\text{h}}}{3600 \frac{\text{s}}{\text{h}}}} \approx 9 \cdot 10^{-3} \text{ s}, \quad \Delta x = 0.15 \text{ m}.$$

Pro Sekunde durchläuft ein Teilnehmer ca. 111 Nullstellen im Abstand von 15 cm.



- Für N Mehrwege folgt durch Erweiterung des bisherigen Modells unter Verwendung von $\Psi_n = (2\pi vt/\lambda) \cdot \cos \theta_n$:

$$r_{\text{BP}}(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{n=1}^N a_n e^{j2\pi f_{\text{T}} t} e^{j2\pi \frac{vt}{\lambda} \cos \theta_n} \right\} = \text{Re} \{ A e^{j2\pi f_{\text{T}} t} e^{j\Psi} \}$$

mit

$$A = \sqrt{\left(\sum_{n=1}^N a_n \cos \Psi_n \right)^2 + \left(\sum_{n=1}^N a_n \sin \Psi_n \right)^2}$$
$$\Psi = \arctan \left(\frac{\left(\sum_{n=1}^N a_n \sin \Psi_n \right)^2}{\left(\sum_{n=1}^N a_n \cos \Psi_n \right)^2} \right)$$

■ Beobachtungen:

- Modell wird sehr komplex
- Modellierung erfordert Kenntnis vieler Parameter (inkl. N)

⇒ Verwendung stochastischer Beschreibungen/Modelle

- Betrachte einen Mehrwegekanal ohne Sichtverbindung⁴⁸
- **Ansatz:**

$$r_{\text{BP}}(t) = \text{Re} \{ (I + jQ) e^{j2\pi f_{\text{T}} t} \} = \text{Re} \{ A e^{j\Psi} e^{j2\pi f_{\text{T}} t} \}$$

mit

$$I = \sum_{n=1}^N a_n \cos \Psi_n, \quad Q = \sum_{n=1}^N a_n \sin \Psi_n$$
$$A = \sqrt{I^2 + Q^2}, \quad \Psi = \arctan \frac{Q}{I}$$

⁴⁸Abkürzung: *Non-Line-of-Sight*, NLOS



■ Idee:

- Nach Voraussetzung ist N „groß“.
- Amplituden und Phasen sind unbekannt und werden als zufällig modelliert.
- Falls $a_n \cos \Psi_n$ (bzw. $a_n \sin \Psi_n$) als identisch verteilt und unabhängig angenommen werden, sowie Erwartungswert 0 besitzen, folgt mit dem zentralen Grenzwertsatz:

$$I, Q \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

und somit⁴⁹

$$f_{I,Q}(i, q) = f_I(i) \cdot f_Q(q) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{i^2+q^2}{2\sigma^2}}$$

⁴⁹**Hinweis:** Vergleiche das Beispiel auf Folie 60 mit $2\sigma^2 \mapsto \sigma^2$.



- Anwendung des Transformationssatzes für Wahrscheinlichkeitsdichten (siehe [JW02]) liefert:

$$f_{A,\Psi}(a, \psi) = f_{I,Q}(i, q) \cdot |\mathcal{J}|$$

und mit $|\mathcal{J}| = a$:

$$f_{A,\Psi}(a, \psi) = \frac{a}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}, \quad a > 0, \psi \in [0, 2\pi)$$

- NLOS: Phase

- Bildung der Randdichte liefert die Verteilung der Phase als

$$f_{\Psi}(\psi) = \int_0^{\infty} \frac{a}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} da = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \psi < 2\pi \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Phase ist *gleichverteilt*.⁵⁰

⁵⁰Bereits ohne explizite Berechnung klar, da die Verbunddichte nicht von ψ abhängt.



- NLOS: Amplitude

- Bildung der Randdichte liefert die Verteilung der Amplitude als

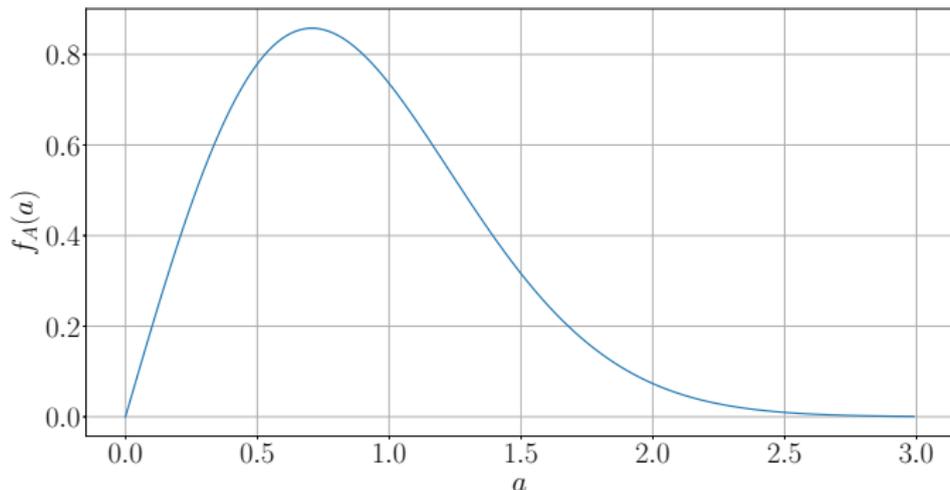
$$f_A(a) = \int_0^{2\pi} \frac{a}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} d\psi = \frac{a}{\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}, \quad a > 0$$

Die Amplitude ist *Rayleigh-verteilt*.

- Die ersten beiden Momente ergeben sich zu

$$E(A) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$$
$$D^2(A) = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$$

- NLOS: Amplitude (ctd.)
 - Graphische Darstellung für $\sigma^2 = 1/2$



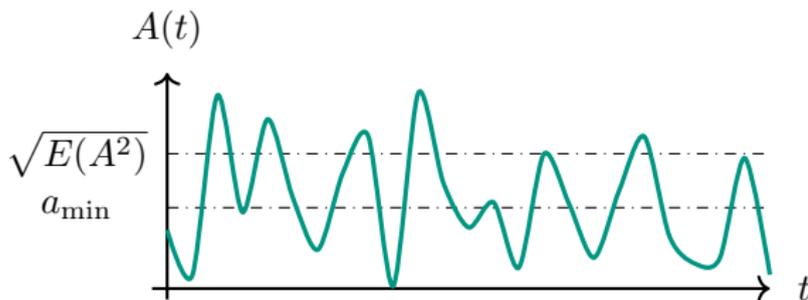
■ Fazit:

- Bei Auftreten vieler unabhängiger Pfade ist der zentrale Grenzwertsatz anwendbar.
- NLOS-Szenarien, die typisch für den Mobilfunk sind, führen zu
 - Gleichverteilter Phase
 - Rayleigh-verteilter Amplitude

■ Bemerkungen:

- Für Verbindungen mit direktem Pfad (*Line-Of-Sight, LOS*) wird der direkte Pfad dominant. Die Phase ist nicht länger gleichverteilt, die Amplitude besitzt eine *Rice-Verteilung*.
- Obige Betrachtungen decken nur einen kleinen Teil der möglichen bzw. notwendigen Analyse ab. Weitergehend müssen z.B. die Systembandbreite und die zeitliche Dynamik untersucht werden. Dies wird teilweise im Folgenden, teilweise in weiterführenden Vorlesungen erfolgen.

- **Ergänzung:** Zum Entwurf von Mobilfunksystemen
 - Annahme: Mittlere Empfangsleistung $\bar{P} = E(A^2) = 2\sigma^2$ steht zur Verfügung
 - Sinkt der Pegel unter einen Wert a_{\min} , bricht die Verbindung ab.



- **Ergänzung:** Zum Entwurf von Mobilfunksystemen (ctd.)
 - Berechnung liefert:

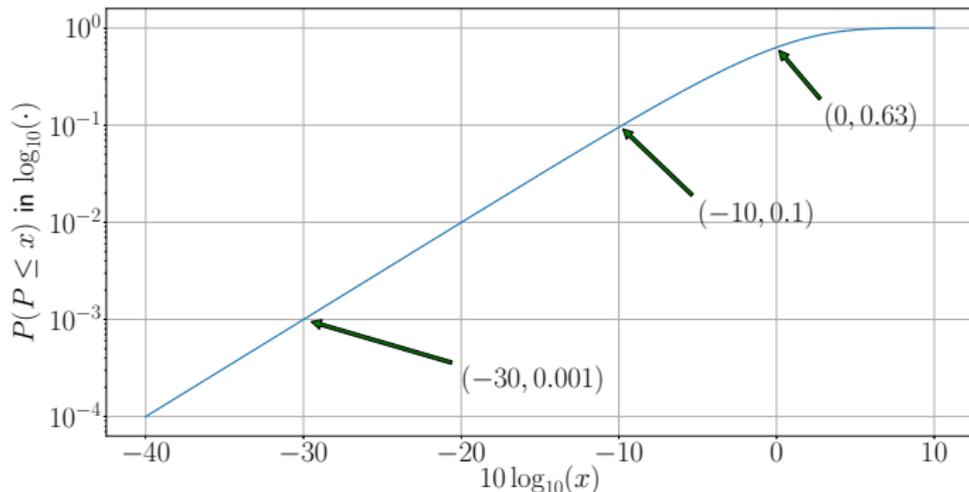
$$P(A \leq x) = \int_0^x f_A(a) da = 1 - e^{-\frac{x^2}{E(A^2)}}$$

- Identifiziert man das zweite Moment mit einer Leistung, $P = A^2$, so folgt:

$$P(P \leq x) = 1 - e^{-\frac{x}{E(P)}}$$



- **Ergänzung:** Zum Entwurf von Mobilfunksystemen (ctd.)
 - Exemplarische Darstellung für $E(P) = 1$:



- **Ziel:** Im Folgenden:
 - Betrachtung der Einflüsse von Fading und Dynamik
 - Beschreibung der Einflüsse auf eine leicht zu erfassende charakteristische Kennzahl

- **Aspekte:**⁵¹
 - Einfluss von Mehrwegeausbreitung
 - Einfluss von Zeitveränderlichkeit

⁵¹ Machen Sie sich klar, dass diese beiden nicht identisch sind.



■ Aspekt I: Mehrwege⁵²

- Durch Mehrwegeausbreitung ändert sich die Form des Signals; es entsteht eine zeitliche Verbreiterung.
- Je größer die Differenz zwischen erstem und letztem ankommenden Echo⁵³, desto „schlimmer“ wird das Empfangssignal.
- Definiere *multipath spread* oder auch *Delay spread* als:

$T_{DS} :=$ Zeitspanne, während der die Echos ankommen

- Die *Kohärenzbandbreite* ergibt sich über:

$$B_C \sim \frac{1}{T_{DS}}$$

Sie beschreibt anschaulich die Bandbreite, über die der Kanal als kohärent angesehen werden kann.

⁵²Details in [PS08, S. 833 ff.]. Im Folgenden erfolgt nur eine anschauliche Motivation/Begründung.

⁵³... mit nicht vernachlässigbarem Signalpegel...

■ **Aspekt I:** Mehrwege (ctd.)

- **Erinnerung:** $B_C \sim 1/T_{DS}$
- **Anschauung:** „Rumspielen“ mit T_{DS} unter Beachtung von Korrespondenzen der Fourier-Transformation...

- Ist $B_C > B$, so wird das gesamte Signalspektrum gleich/ähnlich beeinflusst; die Signalform bleibt im Wesentlichen erhalten. Man spricht von *flat fading* oder *frequenzflachem Fading*.
- Ist $B_C < B$, so wird das Signalspektrum frequenzabhängig verändert; es ergibt sich eine Signalverzerrung. Man spricht von *frequency-selective fading* oder *frequenzselektivem Fading*.



■ Aspekt I: Mehrwege (ctd.)

- Betrachte ein Sendesignal mit Rechteckpulsformung der Breite T :

$$x(t) = r_T \left(t - \frac{T}{2} \right) \circ \bullet X(f) = T \operatorname{sinc}(\pi f T) e^{-j\pi f T}$$

Im Signal-Frequenzbereich ergibt sich somit eine sinc-Funktion der Bandbreite⁵⁴ $2/T$.

- Der Kanal bestehe aus direktem Pfad und einem Echo mit Verzögerung τ :

$$h(t) = \delta(t) + \delta(t - \tau) \circ \bullet H(f) = 1 + e^{-j2\pi f \tau} = e^{-j\pi f \tau} \cdot 2 \cos(\pi f \tau)$$

Der Kanal hat damit die Bandbreite $1/\tau$.

⁵⁴Unter „Bandbreite“ sei hier der Abstand der ersten Nulldurchgänge gemeint.

■ Aspekt I: Mehrwege (ctd.)

■ Erinnerung:

- Signalbandbreite $2/T$
- Kanalbandbreite $1/\tau$

- Ist $T \gg \tau$, so ist $|H(f)|$ viel breiter als $|X(f)| \implies |H(f)|$ ist im Spektrum des Signals nahezu konstant (*frequenzflach*); es folgt:

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f) \approx H(0)X(f)$$



$$y(t) = H(0)x(t)$$

Die Wirkung des Kanals besteht in diesem Fall in der Multiplikation mit einer (komplexen) Zahl.



■ **Aspekt I:** Mehrwege (ctd.)

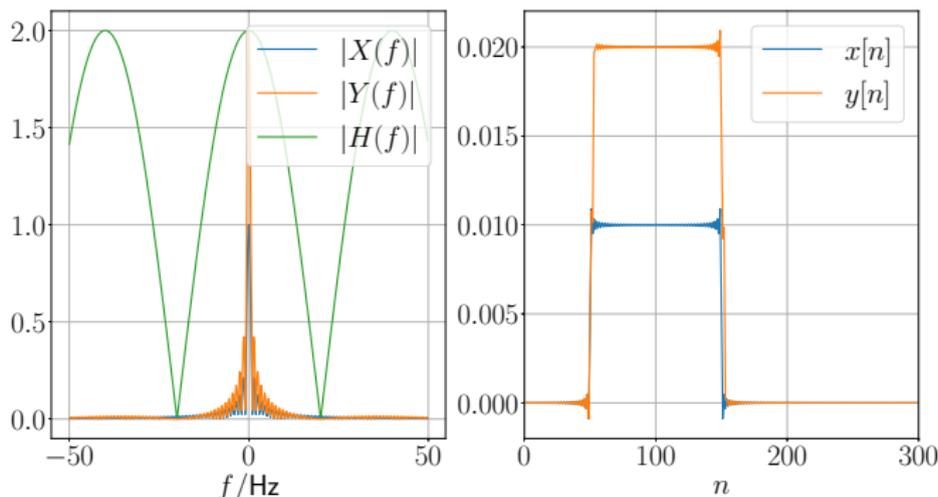
- Ist *nicht* $T \gg \tau$, so ist $|H(f)|$ *nicht* flach/konstant über das Signalspektrum und damit wird das Signalspektrum durch den Kanal verändert. Dann entspricht die Übertragung im Zeitbereich nicht mehr einer einfachen Multiplikation, sondern einer Faltung.

■ **Bemerkung:**

Im Zeitbereich kann das ebenso nachvollzogen werden, da für $T \gg \tau$ das Signal deutlich breiter ist als die Kanalimpulsantwort. Letztere ist dann „Dirac-ähnlich“. Die Faltung, welche die Breite $T + \tau$ besitzt [PJ15], ist dann „ähnlich lang“ wie das Signal und „sieht ähnlich aus“.



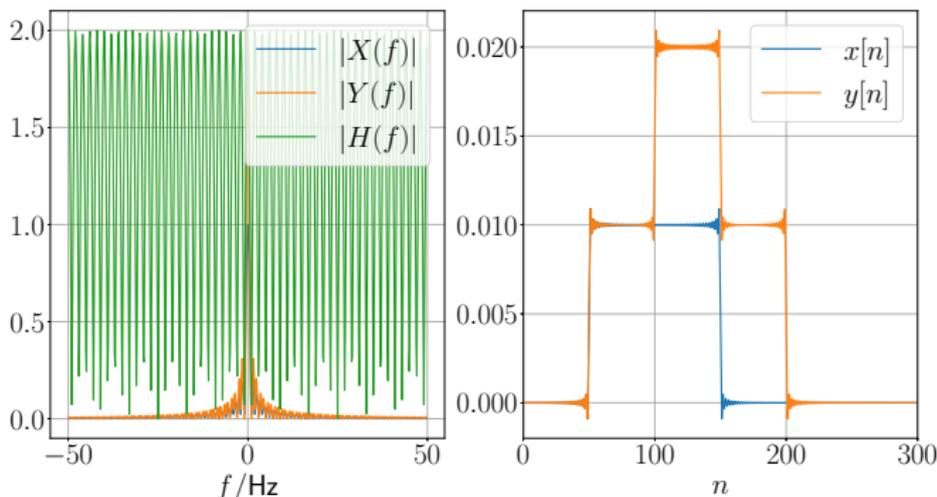
- **Aspekt I:** Mehrwege (ctd.)
- **Beispiel:**⁵⁵ Kanal $h(t) = \delta(t) + \delta(t - 0.025 \text{ s})$; Eingangssignal ist Rechteck der Breite $T = 1 \text{ s}$.



⁵⁵ **Datei:** frequency_selective.ipynb



- **Aspekt I:** Mehrwege (ctd.)
- **Beispiel:**⁵⁶ Kanal $h(t) = \delta(t) + \delta(t - 0.5 \text{ s})$; Eingangssignal ist Rechteck der Breite $T = 1 \text{ s}$.



⁵⁶ **Datei:** frequency_selective.ipynb



■ Aspekt I: Mehrwege (ctd.)

■ Ergänzung:

- Besteht der Kanal aus mehreren Echos, so kann er beschrieben werden als:

$$h(t) = \delta(t - \tau_0) + \delta(t - \tau_1) + \dots + \delta(t - \tau_N)$$

$$\circ \rightarrow H(f) = e^{-j2\pi f\tau_0} + e^{-j2\pi f\tau_1} + \dots + e^{-j2\pi f\tau_{N-1}} + e^{-j2\pi f\tau_N}$$

- Nimmt man an, dass N ungerade ist, dann kann man die Terme paarweise zusammenfassen und erhält Ausdrücke der Form:

$$e^{-j\pi f(\tau_{N-i} + \tau_i)} \cdot 2 \cos(\pi f(\tau_{N-i} - \tau_i))$$

- Das Paar $\tau_N - \tau_0$ hat zeitlich den größten Abstand; alle anderen Paare sind zeitlich schmaler und damit in der Frequenz breiter. Die „Flachheit“ wird somit durch $\tau_N - \tau_0$ dominiert und die bisherigen Betrachtungen bleiben gültig.

■ Aspekt II: Doppler

- Durch den Dopplereffekt ändert sich die Frequenz.
- Da der Dopplereffekt frequenzabhängig ist, werden unterschiedliche Frequenzen unterschiedlich beeinflusst; es entsteht eine Verbreiterung des Spektrums.

- Definiere *Doppler spread* als:

B_{DS} := Differenz zwischen min. und max. Dopplerverschiebung am Rx

- Die *Kohärenzzeit* ergibt sich über:

$$T_C \sim \frac{1}{B_{DS}}$$

Sie beschreibt anschaulich die Zeitdauer, während der der Kanal als kohärent angesehen werden kann.



■ Aspekt II: Doppler (ctd.)

- **Erinnerung:** $T_C \sim 1/B_{DS}$
- Anschauung: „Rumspielen“ mit B_{DS} ...

- Ist $T_C > T$, so wird ein Symbol gleich/ähnlich beeinflusst. Man spricht von *slow fading* oder *langsamem Fading*.
- Ist $T_C \ll T$, so „sieht“ ein Symbol mehrere Kanalrealisierungen. Man spricht von *fast fading* oder *schnellem Fading*.



Fadingbegriffe

Bzgl. der Fading-Charakteristik eines Kanals ergeben sich die folgenden Begriffe bzw. Unterscheidungen:

Fadingbegriffe	$B < B_C$	$B \geq B_C$
$T < T_C$	flat, slow	freq. selective, slow
$T > T_C$	flat, fast	freq. selective, fast

- **Übung:** Argumentieren und begründen Sie, welches Szenario Sie gerne für eine Übertragung vorfinden.

- GSM⁵⁷
 - GSM hat einen Delay-Spread von ca. $1\mu\text{s}$; damit folgt eine Kohärenzbandbreite von ca. 500 kHz bei einer Systembandbreite von 200 kHz
 - Bei $f_T \approx 1\text{ GHz}$ und $v \approx 300\text{ km/h}$ ergeben sich Doppler-Spread von einigen hundert Hz; damit folgt eine Kohärenzzeit von einigen ms

⁵⁷Nach [TV05, S. 125]; dort wird die Kohärenzbandbreite als $1/2T_{\text{DS}}$ definiert.

- 2 Signale, Systeme und Kanäle
 - Signale und Systeme im komplexen Basisband
 - Kanäle
 - Lernziele
 - Literatur



- Die folgende Aufstellung fasst die zentralen Punkte zusammen.
- Es wird aufgezeigt, welche Punkte nach Bearbeitung des Kapitels klar sein sollten.
- **Hinweise:**
 - Die Auflistung ist nicht vollständig, sondern führt die wichtigsten Aussagen auf; nicht erwähnte Inhalte sind dennoch bedeutsam.
 - Oft enthalten die Nachweise wichtige Ideen; diese also nicht vernachlässigen.
 - Stets versuchen, Gleichungen in Verbindung mit Interpretationen und Anwendungen zu sehen
 - Des weiteren sollten alle kleinen nützlichen Ergänzungen verstanden sein.
 - Es ist immer eine gute Idee, etwas Gelerntes im Rechner umzusetzen. Dies hilft beim Verständnis und schärft das Bewusstsein für mögliche Probleme.

Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- Motivation für Verwendung von Frequenzbändern
- Motivation für Verwendung von äquivalenten Tiefpasssignalen
- Darstellung der komplexen Einhüllenden/des äquivalenten Tiefpasssignals
 - Inphasen- und Quadraturkomponente
 - Zusammenhänge zu Bandpasssignal in Zeit- und Frequenzbereich
- Übertragung der Begrifflichkeiten auf Systeme
- Übertragung der Begrifflichkeiten auf Zufallssignale; Eigenschaften von AKF und KKF
- Komplexe Gaußverteilung

Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- Begriff des Kanals und dessen Einfluss auf die Übertragung
- Gedanken zur physikalischen Existenz von Kanälen
- Ein- und Zweiwegekanal
- Mehrwegekanal
- Modellierung von NLOS-Szenarien
 - Ursprung
 - Rechtfertigung/Notwendigkeit statistischer Beschreibung
 - Charakterisierung von Betrag und Phase
- Grundlegendes Verständnis der Fadingbegriffe



- 2 Signale, Systeme und Kanäle
 - Signale und Systeme im komplexen Basisband
 - Kanäle
 - Lernziele
 - Literatur

- [Jon11] F. Jondral, *Nachrichtenübertragung*, Schlembach, 4. Auflage, 2011
- [PS08] J. Proakis, M. Salehi, *Digital Communications*, McGraw-Hill, 2008
- [PJ15] F. Puente-León, H. Jäkel, *Signale und Systeme*, De Gruyter Oldenbourg, 6. Auflage, 2015
- [JW02] F. Jondral, A. Wiesler, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und stochastische Prozesse*, Teubner, 2. Auflage, 2002
- [Kam04] K.-D. Kammeyer, *Nachrichtenübertragung*, Teubner, 3. Auflage, 2004
- [Saut15] M. Sauter, *Grundkurs Mobile Kommunikationssysteme*, Springer, 6. Auflage, 2015
- [NeMa93] Neeser, Massey, *Proper Complex Random Processes with Applications to Information Theory*, IEEE Transactions on Information Theory, July 1993
- [TV05] D. Tse, P. Viswanath, *Fundamentals of Wireless Communications*, Cambridge University Press, 2005

Nachrichtentechnik I – Modulation und Demodulation

Holger Jäkel

Communications Engineering Lab (CEL)



- 3 Modulation und Demodulation
 - Modulation
 - Etwas Entscheidungstheorie
 - Demodulation
 - Lernziele
 - Literatur



- Folgende Diskussionen erfolgen gemäß¹

[Jon11]: F. Jondral, *Nachrichtenübertragung*, Schlembach, 4. Auflage, 2011

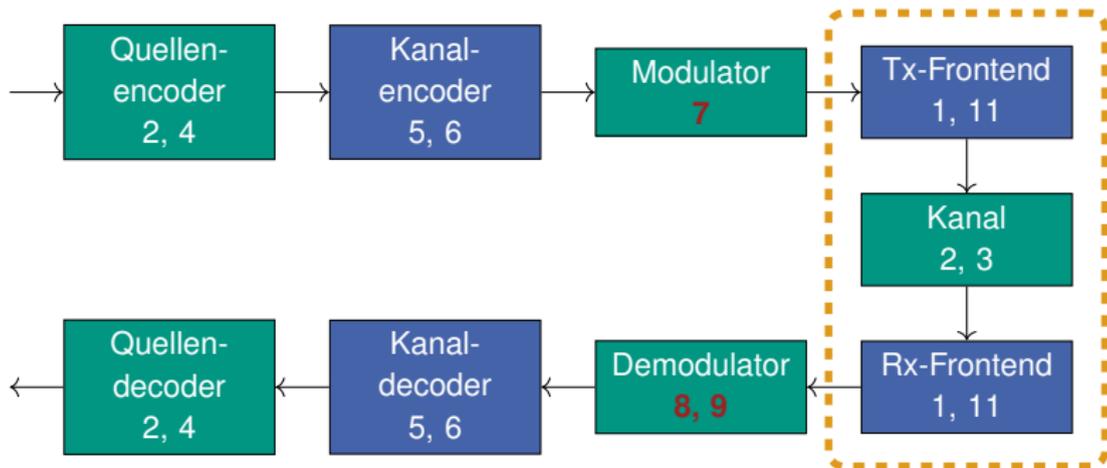
¹Von dort entstammt die Struktur der Folien, die Formeln und die meisten Bilder.

- Weitere Ergänzungen entstammen oft

[PS08]: J. Proakis, M. Salehi, *Digital Communications*, McGraw-Hill, 2008

[Kam04]: K.-D. Kammeyer, *Nachrichtenübertragung*, Teubner, 3. Auflage, 2004

Einordnung der Kapitel von [Jon11]



Kommunikations-
netze
12, 15

Systemkonzepte
7, 11, 15

Empfangs-
signalverarbeitung
13, 14

3 Modulation und Demodulation

- Modulation
 - Zeigerdarstellung
 - Systematik der Modulationsverfahren
 - Funktion eines Modulators
 - Binäre Tastung
 - PSK-Varianten
 - Minimum Shift Keying
 - Beispiele
- Etwas Entscheidungstheorie
- Demodulation
- Lernziele
- Literatur

■ Erinnerung:

- Ein Bandpasssignal der Frequenz f wird dargestellt durch:

$$\begin{aligned}s_{\text{BP}}(t) &= a \cos(2\pi ft + \vartheta) \\ &= a \cos(2\pi f_{\text{T}}t + 2\pi f_{\text{I}}t + \vartheta), \quad f = f_{\text{T}} + f_{\text{I}}\end{aligned}$$

- Der Zusammenhang zu dem zugehörigen Basisbandsignal lautet:

$$\begin{aligned}s_{\text{BP}}(t) &= \text{Re}\{s(t)e^{j2\pi f_{\text{T}}t}\} \\ s(t) &= ae^{j\vartheta + j2\pi f_{\text{I}}t}\end{aligned}$$

- **Folgerung:** Hochmischen auf den Träger f_{T} haben wir bereits gelernt. Es verbleibt das Darstellen der Information im Basisbandsignal!



Erinnerung

Im Unterschied zu [Jon11] sind alle Größen ohne Index als Basisbandgrößen zu lesen.

Signale und Systeme im Bandpass sind durch ein tiefgestelltes „BP“ gekennzeichnet.



- **Feststellung/Illustration:** $s(t) = ae^{j\vartheta + j2\pi f_1 t}$ beschreibt einen (komplexen) Zeiger mit Amplitude a und Nullphasenwinkel ϑ , der sich in der \mathbb{C} -Ebene mit Frequenz f_1 dreht
- **Konsequenz:** Es gibt drei Größen, die zur Aufprägung von Information in Frage kommen:
 - Amplitude $a \in \mathbb{R}$
 - Phase ϑ
 - Frequenz f_1
- **Bemerkung:** Durch Kombinieren von Amplitude und Phase entsteht eine komplexe Amplitude $A = ae^{j\vartheta} \in \mathbb{C}$



- **Klassifizierung:** Modulationsverfahren werden im ersten Schritt unterschieden in
 - *Analoge Modulationsverfahren:* Informationssignale sind kontinuierliche Funktionen
 - *Digitale Modulationsverfahren:* Es werden diskrete Informationen (Bits, Symbole, ...) übertragen

- **Bemerkung:** In den meisten Anwendungen wurden analoge Modulationsverfahren durch digitale Modulationsverfahren abgelöst
⇒ *Im Folgenden werden digitale Modulationsverfahren diskutiert*

- **Grundgedanke:** Symbole werden physikalisch veränderbaren Verläufen (Signalen) aufgeprägt
- **Erste Idee:**
 - Umwandlung der Bits in Spannungspegel: 0 → LOW, 1 → HIGH.
 - Halteglied sorgt für Halten des Spannungspegels über die Zeit T
 - **Veranschaulichung:** Tafel
 - **Nachteile?** → Diskussion
- **Verbesserungen:**
 - Mehr Bits pro Symbol
 - Bessere Gestaltung des Signals (Sendepulses)

■ Mathematische Darstellung:

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A(nT)g(t - nT)$$

Hierbei sind

- $A(nT) \in \mathbb{C}$
- $g(t)$
- T
- $1/T$

die zufälligen Symbole,
der verwendete Signalverlauf (meist reellwertig),
die Symboldauer,
die Symbolrate.

■ Bemerkungen:

- Einheit der Symbolrate: *Baud*, *Bd*
- Bitrate entsteht aus Symbolrate abhängig von der Anzahl der pro Symbol gesendeten Bits; formal:

$$\frac{\text{bit}}{\text{s}} = \frac{\text{bit}}{\text{Symbol}} \frac{\text{Symbole}}{\text{s}}$$

- Wegen der Zufälligkeit der Symbole ist $X(t)$ ein stochastischer Prozess, dessen Realisierungen durch Festlegung der Datensymbole entstehen

■ Fragen:

- Wie sollten die zu übertragenden Bits auf Symbole abgebildet werden?
- Welche Signale (*Pulsformen*) $g(t)$ sollen verwendet werden?



- Grundprinzip des *Quadrature Phase Shift Keying*, QPSK:
 - Umwandlung der Bits auf ± 1 durch *Non-Return-to-Zero*, NRZ:

$$b_i \mapsto (-1)^{b_i}$$

- Zusammenfassen zweier NRZ-Werte und anschließend Umwandlung zu einem komplexen Symbol, etwa gemäß:

Bits	Symbol, NRZ	Zahl, komplex	Betrag	Phase
0 0	+1 +1	+1 + j	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$
0 1	+1 -1	+1 - j	$\sqrt{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
1 0	-1 +1	-1 + j	$\sqrt{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
1 1	-1 -1	-1 - j	$\sqrt{2}$	$\frac{5\pi}{4}$

Frage: Wieso zwei Dimensionen; wieso komplexe Zahlen?

Antwort: Erinnern Sie sich an das äquivalente Basisband!



- Grundprinzip des *Quadrature Phase Shift Keying, QPSK*: (ctd.)
 - Aus

$$s(t) = A(nT)g(t) \stackrel{g(t) \text{ reell}}{=} \underbrace{\operatorname{Re}\{A(nT)\}g(t)}_{=x_I(t)} + j \underbrace{\operatorname{Im}\{A(nT)\}g(t)}_{=x_Q(t)}$$

folgen die Sendesignale:²

$$s_{00}(t) = g(t) \cos(2\pi f_T t) - g(t) \sin(2\pi f_T t)$$

$$s_{01}(t) = g(t) \cos(2\pi f_T t) + g(t) \sin(2\pi f_T t)$$

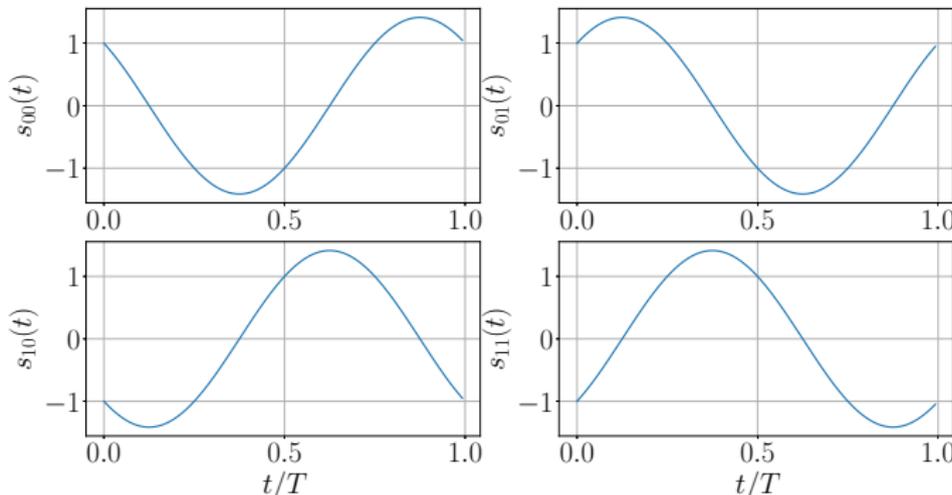
$$s_{10}(t) = -g(t) \cos(2\pi f_T t) - g(t) \sin(2\pi f_T t)$$

$$s_{11}(t) = -g(t) \cos(2\pi f_T t) + g(t) \sin(2\pi f_T t)$$

²**Erinnerung:** $x(t) = x_I(t) + jx_Q(t) \implies x_{BP}(t) = x_I(t) \cos(2\pi f_T t) - x_Q(t) \sin(2\pi f_T t)$



- Grundprinzip des *Quadrature Phase Shift Keying*, QPSK: (ctd.)
 - Für $f_T = 1$ Hz entstehen für Rechteck-Pulsformung $g(t) = \text{rect}_{1 s}(t)$ die vier möglichen Sendesignale.³



³Frage: Können Werte > 1 bzw. < -1 richtig sein? Es sind doch trigonometrische Funktionen...

■ Feststellung:

- Im äquivalenten Basisband liegen komplexwertige Signale vor \implies Real- und Imaginärteil veränderbar
- Erweiterung der Idee von QPSK \implies Zusammenfassen von k Bits und „Verteilen“ von M Punkten in der komplexen Ebene
- Punkte bzw. entsprechende Sendesignale enthalten $\log_2(M)$ Bits Information im Takt $T \implies$ *Datenrate*

$$R = \frac{\log_2(M)}{T} \left(\frac{\text{bit}}{\text{s}} \right)$$

Definition

Die gängigsten Modulationsverfahren, die auf Änderung der (komplexen) Amplitude beruhen, sind mit $0 \leq m \leq M - 1$ und einem Skalierungsfaktor⁴ $d \in \mathbb{R}_{>0}$:

- *Amplitude Shift Keying (ASK)*

$$A_m = a_m + j0, \quad a_m = (2m - (M - 1))d$$

- *Phase Shift Keying (PSK)*

$$A_m = e^{j2\pi \frac{m}{M}} = \cos\left(2\pi \frac{m}{M}\right) + j \sin\left(2\pi \frac{m}{M}\right)$$

- *Quadrature Amplitude Modulation (QAM)*

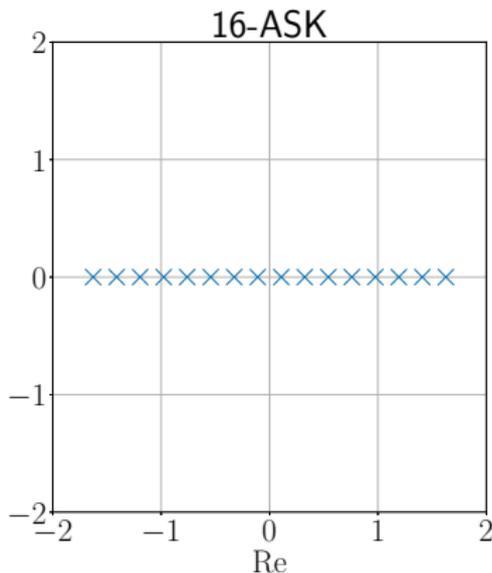
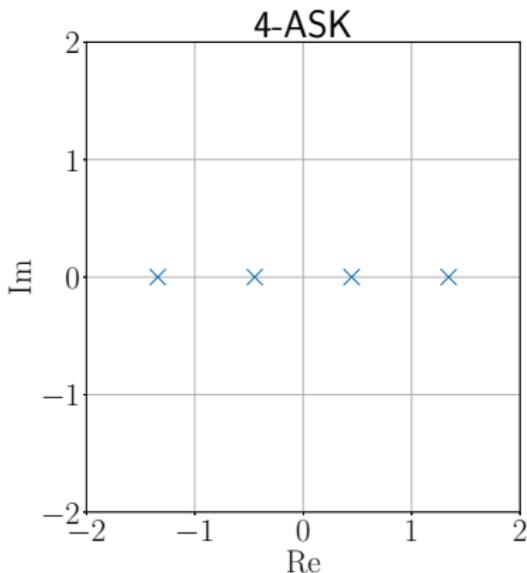
$$A_m = a_{I,m} + ja_{Q,m}, \quad a_{I,m}, a_{Q,m} \sim \text{ASK}$$

⁴Der Skalierungsfaktor dient der Normierung, etwa der Energie.



Funktion eines Modulators

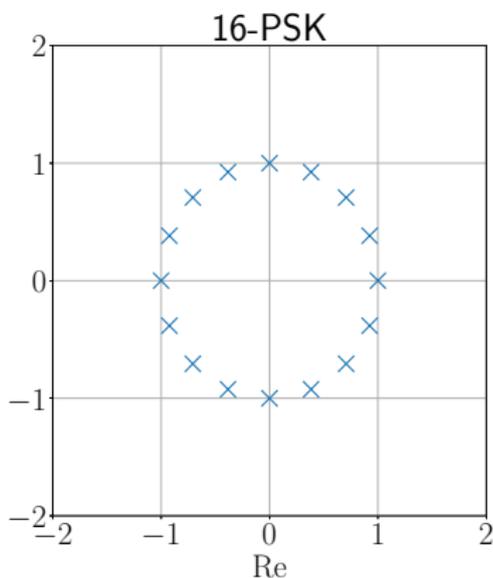
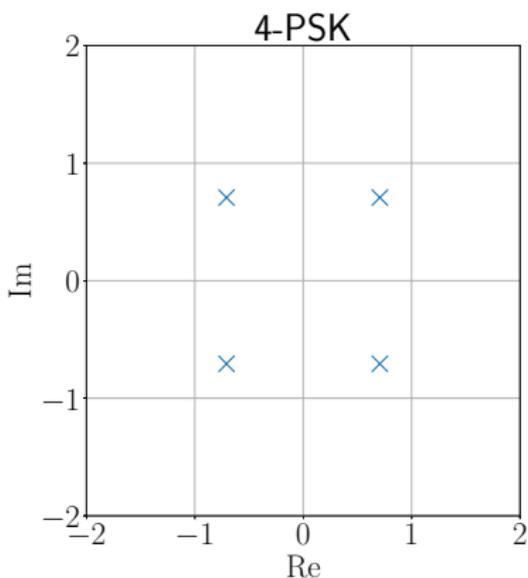
- **Beispiel:** Illustration der ASK; d wurde so gewählt, dass die mittlere Energie $1/M \cdot \sum_{m=0}^{M-1} |A_m|^2 = 1$ ist.⁵



⁵Übung: Berechnen Sie jeweils d .



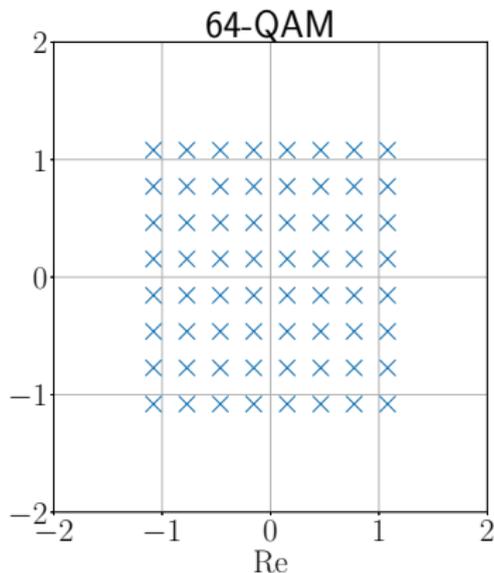
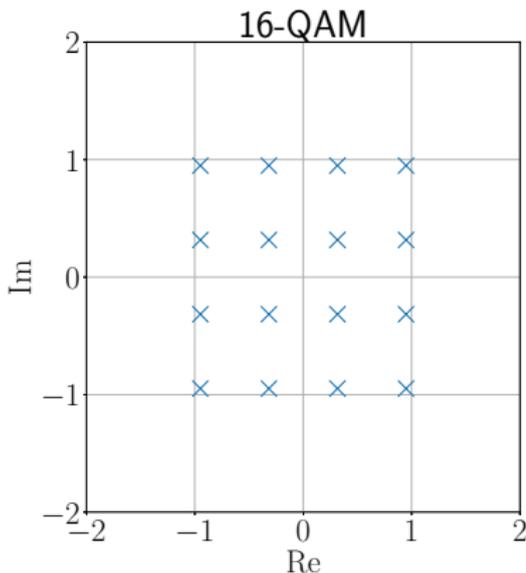
■ Beispiel: Illustration der PSK⁶



⁶Bei PSK sieht man oft auch eine um π/M gedrehte Variante.

Funktion eines Modulators

- **Beispiel:** Illustration der QAM; d wurde so gewählt, dass die mittlere Energie $1/M \cdot \sum_{m=0}^{M-1} |A_m|^2 = 1$ ist.⁷



⁷Übung: Berechnen Sie jeweils d .

■ Bemerkungen:

- Die Literatur ist bzgl. ASK uneinheitlich. Die hier verwendete Definition (und in [PS08]) ist nach mancher Auffassung durch das negative Vorzeichen eine Kombination von ASK und PSK. Deshalb fordern manche Autoren

$$A_m = a_m + j0, \quad a_m = md, \quad 0 \leq m < M.$$

- Im Sinne eines fairen Vergleichs müssen die erzeugten Punkte auf dieselbe mittlere Leistung normiert werden.⁸ Dies entspricht einem Skalieren der Amplitude in I- und Q-Richtung. → **Diskussion**

⁸Ist bei den dargestellten Konstellationen durchgeführt.



- **Feststellung 1:** Halteglied entspricht der Signalformung/Pulsformung mit einem *Rechteckpuls, rechteckiger Pulsformung*:⁹

$$g_R(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{T}, & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \quad \circ \bullet \quad G_R(f) = \sqrt{T} \cdot \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$$

- **Feststellung 2:** Rechteckpulsformung (=Halteglied) praktisch nicht sinnvoll, für theoretische Betrachtungen und zur Veranschaulichung aber nützlich!

⁹Hier normiert auf Energie 1 und akausal. Durch Verschiebung um $T/2$ entstünde ein kausaler Puls/ein kausales Filter.

- Praktisch relevant: *Raised-Cosine-Roll-off Impulse*¹⁰ mit *Roll-Off-Faktor*
 $0 \leq r \leq 1$

$$G_{\text{RC}}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq \frac{1-r}{2T} \\ \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{\pi T}{r} \left(|f| - \frac{1-r}{2T} \right) \right) \right], & \frac{1-r}{2T} < |f| \leq \frac{1+r}{2T} \\ 0, & |f| > \frac{1+r}{2T} \end{cases}$$

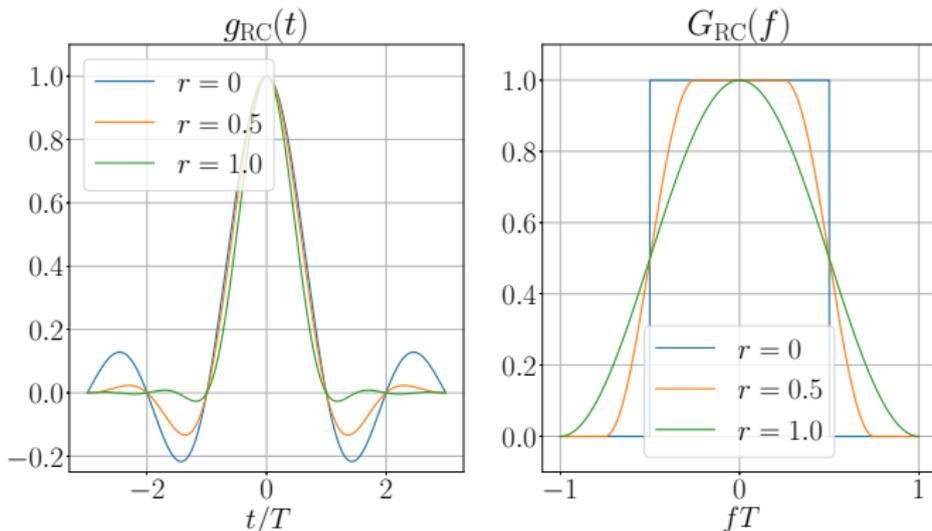


$$g_{\text{RC}}(t) = \frac{1}{T} \text{sinc} \left(\pi \frac{t}{T} \right) \frac{\cos \left(\pi r \frac{t}{T} \right)}{1 - \left(2r \frac{t}{T} \right)^2}$$

¹⁰In der Darstellung aus [Kam04], die von der in [Jon11] geringfügig abweicht.

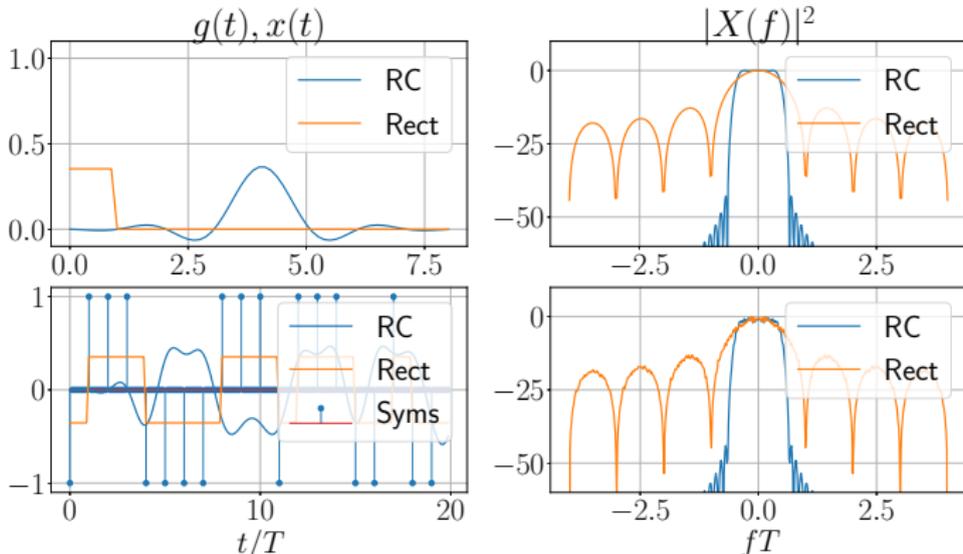


- **Beispiel:** *Raised-Cosine-Roll-off Impulse* bei verschiedenen Roll-Off-Faktoren



Funktion eines Modulators

- **Beispiel:**¹¹ Pulsformung¹² mit Rechteckpuls und RC ($r = 0.33$); Realisierung einer Datenfolge und Spektralschätzung



¹¹ **Datei:** pulse_shaping.ipynb

¹² **Bemerkung:** Die Pulse sind hier kausal realisiert, d.h. abgeschnitten („gefenstert“) und so verschoben, dass sie bei $t = 0$ beginnen. (**Übung:** Überlegen Sie sich die Auswirkungen auf $|X(f)|^2$.)

■ Bemerkung:

- Echt getrennte Pulse erfordern¹³

$$\text{supp}\{g(t)\} \subseteq [0, T].$$

Dies ist beispielsweise durch Rechteckpulse erfüllt. Nachteil ist ein breiteres Spektrum.

- Beachte, dass sich benachbarte RC-Pulse überlappen. Dies ist aber „gewünscht“, damit das Signal im Frequenzbereich nicht zu breit wird.
- Die sich überlappenden Pulse können bzgl. der Datenentscheidung „auseinandergerechnet“ werden. Wie dies erfolgen kann, wird später besprochen.

¹³**Hinweis:** Der *Träger* einer Funktion ist $\text{supp}\{f(x)\} := \{x : f(x) \neq 0\}$

Definition

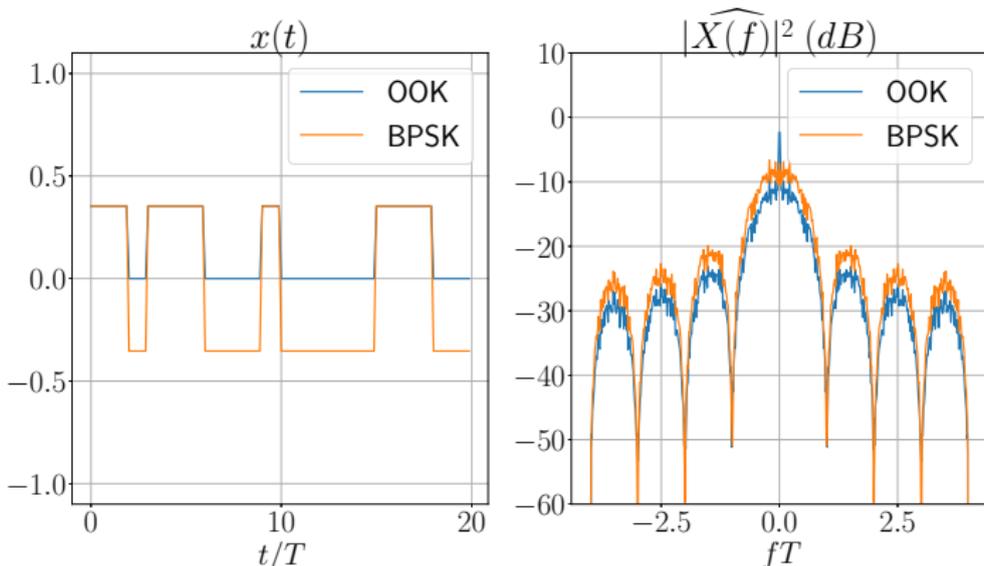
Bei *binärer ASK* ändert sich (reelle) Amplitude des Sendesignals. Beim *On-Off-Keying, OOK*, ist $A(nT) = 1$ oder $A(nT) = 0$.

Definition

Bei *binärer PSK*, engl.: *Binary Phase Shift Keying, BPSK*, ändert sich die Phase um π . Dies entspricht $A(nT) = +1$ oder $A(nT) = -1$.



- **Beispiel:**¹⁴ Realisierungen von OOK und BPSK mit Rechteckimpuls sowie Schätzungen der Leistungsdichtespektren¹⁵



¹⁴ **Datei:** bpsk_ook.ipynb

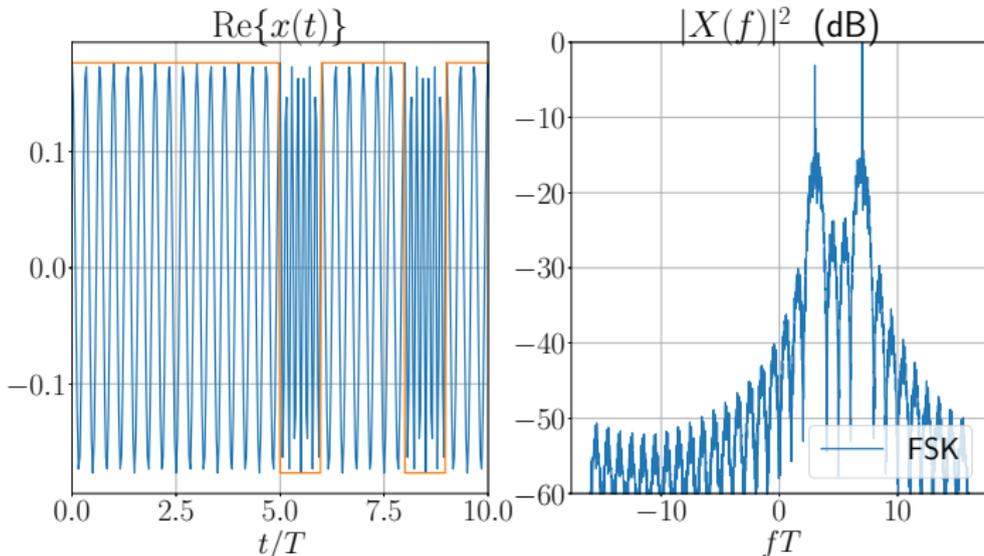
¹⁵ **Frage:** Was fällt Ihnen auf? Wieso ist der Vergleich „unfair“.

Definition

Frequenzastung (engl.: *Frequency Shift Keying, FSK*) repräsentiert die Information in der Frequenz \implies Bei binärer Übertragung folgt:

$$x_i(t) = e^{j2\pi f_i t}, \quad i = 0, 1$$

- **Beispiel:**¹⁶ Realisierungen von FSK mit $T = 1$ s, $f_0 = 3$ Hz und $f_1 = 7$ Hz bei zufälligen Symbolen sowie Schätzung des Leistungsdichtespektrums



¹⁶ **Datei:** fsk.ipynb



■ Bemerkung:

- Werden die Frequenzen symmetrisch zur Trägerfrequenz gewählt, so folgt bei binärer Übertragung:

$$x(t) = e^{j2\pi(\pm\Delta f)t}$$

$$x_{BP}(t) = \cos(2\pi(f_T \pm \Delta f)t)$$

- **Frage:** Wie sollte Δf gewählt werden? → **Diskussion**



- Analysiere Orthogonalität der Signale:

$$\begin{aligned}\rho &= \int_0^T \cos(2\pi(f_T + \Delta f)t) \cos(2\pi(f_T - \Delta f)t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \cos(4\pi\Delta ft) dt + \frac{1}{2} \int_0^T \cos(4\pi f_T t) dt \\ &\approx \frac{1}{2} \int_0^T \cos(4\pi\Delta ft) dt \\ &= \frac{\sin(4\pi\Delta fT)}{8\pi\Delta f}\end{aligned}$$

- **Feststellung:** Das kleinste Δf , für das die Bandpasssignale orthogonal sind, ist $\Delta f = 1/(4T)$.¹⁷

¹⁷ **Beachte:** Der Abstand der Frequenzen ist damit $2\Delta f = 1/(2T)$.

- Das „harte“ Umschalten zwischen den Frequenzen ergibt eine unstetige Phase und damit eine Verbreiterung des Spektrums \implies Konstruiere eine FSK mit stetiger Phase \implies *Continuous Phase Frequency Shift Keying, CPFSK*

Definition

Bei *Continuous Phase Frequency Shift Keying*, *CPFSK*, konstruiert man mit $A(nT) \in \{-1, +1\}$ das Basisbandsignal gemäß

$$x(t) = \exp \left(j2\pi\Delta f \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} A(nT)g(\xi - nT) d\xi + \Phi_0 \right)$$

■ Bemerkung:

- Das Signal wechselt zwischen den Frequenzen $\pm\Delta f$
- Aufgrund der Integration ist die Phase stetig
- CPFSK ist im Allgemeinen weder linear noch gedächtnislos
- Im Folgenden setzen wir zur Vereinfachung $\Phi_0 = 0$



- Verwendung einer Rechteck-Pulsformung
 - Bei Rechteckpulsformung¹⁸ $g(t) = \sqrt{T} \cdot g_R(t)$, ergibt sich die Phase in $NT \leq t < (N + 1)T$ zu

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= 2\pi\Delta f \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} A(nT)g_R(\xi - nT) d\xi \\ &= 2\pi\Delta f \left(\sum_{n=0}^{N-1} A(nT)T + A(NT)(t - NT) \right) \\ &= 2\pi\Delta f T \left(\sum_{n=0}^{N-1} A(nT) + A(NT) \left(\frac{t}{T} - N \right) \right)\end{aligned}$$

¹⁸Hier auf Amplitude 1 normiert.



Definition

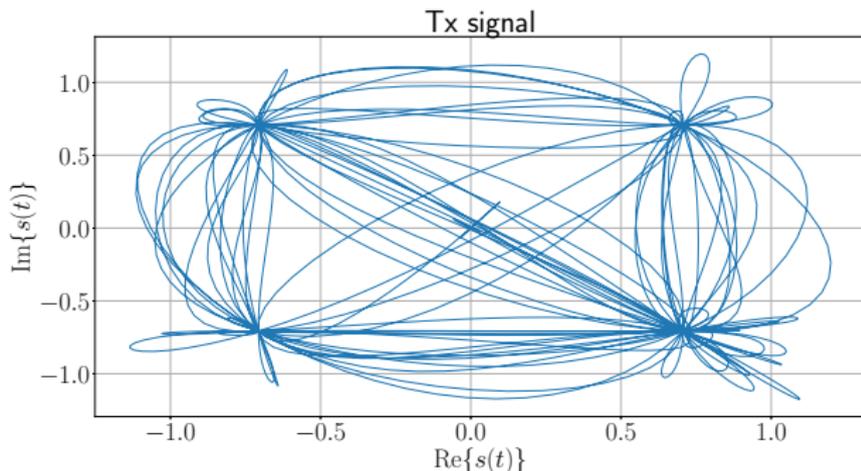
Der *Modulationsindex* ist definiert durch

$$\eta = 2\Delta fT ;$$

er beschreibt bei binärer CPFSK den Phasenhub in einem Symbolintervall:

$$|\Phi(nT) - \Phi((n - 1)T)| = \pi\eta$$

- **Beispiel:**¹⁹ Verlauf eines QPSK-Sendesignals $s(t)$ im Basisband in der komplexen Ebene bei RC-Pulsformung ($r = 0.33$)
- **Beobachtung:** Nulldurchgänge!



¹⁹ Datei: qpsk_oqpsk.ipynb

■ Fragen:

- Wann entstehen Nulldurchgänge?
- Warum stören diese?

■ Antworten:

- Bei Phasensprung um π
- Amplitudeneinbrüche; evtl. Verstärker nicht mehr im idealen Bereich

- **Idee:** Teile einen Sprung um π in zwei Sprünge um $\pi/2$



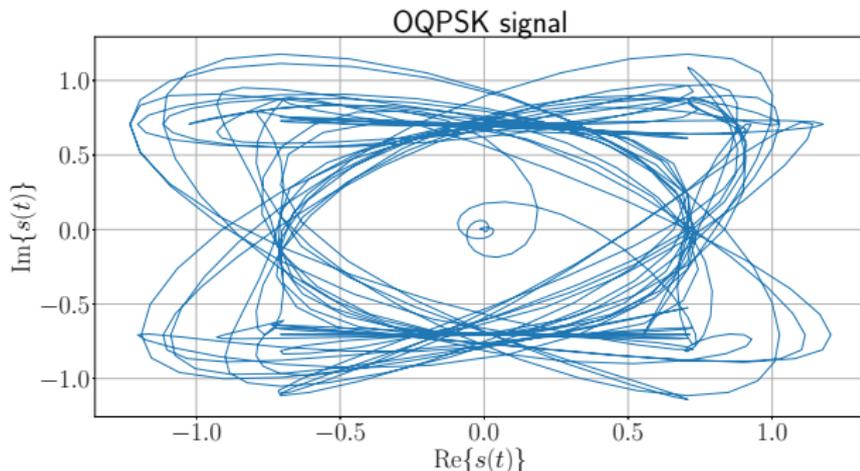
Definition

Bei *Offset-QPSK-Verfahren* werden I- und Q-Zweig einer QPSK um $T/2$ versetzt angeregt. Mit $A(nT) = A_I(nT) + jA_Q(nT)$ folgt das Sendesignal

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_I(nT)g(t - nT) + j \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_Q(nT)g\left(t - \frac{T}{2} - nT\right)$$

- **Bemerkung:** Beim OQPSK ist der Sprung um π in zwei Sprünge von $\pi/2$ aufgeteilt. Das Signal kommt damit in der I-Q-Ebene nicht mehr so nahe an den Ursprung.

- **Beispiel:**²⁰ Verlauf des OQPSK-Signals bei RC-Pulsformung ($r = 0.33$) in der I-Q-Ebene²¹



²⁰ **Datei:** qpsk_oqpsk.ipynb

²¹ **Frage/Übung:** Woher kommen die Werte in 0? Haben wir diese nicht nach Konstruktion vermieden?

- **Motivation:** Symbolentscheidung im Empfänger²² entspricht der Entscheidung für einen der möglichen Signalpunkte²³
- **Frage:** Was passiert, falls im Kanal eine (unbekannte) Phasen- oder Frequenzdrehung erfolgt? Wie kann dieses Problem gelöst werden?
- **Lösungsmöglichkeiten:**
 - Schätzen der Phasendrehung zu Beginn der Übertragung; „Rückdrehen“ für folgende Symbole
 - Darstellen der Information derart, dass der Empfänger ohne Phaseninformation und mit geringer²⁴ Frequenzabweichung funktioniert.

²² ..., die im nächsten Abschnitt diskutiert wird, ...

²³ Bei PSK also auf eine der möglichen Phasen; bei QAM auf eine Amplituden-Phasen-Kombination etc.

²⁴ **Frage:** Wieso „geringer“ statt „beliebiger“?

Definition²⁵

Die Detektion heißt *kohärent*, falls der Detektor über Kenntnis der Phase (und der Frequenz) verfügt.

Funktioniert die Detektion ohne Phaseninformation und mit geringer Frequenzabweichung, so wird das Detektionsverfahren als *inkohärent* bezeichnet.

- **Frage/Übung:** Welches Modulationsverfahren, das Sie kennen, ermöglicht inkohärente Detektion?

²⁵Beispielsweise nachzulesen in [Hoe13]

Definition

Bei *differenzieller PSK, DPSK*, wird die Information in der Phasendifferenz repräsentiert. Es ist

$$\vartheta(nT) = \vartheta((n-1)T) + \Delta\vartheta_m(nT)$$

mit

$$\Delta\vartheta_m(nT) = 2\pi \frac{m}{M} + \vartheta_0, \quad m = 0, \dots, M-1$$
$$\vartheta_0 \in \left\{ 0, \frac{\pi}{M} \right\}.$$

- **Bemerkung:** Eine sinnvolle Entscheidung setzt voraus, dass die Absolutphase sich nicht „allzu stark“ ändert.

- **Beispiel:** $\pi/4$ -DQPSK verwendet $M = 4$ und $\vartheta_0 = \pi/4$. \implies Bei einer Anfangsphase von $\vartheta(0) = 0$ folgt:

$$\vartheta(nT) \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}, \quad n \text{ gerade}$$

$$\vartheta(nT) \in \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \right\}, \quad n \text{ ungerade}$$

Der Winkelabstand zwischen zwei zu einem Zeitpunkt möglichen Symbolen ist somit $\pi/2$.

Definition

Unter *Minimum Shift Keying*, *MSK*, versteht man eine FSK mit $\eta = 1/2$ bzw. $\Delta f = 1/(4T)$. Die Phase ändert sich somit pro Symbolintervall um $\pm\pi/2$.



■ Bemerkungen:

- Nach Konstruktion verwendet MSK den kleinsten Frequenzhub, bei dem die Signale $s_{0/1}(t) = \cos(2\pi(f_T \pm \Delta f)t)$ orthogonal sind.
- Es kann gezeigt werden [Kam04], dass MSK einer OQPSK mit doppelter Symboldauer und Pulsformung $g_{\text{MSK}}(t) = \cos(\pi t/(2T)) \text{rect}_{2T}(t)$ entspricht:

$$x_{\text{MSK}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A(2nT)g_{\text{MSK}}(t - 2nT) \\ + j \sum_{n=0}^{\infty} A((2n+1)T)g_{\text{MSK}}(t - (2n+1)T)$$

Damit ist MSK ein lineares Modulationsverfahren.

■ Bemerkungen: (ctd.)

- Bei *Gauß'schem Minimum Shift Keying, GMSK*, werden die Symbole BPSK moduliert, mit einem Rechteck geformt und vor der $\eta = 1/2$ -FSK zusätzlich mit einem Gauß-Tiefpass²⁶ gefiltert; die Verarbeitung lautet somit:

$$(-1)^b \mapsto \text{rect}_T(t) * g_G(t) \mapsto \text{FSK}$$

- Bei GMSK ist die Phase geglättet, was in einem geringeren Bandbreitenbedarf resultiert. Zudem ist die Einhüllende von GMSK exakt konstant.

²⁶ ..., der bei hinreichender Dämpfung abgeschnitten und kausalisiert wird,

- GSM: MSK (also „gefilterte BPSK“)
- UMTS²⁷
 - QPSK
 - Raised-Cosine mit Parameter $r = 0.22$
- LTE²⁸
 - 4-, 16- oder 64-QAM
 - Benutzt implizit Rechteck-Pulsformung²⁹

²⁷Nach [Mol11]

²⁸Nach [Saut15]

²⁹..., die wir eigentlich als nicht-ideal besprochen hatten; aufgrund einiger „Kniffe“ (OFDM), die später besprochen werden, kann dies realisiert werden.



- 3 Modulation und Demodulation
 - Modulation
 - Etwas Entscheidungstheorie
 - Grundlegende Betrachtungen
 - Signaldetektion
 - Symbolentscheidung
 - Einschub: Scrambler
 - Demodulation
 - Lernziele
 - Literatur

- **Ausgangspunkt:** Im letzten Kapitel wurde die Umsetzung der Information auf das Sendesignal besprochen
- Ein Kanal filtert das Signal und fügt Rauschen hinzu. \implies Der Empfänger muss – basierend auf dem Empfangssignal – auf die Symbole *entscheiden*.
- Da Rauschen und aufgrund Unkenntnis oft auch Kanaleinflüsse als zufällig angesehen werden müssen: Verwendung von Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie/Statistik



■ Aufgaben eines Empfängers:

- *Signaldetektion*: Wurde zu einer bestimmten Zeit und/oder Frequenz ein Signal empfangen?
- *Symbolentscheidung*: Welches Symbol steckt in dem empfangenen Signal?

■ Bemerkungen:

- Der vorliegende Abschnitt führt in Kürze in die Begrifflichkeiten ein.
- Die Symbolentscheidung wird anschließend aufgegriffen und in „praktische Handlungsanweisungen“ übersetzt.

■ Annahme:

- Bei dem Kanal handelt es sich um einen AWGN-Kanal³⁰:

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

- Im Bandpass ist $n(t)$ gaußverteilt mit spektraler Leistungsdichte

$$\Phi(f) = \frac{N_0}{2}, \quad f \in \mathbb{R}.$$

- Im Basisband ist $n(t)$ zirkulär (komplex) gaußverteilt mit spektraler Leistungsdichte

$$\Phi(f) = N_0, \quad f \in \mathbb{R}.$$

³⁰AWGN: Additive White Gaussian Noise



- **Aufgabenstellung:** Basierend auf $r(t)$ muss entschieden werden, ob ein Signal vorliegt
- **Mathematisch:** Formuliert als *Hypothesen*

$H_0 : r(t) = n(t);$ es liegt nur Rauschen an

$H_1 : r(t) = s(t) + n(t);$ Signal plus Rauschen liegt an

Definition

Mit den Definitionen

$$E_0 := \{\text{Es wird kein Signal entdeckt}\}$$

$$E_1 := \{\text{Es wird ein Signal entdeckt}\}$$

folgen die *Falschalarm-* und die *Entdeckungswahrscheinlichkeit*:

$$P_f = P(E_1|H_0)$$

$$P_d = P(E_1|H_1)$$



- Die möglichen Fehlentscheidungen sind:
 - *Falschalarm, Fehler 1. Art:* Es wird auf Signal entschieden, obwohl nur Rauschen anliegt:

$$P_f = P(E_1|H_0)$$

- *Nichtentdeckung, Fehler 2. Art:* Es wird auf Rauschen entschieden, obwohl ein Signal anliegt:

$$P(E_0|H_1) = 1 - P_d$$

- **Feststellung:** P_f, P_d sind nicht unabhängig!
- **Übung:** Anschauliche Erklärung? Finden Sie ein Extrembeispiel.

- Entscheidung fällt mittels *Entscheidungsregionen*:

$$G_0 = \{r \in \mathbb{R} : \text{Entscheidung für } H_0\}$$

$$G_1 = \{r \in \mathbb{R} : \text{Entscheidung für } H_1\},$$

wobei $G_0 \cap G_1 = \emptyset$ und $G_0 \cup G_1 = \mathbb{R}$.

- Bemerkung:** Die folgenden Betrachtungen dienen der Motivation und sollen Verständnis für das Vorgehen schaffen. Für eine exakte Herleitung wird auf die Literatur zur Statistik verwiesen.³¹

³¹ Z.B.: [Kre91]



- **Anschauung:** Auf Präsenz eines Signals wird entschieden, wenn die Beobachtung größer als ein bestimmter Schwellwert r_{SW} ist. Es folgt:

$$G_0 = \{r \in \mathbb{R} : r < r_{\text{SW}}\}$$

$$G_1 = \{r \in \mathbb{R} : r \geq r_{\text{SW}}\}$$

und somit

$$P_f = \int_{G_1} f(r|H_0) dr = \int_{r_{\text{SW}}}^{\infty} f(r|H_0) dr$$

$$P_d = \int_{G_1} f(r|H_1) dr = \int_{r_{\text{SW}}}^{\infty} f(r|H_1) dr$$



■ Ansatz:³²

- Fixiere $P_f = \alpha$
- Maximiere P_d
- Zu wählende Größe: r_{SW}

■ **Feststellung:** „Normales Maximierungsproblem“ \implies Ableiten und Nullsetzen

■ **Frage:** Wie kann die *Nebenbedingung* $P_f = \alpha$ berücksichtigt werden?

³²Die folgende Herleitung differiert von der in [Jon11]. Sie ist mathematisch nur „halb-korrekt/vollständig“, stützt aber die Anschauung.



- **Ziel:** Bestimmen eines Extremum von $f(x)$ unter der *Nebenbedingung* $g(x) = a$:

$$f(x) \stackrel{!}{=} \max \quad \text{u. d. NB.} \quad g(x) = a$$

- **Vorgehen:** Bilde mittels eines *Lagrange-Multiplikators* λ die Funktion

$$h(x, \lambda) = f(x) + \lambda(g(x) - a).$$

Das optimale x , falls es existiert, erfüllt die *notwendigen Bedingungen*³³

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} h(x, \lambda) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} h(x, \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

³³Heißt, es ist noch zu überprüfen, ob es wirklich ein Optimum ist.

- Bei uns ist $x = r_{\text{SW}}$, $a = \alpha$ und

$$\begin{aligned}h(r_{\text{SW}}, \lambda) &= P_d + \lambda(P_f - \alpha) \\ &= \int_{r_{\text{SW}}}^{\infty} f(r|H_1)dr + \lambda \left(\int_{r_{\text{SW}}}^{\infty} f(r|H_0)dr - \alpha \right)\end{aligned}$$

- Lagrange liefert die für ein Optimum notwendigen Bedingungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r_{\text{SW}}} h(r_{\text{SW}}, \lambda) &= -f(r_{\text{SW}}|H_1) - \lambda f(r_{\text{SW}}|H_0) \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} h(r_{\text{SW}}, \lambda) &= \int_{r_{\text{SW}}}^{\infty} f(r|H_0)dr - \alpha \stackrel{!}{=} 0\end{aligned}$$

- **Beobachtung:** Zur Signaldetektion betrachtet man das *Likelihood-Verhältnis*

$$\Lambda(r) = \frac{f(r|H_1)}{f(r|H_0)}$$

und entscheidet:

$$\Lambda(r) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_{\text{SW}}$$

Der noch unbekannte Parameter λ_{SW} ergibt sich aus

$$P_f = \int_{\lambda_{\text{SW}}}^{\infty} f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda = \alpha,$$

wobei $f_{\Lambda}(\lambda)$ die Dichte von $\Lambda(r)$ bezeichnet.³⁴

³⁴Die Berechnung einer Bildichte kennen wir aus WT. Dies ist beispielsweise in [JW02] dargestellt.



■ Bemerkung:³⁵

- Nach einer wichtigen Aussage der Statistik, dem *Neyman-Pearson-Lemma*, ist die Verwendung von Likelihood-Verhältnissen optimal.
Konkret: Jeder andere Test mit gleicher Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art besitzt eine größere Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art.
- Anschaulich: Bei gegebener Falschalarmwahrscheinlichkeit P_f liefert ein Likelihood-Test minimale Nicht-Entdeckungswahrscheinlichkeit $1 - P_d$.

³⁵Details siehe z.B. [Kre91]



■ Beispiel:

- Betrachtet wird ein Radar-Szenario, in welchem eine ausgestrahlte elektromagnetische Welle bei Vorhandensein eines Objekts reflektiert wird.
- Gibt es im Kanal nur den direkten Pfad (ohne Echos), so folgt unter der Annahme eines AWGN-Kanals mit Rauschvarianz σ^2 :

$$f(r|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(r|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(r-a)^2}{2\sigma^2}},$$

wobei a die Amplitude der empfangenen Reflexion ist.



■ Beispiel: (ctd.)

- Die Entscheidungsregel lautet damit

$$\Lambda(r) = \exp\left(\frac{2ra - a^2}{2\sigma^2}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \lambda_{\text{SW}}$$

- Logarithmieren und Umstellen liefert

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \frac{\sigma^2}{a} \ln(\lambda_{\text{SW}}) + \frac{a}{2} =: \eta$$



■ Beispiel: (ctd.)

- Für ein SNR von $a^2/\sigma^2 = 5 \text{ dB}$ ³⁶ folgt mit der Normierung $a = 1$:

$$\sigma^2 = 10^{-5/10} \approx 0.32$$

- Fordert man für die Falschalarmwahrscheinlichkeit $P_f \stackrel{!}{=} 0.05$, so folgt:

$$0.05 \stackrel{!}{=} P_f = \int_{\eta}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr = \int_{\eta/\sigma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r'^2}{2}} dr'$$

und mittels Tabellen (etwa aus [JW02]):

$$\frac{\eta}{\sigma} = 1.64 \implies \eta = 0.93$$

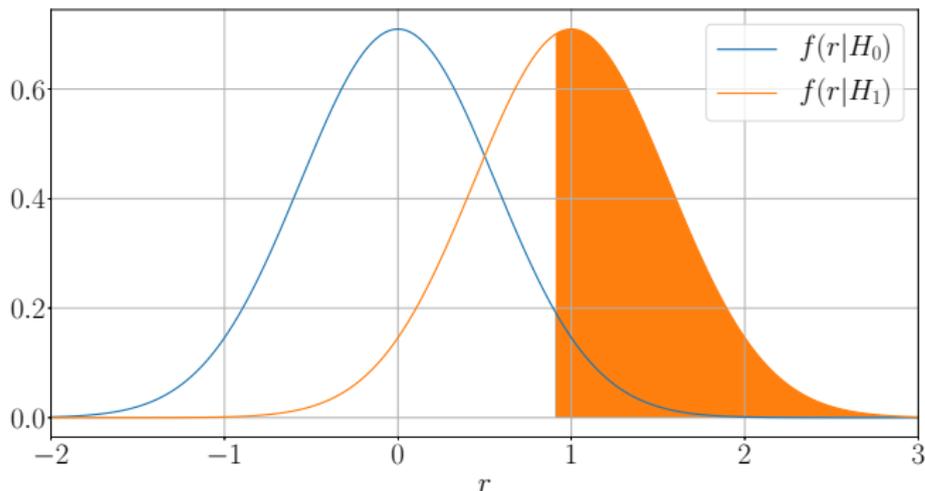
³⁶ **Erinnerung:** Angabe in dB entsteht bei Leistungen durch $10 \log_{10}(\cdot)$.



■ Beispiel: (ctd.)

- Für die Detektionswahrscheinlichkeit ergibt sich:

$$P_d = \int_{\eta}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(r-1)^2}{2\sigma^2}} dr = \int_{\frac{\eta-1}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r'^2}{2}} dr' = 0.55$$



- **Feststellung:** Die Detektionswahrscheinlichkeit im letzten Beispiel war mit 55% verhältnismäßig gering
- **Frage:** Wie kann diese verbessert werden?
- **Antwort:** Mittelung
 - Bilde den Mittelwert über N *unabhängige, identisch verteilte* Beobachtungen:

$$\bar{r} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i, \quad r_i = s_i + n_i$$

- Dann folgt:³⁷

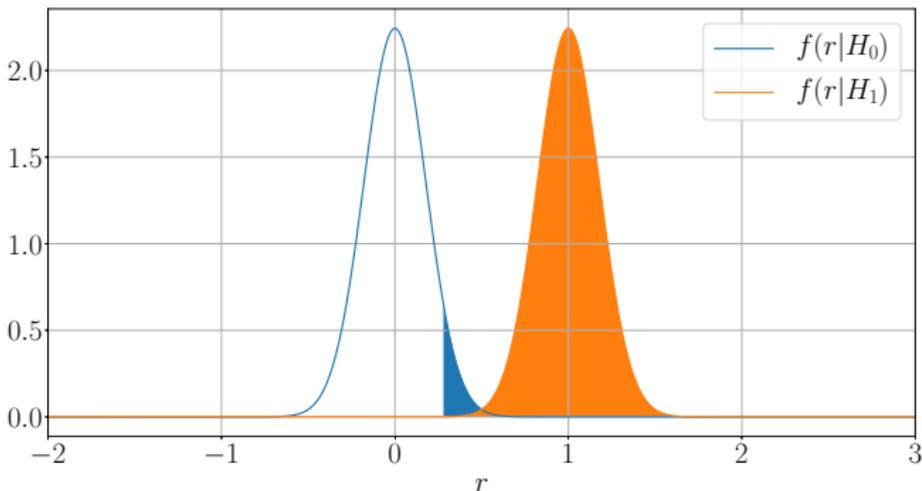
$$E(\bar{r}) = E(r), \quad V(\bar{r}) = \frac{V(r)}{N}$$

³⁷ **Nachweis: Übung**



■ Beispiel: (ctd.)

- Für die Detektionswahrscheinlichkeit bei $N = 10$ Mittelungen ergibt sich bei gleicher Falschalarmwahrscheinlichkeit $\bar{\eta} = 0.3$ und $\bar{P}_d = 0.99995$



■ Ausgangspunkt:

- Zur Übertragung eines durch Modulation erzeugten Symbols $A(\ell T) \in \mathbb{C}$ wird im Sender eines von M möglichen Signalen erzeugt und übertragen:

$$A(\ell T) \mapsto s(t) = s_n(t), \quad 0 \leq n \leq M - 1$$

- Im Kanal wird das Signal gestört und eine verrauschte Version empfangen (Zufallseinfluss)

$$s(t) \mapsto r(t)$$

- **Aufgabe:** Im Empfänger soll das gesendete Signal bzw. das dazugehörige Symbol bestmöglich *geschätzt* werden:

$$r(t) \mapsto \hat{A}(\ell T)$$

Definition/Theorem

Das *Maximum-a-Posteriori*, *MAP*, Kriterium lautet:

$$\hat{s}(t)_{\text{MAP}} = s_m(t) \iff m = \arg \max_{0 \leq n \leq M-1} P(s_n(t)|r(t))$$

Die MAP-Entscheidung minimiert die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit und ist somit bzgl. dieser Optimierungsgröße optimal.

■ **Bemerkung:**

- Anschaulich: MAP schätzt auf dasjenige Sendesignal $s_n(t)$, welches *nach* Beobachtung des Empfangssignals $r(t)$ die größte Wahrscheinlichkeit hat.
- Für den Nachweis der Optimalität siehe beispielsweise [PS08].



- Sind alle *a-priori-Wahrscheinlichkeiten* $P(s_n(t)) > 0$, so folgt mit der Regel von Bayes³⁸

$$P(s_n(t)|r(t)) = \frac{f(r(t)|s_n(t)) \cdot P(s_n(t))}{f(r(t))}.$$

³⁸Siehe [JW02]

Definition

Das *Maximum-Likelihood, ML, Kriterium* lautet:

$$\hat{s}(t)_{\text{ML}} = s_m(t) \iff m = \arg \max_{0 \leq n \leq M-1} f(r(t)|s_n(t))$$

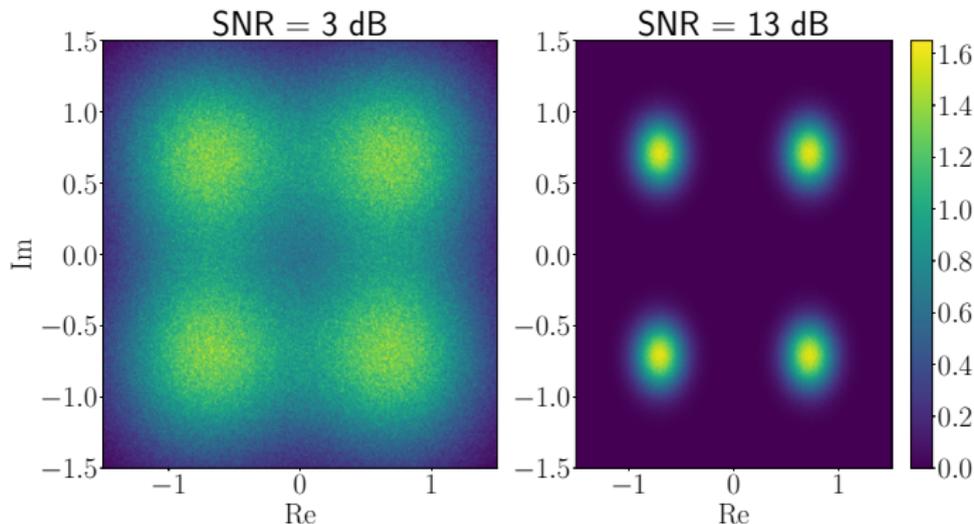
■ Bemerkungen:

- Anschaulich „erklärt“ der ML-Schätzer die beobachtete Größe $r(t)$, indem er deren Auftretenswahrscheinlichkeit abhängig von $s_n(t)$ maximiert.
- Für gleichwahrscheinliche Sendesymbole stimmt der ML-Schätzer mit dem MAP-Schätzer überein. Er minimiert in diesem Fall ebenfalls die mittlere Schätzfehlerwahrscheinlichkeit.



■ Beispiel:

- Gegeben: AWGN-Kanal, in welchem QPSK-Punkte übertragen werden
- Modell: $r = s + n$, $s \in 1/\sqrt{2} \cdot \{\pm 1 \pm j\}$, $n \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2)$
- Approximierte Dichten der Empfangswerte³⁹:



³⁹ 10^7 verrauschte Symbole; normiertes Histogramm mit 250 „Bins“ je Dimension.

■ Bemerkungen:

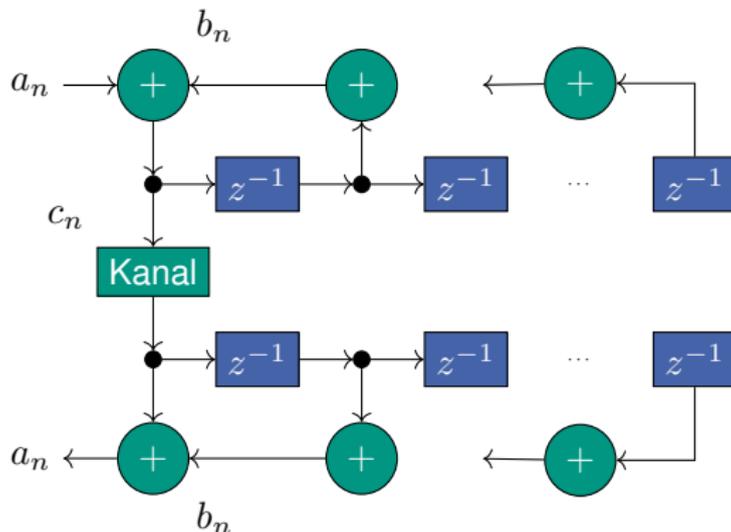
- Wie bei der Signaldetektion kann die Symbolentscheidung ebenfalls auf Entscheidungsregionen zurückgeführt werden. Dies wird im nächsten Abschnitt gezeigt.
- Bei Gaußverteilung ergeben sich Entscheidungsregionen als „kleinste Abstände“ zu möglichen Sendesymbolen. Illustration: Siehe QPSK-Beispiel.
- MAP und ML sind zwei *mögliche* Schätzer, die durch die minimale mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit von MAP motiviert sind. Je nach Anwendung sind auch andere Kriterien wie z.B. *minimales mittleres Fehlerquadrat*, *Minimum Mean Square Estimator (MMSE)*, sinnvoll.



- **Situation:** Bei Übergang von MAP zu ML war Gleichverteilung der Symbole wichtig
- **Zudem:** Gleichverteilte Symbole erzeugen maximale Entropie (Information)
- **Frage:** Wie kann dies erreicht werden?
- **Antwort:** Mit einem *Scrambler*



- **Grundidee:** „Vermischen“ der Bit-Folge⁴⁰ durch Rückkopplung⁴¹



⁴⁰Der Modulator, der Bits in Symbole aus \mathbb{C} überführt, ist somit hier als Teil des Kanals anzusehen.

⁴¹In [Gol82] ist nachgewiesen, dass die durch Scrambling erzeugte Bitfolge gleichverteilt ist.

- 3 Modulation und Demodulation
 - Modulation
 - Etwas Entscheidungstheorie
 - Demodulation
 - Binäre Entscheidung bei AWGN
 - Das Matched-Filter
 - Bitfehler-Wahrscheinlichkeit bei binärer Signalisierung
 - Demodulation linearer Modulation in AWGN bei kohärentem Empfang
 - Inkohärenter Empfang: DPSK
 - Lernziele
 - Literatur



Hinweise

- [Jon11] arbeitet meist/fast immer im Bandpassbereich, weswegen dort reelle Signale verwendet werden. Da die Signalverarbeitung im Empfänger üblicherweise nach dem Heruntermischen erfolgt,

Bandpasssignal \rightarrow Heruntermischen \rightarrow Filterung + Detektion,

wird in den folgenden Folien auf diese Unterscheidung geachtet.

- Im Basisband ist zirkulärsymmetrisches komplexes Rauschen zu verwenden.

- **Erinnerung:** Empfangssignal sendet Symbole im Abstand T durch Verwendung eines Pulsformung $g(t)$:

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A(nT)g(t - nT)$$

- **Ziel des Empfängers:** Wiedergewinnen der Informationssymbole $A(nT)$
- **Ansatz:** Vereinfachen durch Beschränken auf ein binäres Symbol

Annahmen

- Es wird binäre Information übertragen, d. h. das Sendesignal ist⁴²

$$s(t) = \begin{cases} s_0(t), & A(0T) = 0 \\ s_1(t), & A(0T) = 1 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq T_s$$

- Der Kanal ist ein AWGN-Kanal mit Empfangssignal

$$r(t) = s(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T_s$$

mit

$n(t)$: zirkulärsymmetrisches, weißes gaußsches Rauschen

⁴²**Beachte:** T_s beschreibt die Dauer des Sendepulses! Wie wir aus den Betrachtungen bei der Pulsformung wissen, ist oft $T_s > T$.



■ Ansatz:

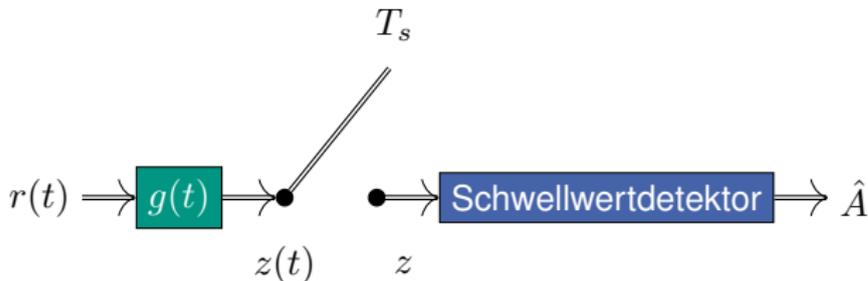
- Empfänger filtert mit Filter der Impulsantwort $g(t)$ und tastet in T_s ab:^{43 44}

$$\begin{aligned} z = z(t) \Big|_{t=T_s} &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) r(t - \tau) \, d\tau \Big|_{t=T_s} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) (s(t - \tau) + n(t - \tau)) \, d\tau \Big|_{t=T_s} \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) s(T_s - \tau) \, d\tau}_{=: a} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) n(T_s - \tau) \, d\tau}_{=: n} \end{aligned}$$

⁴³Die Integralgrenzen ändern sich je nach Form der Signale. Z. B. folgt bei Kausalität $\int_0^t \dots$. [PJ15]

⁴⁴Anschaulich logisch, da die Signaldauer gerade T_s beträgt. Mathematisch müsste nachgewiesen werden, dass es sich hierbei um eine *suffiziente Statistik* handelt. [Gal08]

■ Graphische Darstellung:



■ Nach dem Sampling ist:

$$z = a + n$$

■ Folgerungen:

- Wegen $s(t) \in \{s_0(t), s_1(t)\}$ ist $a \in \{a_0, a_1\}$ mit:

$$a_i = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) s_i(T_s - \tau) d\tau, \quad i = 0, 1$$

- Da $n(t)$ AWGN und das Filter linear ist, ist n ebenfalls gaußverteilt:⁴⁵

$$f(n) = \frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-\frac{|n|^2}{\sigma^2}}$$

- Für die bedingte Dichte folgt:

$$f(z|s_i(t)) = \frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-\frac{|z-a_i|^2}{\sigma^2}}$$

⁴⁵Die Varianz hängt von der Varianz des AWGN $n(t)$ und der Impulsantwort des Filters ab.



- Das MAP-Kriterium ergibt eine *Schwellwertentscheidung*:

$$P(a_1|z) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} P(a_0|z)$$

- Anwendung der Bayes'schen Regel⁴⁶ liefert⁴⁷

$$\frac{f(z|a_1)}{f(z|a_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(a_0)}{P(a_1)}$$

mit den *a-priori Wahrscheinlichkeiten* $P(a_i)$

⁴⁶Hier für $f(z) \neq 0$: $P(a_i|z) = P(a_i)f(z|a_i)/f(z)$

⁴⁷**Frage:** Wo ist $f(z)$?



- Sind die a-priori Wahrscheinlichkeiten identisch, $P(a_0) = P(a_1)$, so ergibt sich die ML-Entscheidung gemäß

$$\frac{f(z|a_1)}{f(z|a_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

- Einsetzen und Logarithmieren liefert⁴⁸

$$-\frac{1}{\sigma^2} (|z|^2 + |a_1|^2 - 2\operatorname{Re}\{za_1^*\} - |z|^2 - |a_0|^2 + 2\operatorname{Re}\{za_0^*\}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0$$

- Multiplikation mit $-1/\sigma^2$, Kürzen und Umstellen ergibt⁴⁹

$$|a_1|^2 - 2\operatorname{Re}\{za_1^*\} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} |a_0|^2 - 2\operatorname{Re}\{za_0^*\}$$

⁴⁸Übung: Nachweis

⁴⁹Achtung: Multiplikation mit negativer Zahl „dreht“ die Entscheidungen.



■ Erinnerung:

$$|a_1|^2 - 2\operatorname{Re}\{za_1^*\} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} |a_0|^2 - 2\operatorname{Re}\{za_0^*\}$$

■ Multiplikation mit -1 ergibt:

$$2\operatorname{Re}\{za_1^*\} - |a_1|^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\operatorname{Re}\{za_0^*\} - |a_0|^2$$

- Sind alle beteiligten Größen reell⁵⁰, so folgt die deutlich übersichtlichere Darstellung

$$2za_1 - a_1^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} 2za_0 - a_0^2$$

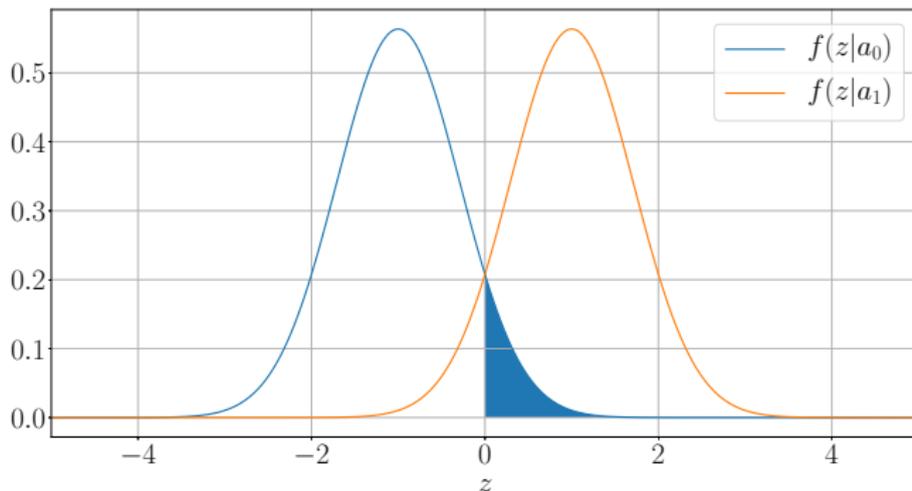
die sich für $a_1 > a_0$ vereinfacht zu

$$z \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \frac{a_0 + a_1}{2} =: \gamma_0$$

als simple Schwellwertentscheidung bzgl. des abgetasteten Filter-Ausgangs

⁵⁰ ... etwa bei OOK oder BPSK...

- **Beispiel:** Wähle $a_0 = -1$, $a_1 = 1$ und somit $\gamma_0 = 0$, sowie⁵¹ $\sigma^2 = 0.5$



⁵¹ **Übung:** „Übersetzen“ Sie die Wahl von σ^2 in ein SNR in dB.

- **Bleibt:** Analyse der Fehlerwahrscheinlichkeit. Zum besseren Verständnis für den reellen Fall berechnet.
- **Frage:** Wann entsteht ein Fehler?
- **Antwort:** Fehler entstehen, falls die Entscheidungsschwelle fälschlicherweise überschritten wird. Es folgt:⁵²

$$P(\text{Fehler}) = P(a_0) \cdot P(z > \gamma_0 | a_0) + P(a_1) \cdot P(z < \gamma_0 | a_1)$$

- **Beispiel:** Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(z > \gamma_0 | a_0)$ ist im vorherigem Beispiel als blaue Fläche eingezeichnet.

⁵² ... Sie erkennen den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit...



- Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit
 - Rechnung/Vereinfachung ergibt:

$$\begin{aligned} P(\text{Fehler}) &\stackrel{(a)}{=} P(a_0) \cdot P(z > \gamma_0 | a_0) + P(a_1) \cdot P(z < \gamma_0 | a_1) \\ &\stackrel{(b)}{=} \frac{1}{2} \left(P(z > \gamma_0 | a_0) + P(z < \gamma_0 | a_1) \right) \\ &\stackrel{(c)}{=} \frac{1}{2} 2P(z > \gamma_0 | a_0) \\ &= P(z > \gamma_0 | a_0), \end{aligned}$$

wobei (a) der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit ist, (b) für gleichwahrscheinliche Symbole gilt und (c) gilt aufgrund der Symmetrie der Gauß-Verteilung.

- Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit (ctd.)
 - Einsetzen der Gaußdichte liefert⁵³

$$\begin{aligned}P(\text{Fehler}) &= P(z > \gamma_0 | a_0) \\&= \int_{\gamma_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(z-a_0)^2}{2\sigma^2}} dz \\&\stackrel{(a)}{=} \int_{\frac{a_1-a_0}{2\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} d\zeta \\&= 1 - \Phi\left(\frac{a_1 - a_0}{2\sigma}\right) \\&\stackrel{(b)}{=} Q\left(\frac{a_1 - a_0}{2\sigma}\right),\end{aligned}$$

wobei (a) mit $\zeta = (z - a_0)/\sigma$ und $\gamma_0 = (a_1 + a_0)/2$ folgt und die in (b) verwendete Q-Funktion auf der nächsten Folie eingeführt wird.

⁵³Numerische Resultate zur Illustration sehen wir in Kürze.

■ Bemerkung:

- In der nachrichtentechnischen Literatur sind zur Angabe von Fehlerwahrscheinlichkeiten neben $\Phi(\cdot)$ weitere Funktionen üblich
- Q-Funktion ([PS08])

$$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} d\zeta$$

$$Q(x) = 1 - \Phi(x)$$

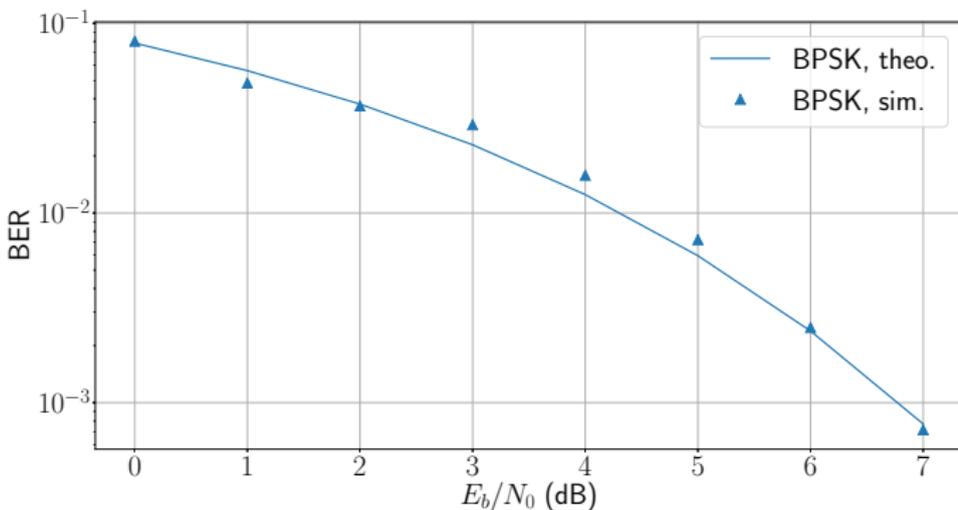
- erfc-Funktion ([Kam04])

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 2 \cdot Q(\sqrt{2}x)$$

Binäre Entscheidung bei AWGN

- **Beispiel:**⁵⁴ Fehlerwahrscheinlichkeit $P(\text{Fehler}) = Q\left(\sqrt{1/\sigma^2}\right)$
für $a_1 = 1, a_0 = -1$.



⁵⁴ **Datei:** ber_bpsk.ipynb

- **Bemerkung:** Im Rahmen einer präzisen Unterscheidung müsste zwischen Fehlerwahrscheinlichkeiten und Fehlerraten unterschieden werden. Im Großteil der Literatur hat es sich eingebürgert, diese Begriffe synonym zu verwenden. Daran halten sich auch die folgenden Benennungen.
- **Übung:** Können Sie mit WT-Mitteln erklären, wieso dies gerechtfertigt ist?

■ Beobachtung:

- Zum Erhalt von z wurde das Empfangssignal gefiltert.
- Filter-Impulsantwort $g(t)$ noch nicht festgelegt⁵⁵

■ Frage: Welches Kriterium zur Wahl von $g(t)$ ist sinnvoll?

⁵⁵ Aktuell wird keine Pulsformung, sondern Sendesignale $s(t)$ betrachtet.



- **Frage:** Welches Kriterium zur Wahl von $g(t)$ ist sinnvoll?
- **Antwort/Motivation am Beispiel:** Schreibe für⁵⁶ $a_0 = -\sqrt{P_s}$, $a_1 = \sqrt{P_s}$:

$$P(\text{Fehler}) = Q\left(\frac{a_1 - a_0}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{P_s}{\sigma^2}}\right)$$

- **Feststellung:** Im Argument der Q-Funktion steht die Wurzel des SNR \implies je größer das SNR, desto kleiner die Fehlerwahrscheinlichkeit⁵⁷

⁵⁶Entsprechend BPSK.

⁵⁷Auch anschaulich klar, da bei größerem SNR die Punkte weniger streuen.

- Leistung des Rauschens am Filterausgang lautet:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &\stackrel{(a)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{NN}(f) df \\ &\stackrel{(b)}{=} N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df \\ &\stackrel{(c)}{=} N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt,\end{aligned}$$

wobei (a) die Leistung als Integration über die Leistungsdichte bestimmt, (b) aus $\Phi_{YY}(f) = \Phi_{XX}(f) \cdot |G(f)|^2$ folgt und (c) der Satz von Parseval ist.

- Leistung des Signalanteils lautet:

$$|a|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \cdot s(T_s - \tau) \, d\tau \right|^2$$
$$\stackrel{(a)}{\leq} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|^2 \, d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |s(T_s - \tau)|^2 \, d\tau,$$

wobei (a) die *(Cauchy-)Schwarz-Ungleichung*

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2^*(x) \, dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2 \, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|^2 \, dx$$

ist, in der Gleichheit gilt, falls $f_1(x) = \alpha f_2(x)$.

Theorem

In AWGN lautet das maximale SNR am Filterausgang⁵⁸

$$\text{SNR}_{\max} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |s(\tau)|^2 d\tau}{N_0}$$
$$\stackrel{(a)}{=} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (s_{\text{BP}}(\tau))^2 d\tau}{N_0/2}.$$

Das Maximum wird im AWGN-Kanal erreicht, falls $g(t) = \alpha s^*(T_s - t)$.

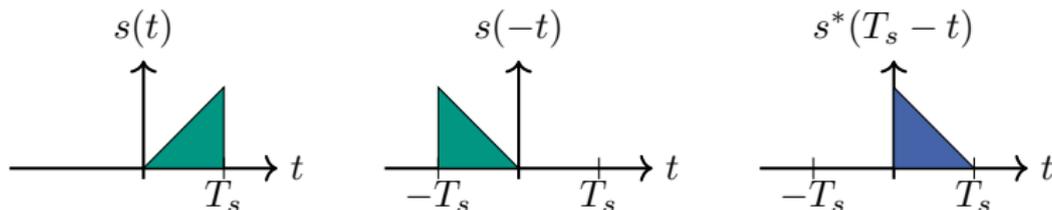
⁵⁸ **Frage:** Wieso ist (a) korrekt?



Definition

Das Filter mit der Impulsantwort $g(t) = s^*(T_s - t)$ heißt *Matched-Filter*. \implies
Das Matched-Filter maximiert unter AWGN das SNR am Abtaster.

■ Illustration des Matched-Filters.⁵⁹



⁵⁹Das Signal ist natürlich durch eine Linie und nicht durch eine Fläche beschrieben. Die unterschiedliche Farbe illustriert komplexe Konjugation.

■ Bemerkungen:

- Ist $s(t)$ reellwertig, so entfällt die komplexe Konjugation.
- Der in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung auftretende Faktor spielt keine Rolle und kann zu $\alpha = 1$ gewählt werden.
- Das maximale SNR ist nicht von der Form von $s(t)$ abhängig, sondern nur von dessen Energie.
- Das Matched-Filter beschreibt die Signalform. Ist $s(t) = A(nT)g(t)$, so wird auf $g(t)$ „gematched“ und nicht auf den Vorfaktor $A(nT)$.

- Einsetzen der Matched-Filter-Impulsantwort bei kausalem System und kausalem Signal liefert:

$$\begin{aligned} z &= \int_0^t g(\tau) r(t - \tau) d\tau \Big|_{t=T_s} \\ &= \int_0^t s^*(t - \tau) r(t - \tau) d\tau \Big|_{t=T_s} \\ &= \int_0^{T_s} s^*(T_s - \tau) r(T_s - \tau) d\tau \\ &= \int_0^{T_s} r(\zeta) s^*(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$



Theorem

Im Abtastzeitpunkt $t = T_s$ entsteht nach dem Matched-Filter die Korrelation von $r(t)$ mit $s(t)$.

■ Bemerkungen:

- *Die Gleichheit von Matched-Filter und Korrelator gilt ausschließlich in $t = T_s$.*⁶⁰
 - Anschaulich wird am Abtastzeitpunkt die Ähnlichkeit des Empfangssignals mit dem (potenziellen) Sendesignal gemessen.
-
- **Heuristik:** Entscheidung zugunsten des Signals, das die größte Ähnlichkeit mit dem Empfangssignal hat

⁶⁰ ... schon alleine deswegen anschaulich klar, weil der Korrelator eine Zahl berechnet, wohingegen das Matched-Filter an dessen Ausgang ein Signal erzeugt.



■ Korrelationsempfänger

- **Situation:** M mögliche Sendesignale $s_0(t), \dots, s_{M-1}(t)$
- **Vorgehen:**

- Korreliere das Empfangssignal mit allen möglichen Sendesignalen:

$$z_i = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) s_i^*(t) dt, \quad 0 \leq i \leq M - 1$$

- Entscheide für das Sendesignal/-symbol mit maximaler Korrelation:

$$\hat{s} = s_\ell \iff \ell = \arg \max_{0 \leq i \leq M-1} z_i$$

■ Korrelationsempfänger (ctd.)

■ **Situation:** M mögliche Sendesignale $s_0(t), \dots, s_{M-1}(t)$

■ **Bemerkung:** Praktisch wird man nicht mit allen Signalen korrelieren, sondern sich auf eine kleinere Anzahl von Basisfunktionen beschränken. So würden bei einer QPSK keine 4 Korrelation berechnet, sondern 2 (mit $\cos(\cdot)$ in I- und mit $\sin(\cdot)$ in Q-Richtung). \implies Erhalte komplexe Zahl und bestimme max. Korrelation/min. Abstand in \mathbb{C} .

■ Ergänzung:

- Das in AWGN optimale Empfangsfilter⁶¹ passt („matched“) zu dem Sendefilter:

$$g_{\text{Rx}}(t) = g_{\text{Tx}}^*(-t)$$

- Für das Gesamtsystem entsteht durch beide Filter zusammen der Einfluss

$$g_{\text{ges.}}(t) = g_{\text{Tx}}(t) * g_{\text{Rx}}(t) = g_{\text{Tx}}(t) * g_{\text{Tx}}^*(-t)$$



$$G_{\text{ges.}}(f) = G_{\text{Tx}}(f) \cdot G_{\text{Tx}}^*(f) = |G_{\text{Tx}}(f)|^2$$

- Möchte man also ein bestimmtes *Gesamtübertragungsverhalten* erreichen, so ist als Sendefilter die „Wurzel“ des gewünschten Amplitudengangs zu wählen.

⁶¹Die Verschiebung um T_s wird zur Vereinfachung der Darstellung weggelassen.



Bitfehler-Wahrscheinlichkeit bei binärer Signalisierung

- **Bekannt:** Fehlerwahrscheinlichkeit abhängig von Signalamplituden und Rauschvarianz:

$$P_b = P(\text{Fehler}) = Q\left(\frac{|a_1 - a_0|}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{|a_1 - a_0|^2}{4\sigma^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}}\right)$$

- **Beobachtung:**

- Im Argument der Q-Funktion steht der Abstand von Abtastwerten („Punkten“)
- Wie im letzten Gleichheitszeichen notiert kann gezeigt werden ([PS08]), dass der Abstand der Punkte in den Abstand der zugehörigen Signale umgerechnet werden kann, wobei

$$E_d = \int_{-\infty}^{\infty} |s_1(t) - s_0(t)|^2 dt,$$



Bitfehler-Wahrscheinlichkeit bei binärer Signalisierung

- **Hinweis:** Im Folgenden bezeichnet A die (normierte) Amplitude von Signalen. Eine Verwechslung mit der Bezeichnung $A(nT)$ der Datensymbole ist nicht zu befürchten.

Bitfehler-Wahrscheinlichkeit bei binärer Signalisierung

■ Beispiel: Bipolare Signalisierung

- Entsprechend BPSK
- Sendesignale sind in Abhängigkeit vom Datenbit i ⁶²

$$s_i(t) = (-1)^{i+1} \cdot A \cdot \text{rect}_T \left(t - \frac{T}{2} \right), \quad i \in \{0, 1\}$$

- Signalpunkte nach dem Abtaster⁶³ sind:

$$a_1 = E(z|s_1(t)) = E \left(\int_0^T r(t) \text{rect}_T \left(t - \frac{T}{2} \right) dt \middle| s_1(t) \right) = AT$$

$$a_0 = E(z|s_0(t)) = E \left(\int_0^T r(t) \text{rect}_T \left(t - \frac{T}{2} \right) dt \middle| s_0(t) \right) = -AT$$

⁶²Bild: Tafel

⁶³**Beachte:** Bei Rechteckpulsformung ist $T_s = T$.



Bitfehler-Wahrscheinlichkeit bei binärer Signalisierung

■ Beispiel: Bipolare Signalisierung (ctd.)

- Für die Schwelle folgt

$$\gamma_0 = \frac{a_1 + a_0}{2} = 0$$

- Die mittlere Bitfehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich zu

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{4A^2T}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

mit der *mittleren Energie pro Bit*⁶⁴

$$E_b = A^2T.$$

⁶⁴ **Frage:** Wieso entspricht dies der mittleren Energie pro Bit?



Bitfehler-Wahrscheinlichkeit bei binärer Signalisierung

■ Beispiel: Unipolare Signalisierung

- Entsprechend OOK
- Sendesignale sind in Abhängigkeit vom Datenbit i :^{65 66}

$$s_i(t) = i \cdot \sqrt{2}A \cdot \text{rect}_T \left(t - \frac{T}{2} \right), \quad i \in \{0, 1\}$$

- Signalpunkte nach dem Abtaster⁶⁷:

$$a_1 = E(z|s_1(t)) = E \left(\int_0^T r(t) \text{rect}_T \left(t - \frac{T}{2} \right) dt \middle| s_1(t) \right) = \sqrt{2}AT$$

$$a_0 = E(z|s_0(t)) = E \left(\int_0^T r(t) \text{rect}_T \left(t - \frac{T}{2} \right) dt \middle| s_0(t) \right) = 0$$

⁶⁵Bild: Tafel

⁶⁶**Hinweis:** Andere Normierung als in [Jon11]; Skalierung mit $\sqrt{2}$ führt zur Normierung der Energie pro Bit.

⁶⁷**Beachte:** Bei Rechteckpulsformung ist $T_s = T$.



Bitfehler-Wahrscheinlichkeit bei binärer Signalisierung

- **Beispiel:** *Unipolare Signalisierung* (ctd.)

- Für die Schwelle folgt

$$\gamma_0 = \frac{a_1 + a_0}{2} = \frac{AT}{\sqrt{2}}$$

- Die mittlere Bitfehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich zu

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2A^2T}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

mit der *mittleren Energie pro Bit*⁶⁸

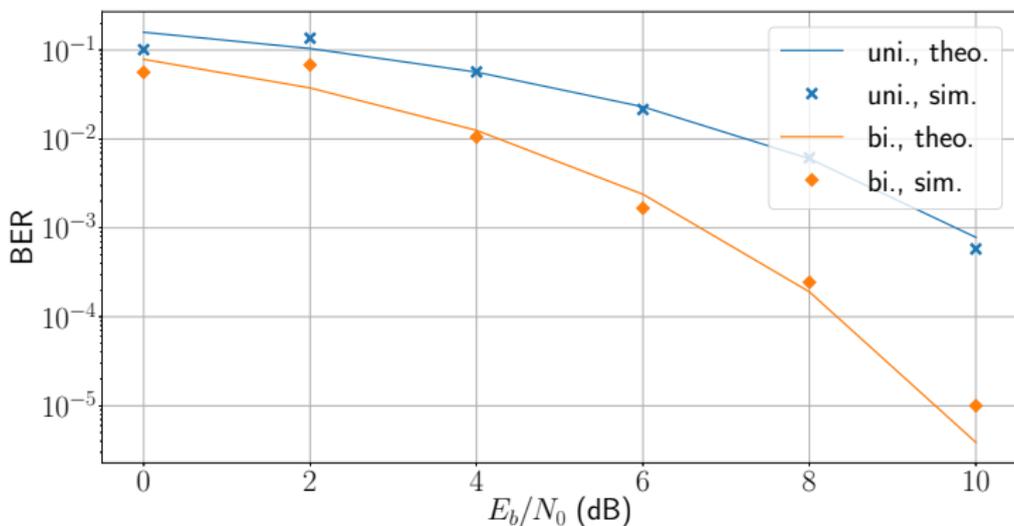
$$E_b = A^2T.$$

⁶⁸ **Frage:** Wieso entspricht dies der mittleren Energie pro Bit?



Bitfehler-Wahrscheinlichkeit bei binärer Signalisierung

- **Beispiel:** Vergleich von bipolarer und unipolarer Signalisierung; Simulation mit mindestens 10 Fehlern OR⁶⁹ 10^5 Bits pro Punkt

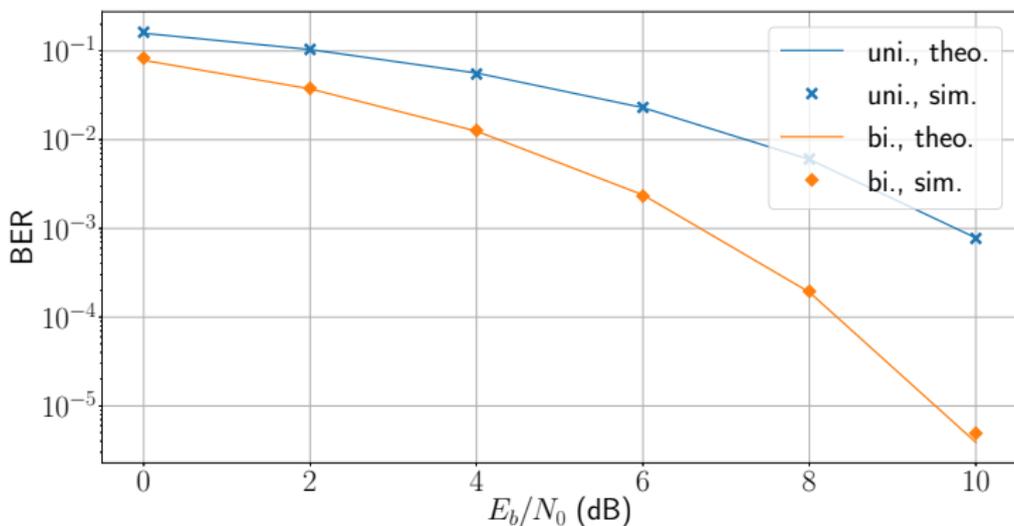


⁶⁹Bedeutet: Zuerst erreichte Bedingung verursacht Abbruch.



Bitfehler-Wahrscheinlichkeit bei binärer Signalisierung

- **Beispiel:** Vergleich von bipolarer und unipolarer Signalisierung; Simulation mit mindestens 500 Fehlern OR 10^7 Bits pro Punkt⁷⁰



⁷⁰ → Diskussion



Bitfehler-Wahrscheinlichkeit bei binärer Signalisierung

■ Bemerkungen:

Man erkennt aus $P_{b,\text{unip.}} = Q(\sqrt{E_b/N_0})$ und $P_{b,\text{bip.}} = Q(\sqrt{2E_b/N_0})$, dass unipolare Signalisierung für dieselbe BER das doppelte E_b/N_0 benötigt. Man sagt:

„Unipolare Modulation ist 3 dB schlechter als bipolare Modulation“.

■ Fragen:

- Können Sie das anschaulich (etwa geometrisch) erklären?
- Welche Vorteile bietet bipolare Signalisierung im Hinblick auf die Verstärker?
- Fallen Ihnen Vorteile der unipolaren Signalisierung ein?



Demodulation linearer Modulation in AWGN bei kohärentem Empfang

Definition

Kohärenter Empfang setzt voraus, dass Trägerfrequenz f_T und Trägerphase im Empfänger exakt bekannt sind.



Demodulation linearer Modulation in AWGN bei kohärentem Empfang

- **Annahme:** Es wird eine lineare Modulation mit Pulsformung $g(t)$ gesendet. Die Sendesignale lauten damit:^{71 72}

$$s_{\text{BP},m}(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cdot (A_{\text{I}}g(t) \cos(2\pi f_{\text{T}}t) - A_{\text{Q}}g(t) \sin(2\pi f_{\text{T}}t)),$$
$$m = 0, \dots, M - 1$$

und tragen $\log_2(M)$ Bits Information.

⁷¹Der Parameter E bezeichnet die in $[0, T]$ gesendete Energie. (**Übung:** Nachweis)

⁷²**Hinweis:** In diesem Abschnitt erfolgt die Darstellung im Bandpass, da i) es sich anbietet und ii) Abwechslung die geistige Flexibilität bewahrt.



Demodulation linearer Modulation in AWGN bei kohärentem Empfang

- **Feststellung:** Beim Korrelationsempfänger müssten nach Definition M Korrelationen berechnet werden.
- **Aber:** Alle Symbole liegen in der komplexen Ebene \implies Beschreibung durch I- und Q-Komponenten ausreichend



Demodulation linearer Modulation in AWGN bei kohärentem Empfang

- **Mathematisch:** Das Empfangssignal $r(t)$ wird auf die Quadraturkomponenten

$$\Psi_I(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}g(t) \cos(2\pi f_T t)$$

$$\Psi_Q(t) = -\sqrt{\frac{2}{T}}g(t) \sin(2\pi f_T t)$$

projiziert, wodurch das Heruntermischen „mit erledigt wird“.

- Nach Projektion auf $\Psi_I(t)$ und $\Psi_Q(t)$ entsteht $r = r_I + jr_Q \in \mathbb{C}$



Demodulation linearer Modulation in AWGN bei kohärentem Empfang

■ Erinnerung:

- Projektion erzeugt $r = r_I + jr_Q \in \mathbb{C}$
 - ML-Entscheidung erfolgt gemäß $\hat{s} = \arg \max_{0 \leq i \leq M-1} f(r|s_i)$
 - Unter AWGN ist im Basisband $r = s + n$, $n \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2)$
- Über die Definition der ML-Regel in (a), Einsetzen in (b) und Weglassen irrelevanter Terme und Monotonie in (c),(d) folgt:

$$\begin{aligned}\hat{s}_{\text{ML}} &\stackrel{(a)}{=} \arg \max_{0 \leq i \leq M-1} f(r|s_i) \\ &\stackrel{(b)}{=} \arg \max_{0 \leq i \leq M-1} \frac{1}{\pi \sigma^2} \exp \left(-\frac{|r - s_i|^2}{\sigma^2} \right) \\ &\stackrel{(c)}{=} \arg \max_{0 \leq i \leq M-1} \exp \left(-\frac{|r - s_i|^2}{\sigma^2} \right) \\ &\stackrel{(d)}{=} \arg \min_{0 \leq i \leq M-1} |r - s_i|^2\end{aligned}$$



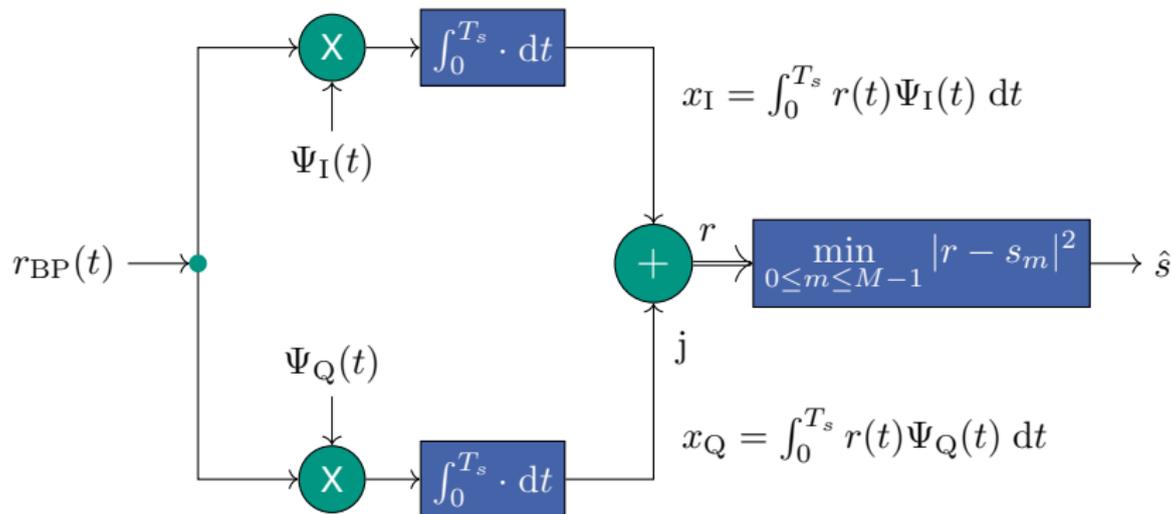
Demodulation linearer Modulation in AWGN bei kohärentem Empfang

Theorem

Bei linearer Modulation und (zirkulärsymmetrischem) AWGN entspricht die ML-Entscheidung der Bestimmung des minimalen Abstands zwischen (komplexem) Empfangswert nach dem IQ-Korrelator und den möglichen IQ-Sendesymbolen.

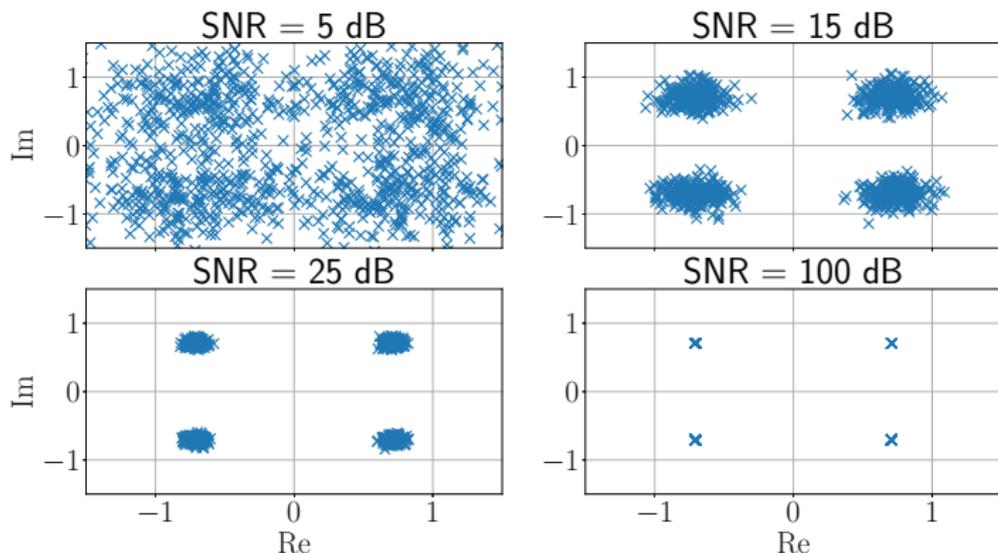
Demodulation linearer Modulation in AWGN bei kohärentem Empfang

- **Graphisch:** Die Projektion ist in folgendem Bild dargestellt



Demodulation linearer Modulation in AWGN bei kohärentem Empfang

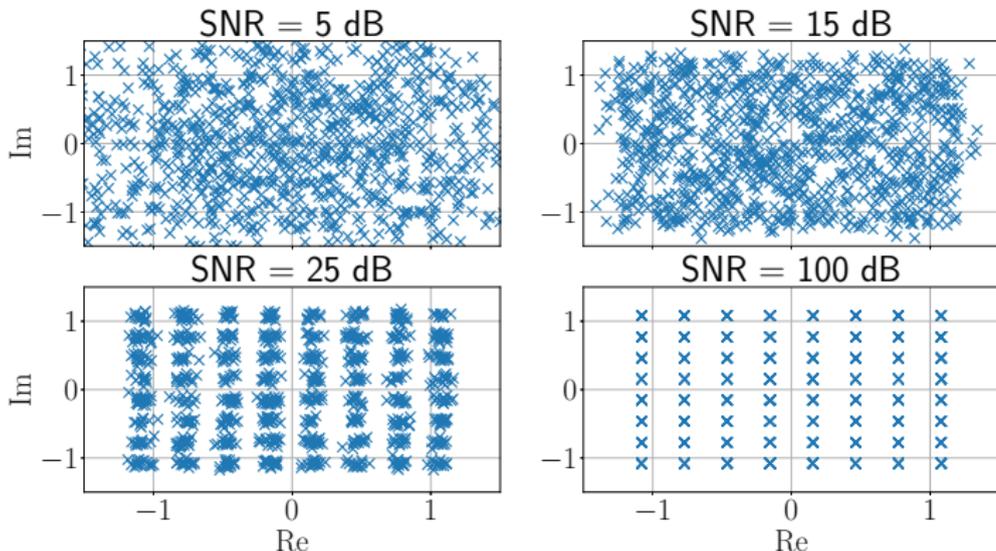
- **Beispiel:** ⁷³ 10^3 IQ-Samples bei QPSK für verschiedene SNR



⁷³ **Datei:** iq_samples.ipynb

Demodulation linearer Modulation in AWGN bei kohärentem Empfang

- **Beispiel:** ⁷⁴ 10^3 IQ-Samples bei 64-QAM für verschiedene SNR



⁷⁴ **Datei:** iq_samples.ipynb

Demodulation linearer Modulation in AWGN bei kohärentem Empfang

■ Bemerkungen:

- Bei Verwendung einer Pulsformung $g(t)$ sind Cosinus und Sinus nicht mehr exakt orthogonal. Im approximativen Sinne ist dies dennoch korrekt. (siehe [Jon11], [PS08])
- *Praktisch* würde trotz obiger Darstellung zuerst das Heruntermischen und anschließend Filterung und Signalverarbeitung bzw. Detektion durchgeführt werden.



Definition

Bei *inkohärentem Empfang* ist die Trägerphase im Empfänger nicht exakt bekannt.⁷⁵

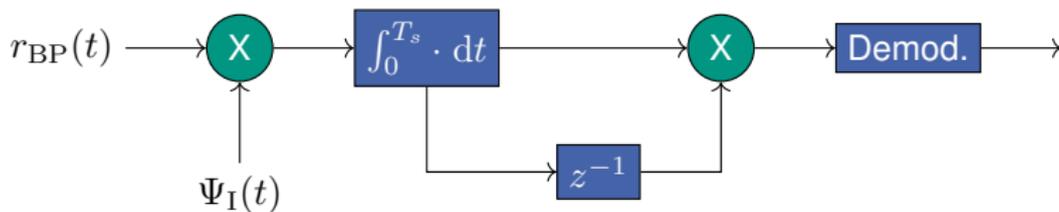
- **Bemerkung:** Da bei inkohärentem Empfang weniger Information zur Verfügung steht, ist anschaulich klar, dass dieser (etwas) schlechter abschneidet, d. h. eine höhere BER liefert.

⁷⁵Oder wird für Modulation und Demodulation nicht verwendet.

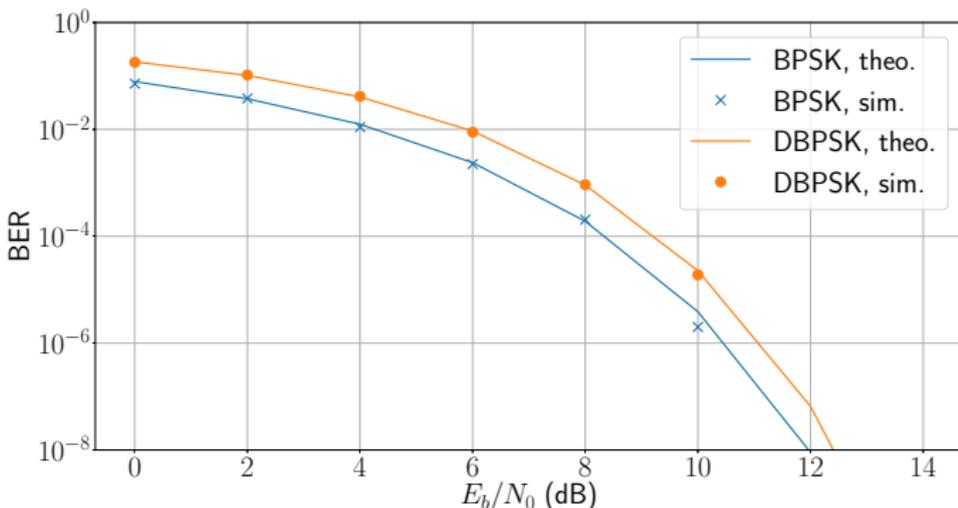


■ Beispiel: (Binary DPSK)

- Signalpunkte sind $-1, +1$
- Berechnen der Phasendifferenz entspricht *Vorcodierung* der Bits gemäß $b'_n = b_n/b_{n-1}$ und BPSK der Folge b'_n
- Im Detektor ist nur die Basisfunktion $\Psi_I(t)$ notwendig.
- Empfänger berechnet $x_n = \int_{nT}^{(n+1)T} r_{BP}(t) \Psi_I(t) dt$, daraus $x'_n = x_n \cdot x_{n-1}$ und decodiert x'_n durch „normale“ BPSK-Decodierung



- **Beispiel:** Bitfehlerrate für DBPSK und BPSK; Simulation von 100 Fehlern OR 10^6 Bits; theoretische Kurve für DBPSK aus [PS08]



- 3 Modulation und Demodulation
 - Modulation
 - Etwas Entscheidungstheorie
 - Demodulation
 - **Lernziele**
 - Literatur



- Die folgende Aufstellung fasst die zentralen Punkte zusammen.
- Es wird aufgezeigt, welche Punkte nach Bearbeitung des Kapitels klar sein sollten.
- **Hinweise:**
 - Die Auflistung ist nicht vollständig, sondern führt die wichtigsten Aussagen auf; nicht erwähnte Inhalte sind dennoch bedeutsam.
 - Oft enthalten die Nachweise wichtige Ideen; diese also nicht vernachlässigen.
 - Stets versuchen, Gleichungen in Verbindung mit Interpretationen und Anwendungen zu sehen
 - Des weiteren sollten alle kleinen nützlichen Ergänzungen verstanden sein.
 - Es ist immer eine gute Idee, etwas Gelerntes im Rechner umzusetzen. Dies hilft beim Verständnis und schärft das Bewusstsein für mögliche Probleme.

Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- Grundprinzip eines Modulators; Zeigerdarstellung der Repräsentation der Information
- Mathematische Beschreibung eines modulierten Signals
- QPSK zur Illustration des Vorgehens; Bestimmung der Datenrate
- Modulationsverfahren
 - ASK, PSK, QAM
 - Beispiele für binäre Modulation: FSK, CPFSK
 - PSK-Varianten, deren Idee/Motivation und Resultate
 - MSK, GMSK
- Pulsformung (Rechteck, Raised-Cosine)

Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- Notwendigkeit von Signaldetektion und Symbolentscheidung und deren Abgrenzung
- Signaldetektion
 - Falschalarm- und Entdeckungswahrscheinlichkeit; Fehler 1. und 2. Art
 - Idee der Entscheidungsregionen
 - Grundprinzip der Herleitung von Neyman-Pearson; Likelihood-Verhältnis
 - Mittelung als Maßnahme zur Verbesserung
- Symbolentscheidung
 - MAP- und ML-Kriterium und deren Zusammenhang
 - Anschauliche Erklärung der Prinzipien
- Grundidee des Scramblers

Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- Anwendung von MAP und ML zur Detektion
- Entscheidung als Schwellwertvergleich
- Idee, Herleitung und Resultat des Matched-Filters; Zusammenhang zur Korrelation
- Korrelationsempfänger
- Fehlerwahrscheinlichkeit für bipolare und unipolare Signalisierung
- Projektion auf Basisfunktionen; Entscheidung bei ML durch minimalen Abstand in \mathbb{C}
- Fehlerwahrscheinlichkeit bei differenziellen Verfahren



- 3 Modulation und Demodulation
 - Modulation
 - Etwas Entscheidungstheorie
 - Demodulation
 - Lernziele
 - **Literatur**



- [Jon11] F. Jondral, *Nachrichtenübertragung*, Schlembach, 4. Auflage, 2011
- [PS08] J. Proakis, M. Salehi, *Digital Communications*, McGraw-Hill, 2008
- [PJ15] F. Puente-León, H. Jäkel, *Signale und Systeme*, De Gruyter Oldenbourg, 6. Auflage, 2015
- [Kam04] K.-D. Kammeyer, *Nachrichtenübertragung*, Teubner, 3. Auflage, 2004
- [Hoe13] P. A. Höher, *Grundlagen der digitalen Informationsübertragung*, 2. Auflage, Springer, 2013
- [Mol11] A. Molisch, *Wireless Communications*, 2. Auflage, Wiley, 2011
- [NeMa93] Neeser, Massey, *Proper Complex Random Processes with Applications to Information Theory*, IEEE Transactions on Information Theory, July 1993
- [Gal08] R. Gallager, *Principles of Digital Communications*, Cambridge University Press, 2008

- [Saut15] M. Sauter, *Grundkurs Mobile Kommunikationssysteme*, Springer, 6. Auflage, 2015
- [JW02] F. Jondral, A. Wiesler, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und stochastische Prozesse*, Teubner, 2. Auflage, 2002
- [Kre91] U. Krengel, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*, Vieweg, 3. Auflage, 1991
- [Gol82] S.W. Golomb, *Shift Register Sequences*, Aegan Park Press, Laguna Hills (CA), 1982



Nachrichtentechnik I – Kanalcodierung

Holger Jäkel

Communications Engineering Lab (CEL)



- 4 Kanalcodierung
 - Grundlegende Betrachtungen
 - Blockcodierung
 - Faltungscodierung
 - Ausblick
 - Beispiele
 - Lernziele
 - Literatur

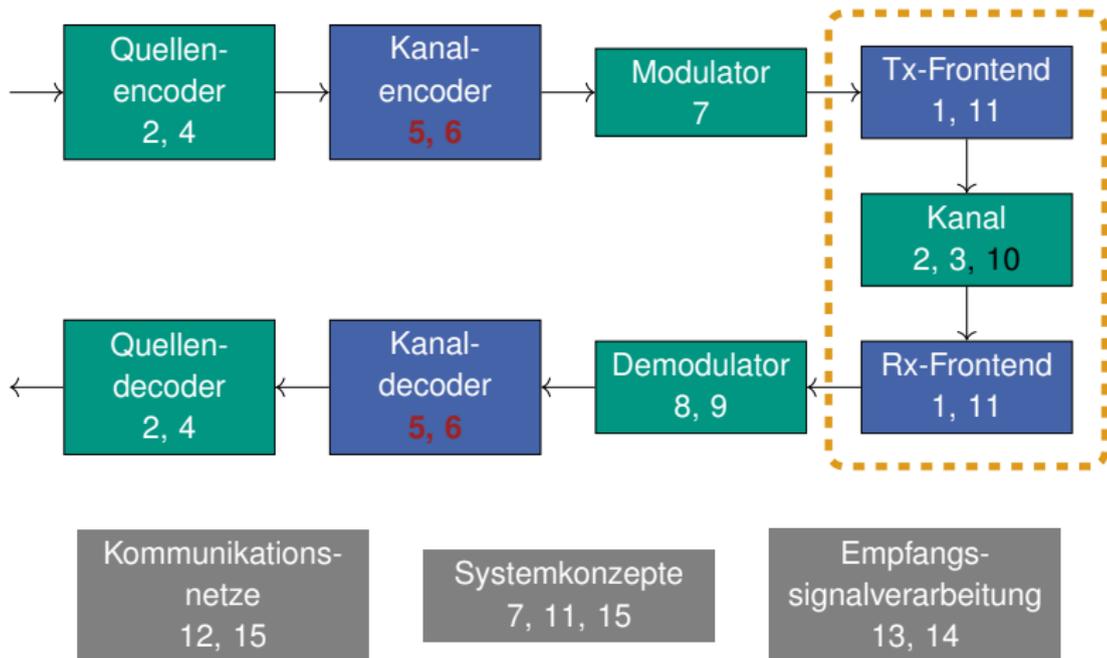


- Folgende Diskussionen erfolgen gemäß¹

[Jon11]: F. Jondral, *Nachrichtenübertragung*, Schlembach, 4. Auflage, 2011

¹Von dort entstammt die Struktur der Folien, die Formeln und die meisten Bilder.

Einordnung der Kapitel von [Jon11]



- 4 Kanalcodierung
 - Grundlegende Betrachtungen
 - Blockcodierung
 - Faltungscodierung
 - Ausblick
 - Beispiele
 - Lernziele
 - Literatur

- **Motivation:** Redundanz hilft und erlaubt Erkennen/Beseitigen von Fehlern
- **Beispiele:**
 - N*CHRI**T*NTE**N*K I*T TO*L
 - NNICTHEICTENHHARCK IST TLOL ²
 - NCHRCHTNTCHNK ST TLL
 - N4CHR1CHT3NT3CHN1K 15T TOLL
- **Frage/Übung:** Wieso verwenden wir dann Quellen- und anschließend Kanalcodierung und lassen nicht alles wie es ist?

²Quelle: www.buchstaben-vertauschen.de



■ Notation:

- Alle Aussagen und Analysen erfolgen in Bits!
- Verknüpfungen erfolgen gemäß:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Letztlich entspricht dies „normaler“ Rechnung mit anschließender modulo 2 Operation bzw. einer XOR und AND Verknüpfung von Logikwerten.

- Dies wird oft als $\mathbb{F}_2 := \text{GF}(2)$ (Galois Field der Ordnung 2) bezeichnet.³

³Mathematisch entspricht dies dem *Binärkörper* mit der Grundmenge $\{0, 1\}$. [Fri95]

■ Bemerkungen:

- Die Verwendung der Notation \mathbb{F}_2 weicht von [Jon11] ab und entspricht eher [Fri95]. Sie ist aber kürzer und sorgt für übersichtlichere Zusammenhänge, weswegen sie im Folgenden verwendet wird.
- In der Codierung werden auch Körper $\mathbb{F}_{2^k} = \text{GF}(2^k)$ mit 2^k Elementen verwendet.⁴ Diese benötigen allerdings mehr Vorarbeit, siehe etwa [Fri95], und werden deswegen im Folgenden nicht diskutiert.

⁴Etwa mit $k = 8$ zur Rechnung mit Byteblöcken.



- **Aufgabe der Kanalcodierung:** Erkennung und/oder Korrektur von Übertragungsfehlern binärer Daten
- **Ziel der Kanalcodierung:** Reduzieren der Bitfehlerwahrscheinlichkeit bei gegebenem Signal-zu-Rausch-Verhältnis⁵ (*Signal-to-Noise-Ratio, SNR*)

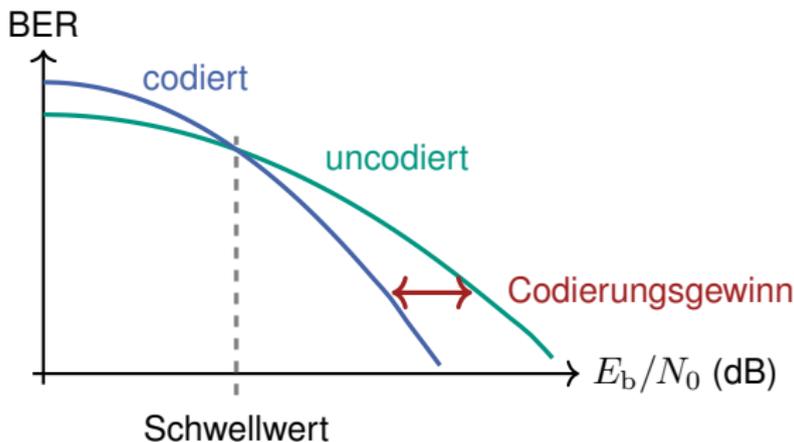
$$\text{SNR}_{\text{bit}} = \frac{E_b}{N_0}$$

⁵Die vollständig korrekte Bezeichnung wäre „Signal-zu-Rausch-Leistungsverhältnis“. Und eigentlich nicht mal das, da auf der rechten Seite ein Energieverhältnis steht. Diese Unklarheit wird gleich beseitigt...



- **Bemerkung:** Im Rahmen einer präzisen Unterscheidung müsste zwischen Fehlerwahrscheinlichkeiten und Fehlerraten unterschieden werden. Im Großteil der Literatur hat es sich eingebürgert, diese Begriffe synonym zu verwenden. Daran halten sich auch die folgenden Benennungen.

- Qualität der Kanalcodierung zeigt sich durch Änderung der SNR-BER-Kurve
- Gegenüber der Kurve ohne Codierung ergibt sich ein *Codierungsgewinn*.



Anhang B: Das Signal-zu-Rausch-Verhältnis

- Signal und Störung werden als Pfade ergodischer Prozesse aufgefasst.
- Definition des *Signal-zu-Stör-Verhältnis*, engl. *Signal-to-Noise-Ratio*, als Verhältnis von Leistungen:

$$S/N = \frac{\text{mittlere Leistung des Signals } s(t)}{\text{mittlere Leistung der Störung } n(t)}$$



Anhang B: Das Signal-zu-Rausch-Verhältnis

■ Annahme:⁶

- Kanal der Bandbreite B bei binärer Übertragung
 - Mittlere Empfangsleistung: S W
 - Mittlere Empfangsenergie pro Bit: E_b Ws
 - Bitrate: R 1/s
- Störung ist weißes Rauschen
 - Spektrale Rauschleistungsdichte: N_0 W/Hz
 - Bandbreite B Hz

- Mit der Normierung $R = 1$ 1/s, $B = 1$ Hz folgt:

$$\frac{S}{N} = \frac{E_b R}{N_0 B} = \frac{E_b}{N_0}$$

⁶Die Betrachtungen erfolgen im Basisband.



Anhang B: Das Signal-zu-Rausch-Verhältnis

Definition

Das *SNR pro Bit* ist definiert als:⁷

$$\text{SNR}_{\text{bit}} = \frac{E_b}{N_0}$$

Es wird meist in Dezibel angegeben:

$$\text{SNR}_{\text{bit}} \text{ (dB)} = 10 \log_{10} \left(\frac{E_b}{N_0} \right)$$

⁷**Übung:** Machen Sie sich klar, dass die Einheiten zusammenpassen.

■ Beispiel: (Wiederholungscode)

- Bei binärer Übertragung wird das zu sendende Bit N mal wiederholt. Es ergeben sich die Codewörter:

$$\underbrace{00 \dots 0}_{N \text{ mal}}, \quad \underbrace{11 \dots 1}_{N \text{ mal}},$$

■ Frage/Übung:

- Wie würden Sie auf das gesendete Bit entscheiden?
- Welche Nachteile/Probleme sehen Sie beim Wiederholungscode?

- **Beispiel:** (Wirkungsweise von Blockcodes)
 - Übertragung von 15 Bits angeordnet als 3×5 -Matrix
 - Sicherung/Codierung durch zeilen- und spaltenweise Paritätskontrolle

	1	2	3	4	5	Parität
1	1	1	0	1	0	1
2	1	0	1	0	0	1
3	0	1	1	0	0	0
Parität	0	0	1	1	0	0

- Coderate⁸: 15 Bit / 24 Bit = 0.625
-

⁸Definiert als Nutzbits/Gesamtbits



- **Diskussion:** (zu „wahrscheinlich die **1** falsch“)

- **Szenario:**

- N -facher Wiederholungscode mit Codewörtern $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \mathbb{F}_2^N$
- Empfangen wird der Vektor $(1, \dots, 1, 0)$

- Naheliegend: Gesendet wurde $\mathbf{1}$

- **Frage:** Warum ist das „naheliegend“?

- **Antwort:**

- Weil wir stillschweigend davon ausgehen, dass wenig Fehler auftreten.
- Wären Fehler häufig ($P_e \rightarrow 1$), so wäre der Sendevektor $\mathbf{0}$ wahrscheinlicher!



4 Kanalcodierung

- Grundlegende Betrachtungen
- **Blockcodierung**
 - Definition von Blockcodes
 - Systematische Blockcodes
 - Decodierung
 - Zyklische Blockcodes
- Faltungscodierung
- Ausblick
- Beispiele
- Lernziele
- Literatur



Definition

Ein (binärer) *Blockcode* bildet ein (binäres) k -stelliges Datenwort auf ein (binäres) n -stelliges Codewort mit $n > k$ ab. Diese Codes werden (n, k) -Codes genannt.

Die *Coderate* eines (n, k) -Codes ist gegeben durch

$$r = \frac{k}{n}.$$

Definition

In einem (n, k) -Code werden k Datenbits auf n Codebits abgebildet \implies Beschreibung durch Vektoren:

$$\text{Block } d_1, \dots, d_k \quad \rightarrow \quad \mathbf{d}^T = (d_1, \dots, d_k) \in \mathbb{F}_2^k$$

$$\text{Block } c_1, \dots, c_n \quad \rightarrow \quad \mathbf{c}^T = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{F}_2^n$$

Die Menge aller Codewörter lautet:

$$\mathcal{C} := \{ \mathbf{c} \in \mathbb{F}_2^n : \text{es ex. } \mathbf{d} \in \mathbb{F}_2^k, \text{ das zu } \mathbf{c} \text{ codiert wird} \}$$

- **Beispiel:** (*Wiederholungscode*⁹)

- Für den $(n, 1)$ -Wiederholungscode ist $k = 1$ und n beliebig.
- Die Menge der Codewörter lautet

$$\mathcal{C} = \{(0, \dots, 0)^T, (1, \dots, 1)^T\}$$

- Die Coderate ist $r = 1/n$.

⁹ ... als einfachstes Beispiel...



■ Anschauung:¹⁰

- Da das Datenwort k Stellen hat, gibt es 2^k Datenwörter; es folgt¹¹ $|\mathcal{C}| = 2^k$
- Weiterhin ist $|\mathbb{F}_2^n| = 2^n$.
- Durch diese Auswahl von 2^k Punkten aus 2^n möglichen Punkten in $\mathbb{F}_2^n = \{0, 1\}^n$ entsteht die Korrekturfähigkeit des Codes.

⇒ Je kleiner k relativ zu n ist und/oder je besser die Punkte angeordnet sind, desto größer ist der mögliche Abstand der Punkte. Je größer der Abstand der Punkte, desto mehr Fehler können erkannt/korrigiert werden.

¹⁰ **Erinnerung:** Die Kardinalität $|\mathcal{A}|$ bezeichnet die Anzahl der Elemente von \mathcal{A} .

¹¹ Annahme ist, dass die Codewörter zu unterschiedlichen Datenwörtern verschieden sind.

- **Bemerkung:** Die Vorteile der Kanalcodierung werden „bezahlt“ durch
 - höheren (Signalverarbeitungs-)Aufwand für Sender und Empfänger
 - Verzögerung durch die En- und Decodierung
 - eine um die Coderate verringerte (Netto-)Datenrate $R_N = rR$ bei fester Bandbreite *oder* eine um den Faktor $1/r$ erhöhte (Netto-)Bandbreite $B_N = B/r$ bei fester Datenrate

- **Annahme:** Code der Länge n kann t Fehler erkennen oder korrigieren
- **Frage:** Wie groß ist die *Restfehlerwahrscheinlichkeit*, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler nicht erkannt/korrigiert wird?
- **Antwort:**
 - Annahme: Bitfehler unabhängig und identisch verteilt mit $p := P(\text{Bit falsch}) \implies$ Binomialverteilung
 - Restfehler entsteht, falls in dieser Binomialverteilung mehr als t Fehler („Treffer“) auftreten¹²

$$P_{\text{F,Rest}} \leq \sum_{i=t+1}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

¹²Die Ungleichung wird unter gewissen Bedingungen zu einer Gleichung (siehe [Fri95, S. 93]). Diese Betrachtungen würden jedoch den Rahmen einer Einführung sprengen.



- **Bisher:** Grundbegriffe zu Codes; Grundidee der Fehlerwahrscheinlichkeit bei unabhängigen Einzelfehlern
- **Nun:** Beschreibung der (math.) Erzeugung von Codes und deren Zusammenhänge

Definition¹³

Eine Code \mathcal{C} heißt *linear*, falls die Summe zweier Codewörter wieder ein Codewort ist:

$$c_1, c_2 \in \mathcal{C} \implies c_1 + c_2 \in \mathcal{C}$$

Die Codemenge ist somit bzgl. der Addition abgeschlossen.

¹³Die Definition ist an [Fri95], [PS08] angelehnt und weicht von derjenigen in [Jon11] geringfügig ab. Letztlich erweisen sie sich als identisch.



- **Aussage:** Lineare Blockcodes können über eine *Generatormatrix* $G \in \mathbb{F}_2^{k \times n}$ durch

$$\mathcal{C} = \{d^T G : d \in \mathbb{F}_2^k\}$$

beschrieben werden.

- **Nachweis:** Da \mathcal{C} ein Vektorraum der Dimension k ist, existiert eine Basis $B = \{b_1, \dots, b_k\} \subseteq \mathcal{C}$. Somit besitzt jedes $c \in \mathcal{C}$ eine eindeutige Darstellung $c = \sum_{i=1}^k \alpha_i b_i$ mit $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}_2$. Es folgt die Aussage mit:

$$G = \begin{pmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_k^T \end{pmatrix}$$



■ Bemerkung:

- Bei Verwendung einer Generatormatrix \mathbf{G} entstehen die *Paritycheckbits* durch Linearkombination der k Datenbits in \mathbb{F}_2 .¹⁴

$$\text{Datenbits } d_1, \dots, d_k \implies c_j = \sum_{i=1}^k g_{ij} d_i, \quad j = 1, \dots, n$$

Eine übersichtlichere Darstellung ergibt sich durch Vektorschreibweise:¹⁵

$$\mathbf{d} \in \mathbb{F}_2^k, \mathbf{G} \in \mathbb{F}_2^{k \times n} \implies \mathbf{c}^T = \mathbf{d}^T \mathbf{G} \in \mathbb{F}_2^n$$

- Ist ein Code mittels Generatormatrix beschrieben, so ist dieser Code stets linear.¹⁶

¹⁴ **Erinnerung:** + und \cdot sind im Sinne von \mathbb{F}_2 zu verstehen.

¹⁵ **Übung:** Machen Sie sich klar, dass die Dimensionen stimmen.

¹⁶ **Übung:** Machen Sie sich dies klar.

■ Ergänzung:

- Im Nachweis zur Darstellung linearer Codes mittels Generatormatrix wurde gezeigt, dass

$$\mathcal{C} = \{d^T G : d \in \mathbb{F}_2^k\}.$$

Die Gleichheit betrifft aber lediglich die *Menge der Codewörter*. „Pedantisch“ müsste man zwischen Codierung und Code unterscheiden.¹⁷

■ Beispiel:

- Für den $(n, 1)$ -Wiederholungscode folgt: $\mathcal{C} = \{(0, \dots, 0)^T, (1, \dots, 1)^T\}$
- Die Codierungen

$$C_1 : 0 \mapsto (0, \dots, 0)^T, 1 \mapsto (1, \dots, 1)^T$$

$$C_2 : 0 \mapsto (1, \dots, 1)^T, 1 \mapsto (0, \dots, 0)^T$$

erzeugen beide dieselbe Menge an Codewörtern, sind aber verschieden?!?

¹⁷**Hinweis:** Diese Unterscheidung resultiert in *identischen Codes* bzw. *äquivalenten Codes* [Fri95].

Definition

Ein Blockcode heißt *systematisch*, falls die Codewörter in den ersten k Stellen das Datenwort beinhalten und $n - k$ Paritycheckbits angehängt werden.¹⁸



¹⁸Manche Lehrbücher fordern, dass die Datenbits an beliebigen Stellen (nicht notwendigerweise den ersten k) auftreten. Dies entspricht einer Umsortierung.

■ Bemerkungen:

- Ein Blockcode ist genau dann systematisch, wenn für die Matrix G die Beschreibung¹⁹

$$G = [I_k, P] \in \mathbb{F}_2^{k \times n}$$

gilt, wobei $I_k \in \mathbb{F}_2^{k \times k}$ die k -dimensionale Einheitsmatrix ist und $P \in \mathbb{F}_2^{k \times (n-k)}$ die Gewichte zur Bildung der Paritycheckbits enthält.

- Aufgrund der Konstruktion ist für systematische lineare Blockcodes die Summe²⁰ zweier Codewörter wieder ein Codewort:

$$c_1, c_2 \in \mathcal{C} \implies c_1 + c_2 \in \mathcal{C}$$

- Da der Code systematisch ist, sind die Codewörter zu verschiedenen Datenwörtern stets verschieden.²¹

¹⁹Eine Verwechslung mit der Kanalübergangsmatrix P ist in diesem Kapitel nicht zu befürchten.

²⁰**Achtung:** Addition von Vektoren in \mathbb{F}_2^k bzw. \mathbb{F}_2^n punktweise, sprich ohne Übertrag!

²¹**Übung:** Überlegen. Wieso ist das wichtig?



■ Beispiel:

- Betrachte einen $(7, 3)$ -Code mit

$$\mathbf{G} = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

- Da am Anfang die Einheitsmatrix steht, ist der Code systematisch.
- Die Matrix zur Bildung der Paritycheckbits ist

$$\mathbf{P} = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

■ Beispiel: (ctd.)

- Codewörter:²²

d^T			$c^T = d^T G$						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	0	1	0	1

■ Beobachtungen:

- Der Code ist systematisch
- Alle Codewörter unterscheiden sich in mindestens 3 Positionen

²²Übung: Nachvollziehen



■ Beispiel: ((7, 4)-Hamming-Code)

- Der (7, 4)-Hamming-Code ist beschrieben durch [Fri95]

$$\mathbf{G} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

- Da am Anfang die Einheitsmatrix steht, ist der Code systematisch.
- Die Matrix zur Bildung der Paritycheckbits ist

$$\mathbf{P} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

- „*Decodierung*“: Rückgewinnung der Datenfolge aus beobachteter Empfangsfolge y
- **Annahme:** Der Code \mathcal{C} ist linear und systematisch.
- **Intuition:** Je mehr sich die Codewörter paarweise unterscheiden desto mehr Fehler können erkannt/korrigiert werden.

Definition

Der *Hamming-Abstand* zweier Codewörter ist die Anzahl der Stellen, an denen sich die Codewörter unterscheiden:

$$d_H(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) := |\{i : (\mathbf{c}_1)_i \neq (\mathbf{c}_2)_i\}|, \quad \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in \mathcal{C}$$

Theorem

Sollen mit einem Code t Fehler korrigiert werden können, so muss für den minimalen Hammingabstand zwischen zwei Codewörtern,

$$d_{\min} := \min_{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in \mathcal{C}} d_H(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$$

gelten:

$$d_{\min} \geq 2t + 1.$$

- **Anschauung:** Der Mindestabstand ist so groß, dass man – selbst wenn man t Schritte von einem Codewort „weggeht“ – noch näher am ursprünglichen Codewort als an jedem anderen Codewort ist.

- **Bemerkung:** Ist der Code linear, so folgt

$$\begin{aligned}d_{\min} &= \min_{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in \mathcal{C}} d_H(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) \\ &= \min_{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in \mathcal{C}} d_H(\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2, \mathbf{0}) \\ &= \min_{\mathbf{c} \in \mathcal{C}} d_H(\mathbf{c}, \mathbf{0})\end{aligned}$$

zur einfacheren Berechnung des Minimalabstands.²³

- **Beispiel:** Für den $(7, 4)$ -Hamming-Code ist $d_{\min} = 3$.²⁴

²³ **Übung:** Ist denn $\mathbf{0}$ immer ein Codewort linearer Codes?

²⁴ **Nachweis: Übung**

Theorem (*Hamming-Ungleichung*)

Um bei einem (n, k) -Code t Fehler korrigieren zu können, muss

$$2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^t \binom{n}{i}$$

gelten. Das bedeutet, dass die Anzahl der Paritycheckwörter mindestens so groß ist wie die Anzahl der möglichen Fehler mit bis zu t Stellen.

- **Hinweis:** Die Hamming-Ungleichung ist eine notwendige (!) Bedingung für die Korrekturfähigkeit, keine hinreichende Bedingung.

■ Beispiel:

- Für den (7, 4)-Hammingcode folgt:

$$2^{7-4} = 8 \stackrel{!}{\geq} \sum_{i=0}^t \binom{7}{i}$$

- Die Summe lautet für ansteigende t :

t	Summanden	Summe
0	1	1
1	1 + 7	8
2	1 + 7 + 21	29

⇒ Es kann höchstens 1 Fehler korrigiert werden.

- **Frage:** Wie wird nun decodiert, d.h. von einer Empfangsfolge auf die Datenfolge entschieden?
- **Antwort:** Durch Anwendung aus der Demodulation bekannter Entscheidungskriterien
- **Hinweis:** Geschätzt wird der Codevektor c ! Der Datenvektor d ergibt sich durch "einfache Rückrechnung".



- Empfangen wurde $\mathbf{y} \implies$ man unterscheidet zwei Fälle:
 - $\mathbf{y} \in \mathbb{F}_2^n$: Hier erhält der Decodierer vom Demodulator bereits Bitfolgen bzw. der Demodulator entscheidet bereits auf Bits. Man spricht von *Hard-Decision (HD)*.
 - $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$: Der Demodulator trifft keine Entscheidung, sondern wandelt „lediglich“ das Empfangssignal in reelle Werte²⁵ um. Man spricht von *Soft-Decision (SD)*.

²⁵**Ergänzung:** Der Fall $\mathbf{y} \in \mathbb{R}$ stellt einen Extremfall dar. Man spricht bereits bei $\mathbf{y} \in \mathcal{A} \supseteq \mathbb{F}_2^n$ von Soft-Decision; etwa wenn Empfangswerte quantisiert werden. [Fri95]



Erinnerung: Entscheidungskriterien²⁶

- *Maximum a posteriori, MAP*: Entscheide für die Folge, die *nach der Beobachtung* von \mathbf{y} am wahrscheinlichsten ist:

$$\hat{\mathbf{c}}_{\text{MAP}} = \arg \max_{\mathbf{c}} P(\mathbf{c}|\mathbf{y})$$

- *Maximum Likelihood, ML*: Entscheide für die Folge, die die beobachtete Folge am wahrscheinlichsten²⁷ werden lässt:

$$\hat{\mathbf{c}}_{\text{ML}} \stackrel{(i)}{=} \arg \max_{\mathbf{c}} P(\mathbf{y}|\mathbf{c}) \stackrel{(ii)}{=} \arg \max_{\mathbf{c}} f(\mathbf{y}|\mathbf{c})$$

²⁶**Erinnerung:** Entropie einer Quelle ist bei Gleichverteilung maximal. \implies Eine „gute“ Quellencodierung erzeugt gleichverteilte Symbole. Somit sind MAP- und ML-Decodierung in diesem Fall äquivalent.

²⁷Die Varianten (i), (ii) entstehen je nach \mathbf{y} (HD/SD).

■ *Hard-Decision:*

- Demodulator liefert „harte“ Bits: $\mathbf{y} \in \mathbb{F}_2^n \implies$ Übergang $\mathbf{c} \mapsto \mathbf{y}$ entspricht einem binären Kanal mit Bitfehlerwahrscheinlichkeit p_b
- Die Wahrscheinlichkeit für ein gegebenes Fehlermuster mit m Bitfehlern lautet:²⁸

$$P(\mathbf{y}|\mathbf{c}) = p_b^m (1 - p_b)^{n-m}$$

Daraus ergibt sich:

$$\ln P(\mathbf{y}|\mathbf{c}) = m \ln \frac{p_b}{1 - p_b} + n \ln(1 - p_b)$$

²⁸Beachte: Es fehlt der aus der WT gewohnte Binomialkoeffizient $\binom{n}{m}$. Dies liegt daran, dass das Fehlermuster fest ist und nicht die Wahrscheinlichkeit für m Fehler an beliebigen Stellen berechnet wird.



- *Hard-Decision: (ctd.)*

- **Erinnerung:**

$$\ln P(\mathbf{y}|\mathbf{c}) = m \ln \frac{p_b}{1 - p_b} + n \ln(1 - p_b)$$

- Für $p_b < 1/2$ ist das Argument des \ln kleiner 1 \implies

$$\arg \max_{\mathbf{c}} \ln P(\mathbf{y}|\mathbf{c}) = \arg \min_{\mathbf{c}} d_H(\mathbf{c}, \mathbf{y}),$$

weil dies zum kleinsten m führt, mit dem *Hammingabstand*

$$d_H(\mathbf{c}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n 1\{c_i \neq y_i\} = |\{i : c_i \neq y_i, 1 \leq i \leq n\}|$$

- Entscheidung des Decoders fällt auf Basis des kleinsten Hamming-Abstands zur beobachteten Folge



■ *Soft-Decision:*

- Demodulator liefert „weiche“ Bits aus \mathbb{R} , d. h. er entscheidet nicht auf $\{0, 1\}$
- Betrachte AWGN²⁹-Szenario mit $y_i = c_i + w_i$, $w_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \implies$

$$f(y_i | c_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{|y_i - c_i|^2}{2\sigma^2}\right)$$

Sind die Ausgangswerte unabhängig, so folgt für den Empfangsvektor

$$f(\mathbf{y} | \mathbf{c}) = \prod_{i=1}^n f(y_i | c_i).$$

²⁹AWGN: additive white gaussian noise; es wird ein weißes, gaußverteiltes Rauschen addiert



- *Soft-Decision:* (ctd.)
 - Kurze Rechnung liefert:

$$\begin{aligned}\ln f(\mathbf{y}|\mathbf{c}) &= \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left(-\frac{|y_i - c_i|^2}{2\sigma^2} \right) \right) \\ &= -\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{c}\|^2}{2\sigma^2} + \text{const}\end{aligned}$$

und somit

$$\arg \max_{\mathbf{c}} \ln f(\mathbf{y}|\mathbf{c}) = \arg \min_{\mathbf{c}} \|\mathbf{y} - \mathbf{c}\|^2$$

- Entscheidung fällt – wie schon bei der Demodulation – auf Basis des kleinsten Euklid'schen Abstands

■ Feststellung:

- Sowohl bei Hard- als auch bei Soft-Decision wird diejenige Empfangsfolge am wahrscheinlichsten beobachtet, die den geringsten Abstand zur Sendefolge hat.^{30 31}
- Im Sinne des MAP-Prinzips entscheidet der Decoder nach Beobachtung von \mathbf{y} somit für die Folge \mathbf{c} mit kleinstem Abstand zur Beobachtung.

³⁰ Lediglich der zu verwendende Abstandsbegriff ändert sich.

³¹ Bei Hard-Decision ist zur Gültigkeit dieser Aussage $p_b < 1/2$ notwendig.



■ **Bemerkungen:** ([Fri95, S. 27, 28])

- Da „mehr Information“ bei der Decodierung genutzt wird, sollte Soft-Decision bessere Ergebnisse liefern.
- Vergleicht man Verfahren bzgl. ihres Codierungsgewinns³², ergibt sich für den *asymptotischen Codierungsgewinn*³³ die Näherung:

$$G_{\text{HD}} \approx 10 \log_{10}(r(t + 1)) \quad (\text{dB})$$

$$G_{\text{SD}} \approx 10 \log_{10}(rd_{\text{min}}) \quad (\text{dB})$$

- Mit der Approximation³⁴ $d_{\text{min}} \approx 2t$ folgt:

$$G_{\text{SD}} \approx G_{\text{HD}} + 3 \quad (\text{dB})$$

³²Siehe Folie 11

³³asymptotisch: für unendlich großes SNR; im praktisch relevanten Bereich wird weniger Gewinn erreicht.

³⁴Dies setzt $t \gg 1$ voraus.



- *Decodierung, praktisch*: Der Decodierer verwendet die *Paritycheckmatrix*

$$\mathbf{H} = [\mathbf{P}^T, \mathbf{I}_{n-k}] \in \mathbb{F}^{(n-k) \times n}$$

und berechnet aus dem Empfangsvektor \mathbf{y} das *Syndrom*³⁵

$$\mathbf{s}^T = \mathbf{y}^T \mathbf{H}^T \in \mathbb{F}^{n-k}.$$

³⁵Die genaue Erklärung für die Verwendung des Syndroms erfordert weitergehende Kenntnisse. Hierzu sei auf weiterführende Vorlesungen oder [Fri95] verwiesen.



- **Analyse:** (Syndromdecodierung)

- **Annahme:** Das Codewort c_i wurde gesendet.

- 1. Fall: Decoder erhält unverfälschtes Codewort, $\mathbf{y}^T = \mathbf{c}_i^T = [\mathbf{d}_i^T, \mathbf{c}_{P,i}^T] \in \mathcal{C}$, bestehend aus Datenwort \mathbf{d}_i und Paritycheckbits $\mathbf{c}_{P,i}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^T &= \mathbf{y}^T \mathbf{H}^T = [\mathbf{d}_i^T, \mathbf{c}_{P,i}^T] \begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{I}_{n-k} \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{d}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{c}_{P,i}^T \mathbf{I}_{n-k} = \mathbf{c}_{P,i}^T + \mathbf{c}_{P,i}^T = \mathbf{0}^T \quad \text{mod } 2 \end{aligned}$$



■ Analyse: (Syndromdecodierung) (ctd.)

- 2. Fall: Decoder beobachtet verfälschtes Codewort, $\mathbf{y}^T = \mathbf{c}_i^T + \mathbf{e}^T$, mit Fehlermuster $\mathbf{e} \in \mathbb{F}_2^n$

- 2.1. Fall: $\mathbf{0} \neq \mathbf{e} \in \mathcal{C}$ und damit $\mathbf{y} \in \mathcal{C}$. Es folgt:

$$\mathbf{s}^T = \mathbf{y}^T \mathbf{H}^T = \mathbf{e}^T \mathbf{H}^T = \mathbf{0}^T \pmod{2}$$

- 2.2. Fall: $\mathbf{e} \notin \mathcal{C}$ und damit $\mathbf{y} \notin \mathcal{C}$. Es folgt:

$$\mathbf{s}^T = \mathbf{y}^T \mathbf{H}^T = \mathbf{e}^T \mathbf{H}^T \neq \mathbf{0}^T \pmod{2}$$

Ist genau eine Stelle verfälscht, so ist³⁶ $\mathbf{y}^T = \mathbf{c}_i^T + \delta_\ell$ und somit ist das Syndrom

$$\mathbf{s}^T = \mathbf{y}^T \mathbf{H}^T = \delta_\ell^T \mathbf{H}^T = (h_{\ell 1}, \dots, h_{\ell(n-k)})^T \pmod{2}$$

gleich der ℓ -ten Spalte von \mathbf{H} .

³⁶Unter Verwendung der Notation $\delta_\ell \in \mathbb{F}_2^n$ mit $(\delta_\ell)_i = \begin{cases} 1, & i = \ell \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

■ Bemerkungen:

- Ist das Syndrom $s \neq \mathbf{0}$, so liegt ein Übertragungsfehler vor.
- Ist das Syndrom $s = \mathbf{0}$, so wurde ein gültiges Codewort beobachtet.
- Der Fall 2.1 beschreibt die Situation, in der ein falsches, aber zulässiges Codewort beobachtet wird. In diesem Fall ist der Decoder „machtlos“.

- Sind Übertragungsfehler „relativ selten“³⁷, so sollte für $s \neq \mathbf{0}$ dasjenige Fehlermuster e mit kleinster Anzahl an 1 gewählt werden. Dies ist die *Syndromdecodierung* [Fri95].

³⁷ ... ohne diese Aussage zu quantifizieren...



■ **Einschub:** (Für Interessierte)

- Da es 2^{n-k} Syndrome, aber $2^n - 2^k$ inkorrekte Empfangswörter gibt, müssen zwangsläufig mehrere Fehler auf dasselbe Syndrom abgebildet werden.
- Das Vorgehen bei der Decodierung lautet:³⁸

- Teile die Empfangswörter in *Nebenklassen* \mathcal{M}_μ , engl.: *cosets*, gleicher Syndrome.³⁹

$$\mathbb{F}_2^n = \sum_{\mu=1}^{2^{n-k}} \mathcal{M}_\mu$$

- Bestimme *Nebenklassen-Anführer*, engl.: *coset leader* e_μ gemäß

$$e_\mu \in \mathcal{M}_\mu, \quad d_H(e_\mu, \mathbf{0}) \leq d_H(e, \mathbf{0}) \text{ für alle } e \in \mathcal{M}_\mu$$

- Liegt das Syndrom in der Nebenklasse \mathcal{M}_μ , so decodiere durch Subtraktion des Nebenklassen-Anführers (etwa realisiert durch eine lookup table):

$$s \in \mathcal{M}_\mu \implies \hat{c} = y - e_\mu$$

³⁸Details: Weiterführende Vorlesung oder [Fri95]

³⁹**Erinnerung:** $A + B \equiv (A \cup B \text{ mit } A \cap B = \emptyset)$

■ Beispiel:

- Zur Generatormatrix

$$\mathbf{G} = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

ergibt sich die Paritycheckmatrix

$$\mathbf{H} = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

■ Beispiel: (ctd.)

- Das gesendete und empfangene Codewort sowie das Fehlermuster seien

$$\mathbf{c}^T = (1, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$$

$$\mathbf{y}^T = (1, 1, 1, 1, 0, 1, 0)$$

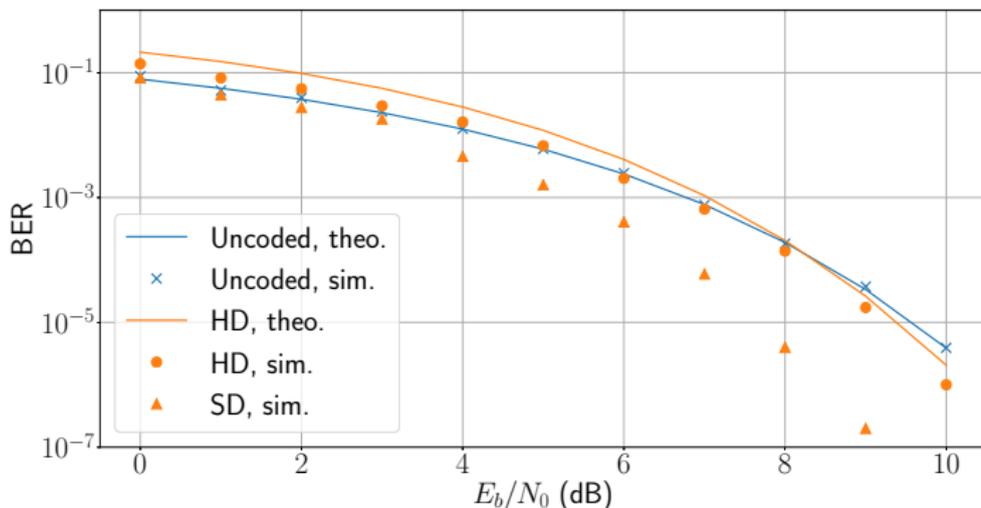
$$\mathbf{e}^T = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

- Die Decodierung berechnet das Syndrom

$$\mathbf{s}^T = \mathbf{y}^T \mathbf{H}^T = (1, 1, 1, 1, 0, 1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, 1, 1, 1)$$

- Da das Syndrom der dritten Spalte von \mathbf{H} entspricht, ist wahrscheinlich das dritte Bit falsch.

- **Beispiel:**⁴⁰ BER bei Hard-Decision und Soft-Decision⁴¹ für den (7, 4)-Hamming-Code bei 100 Fehlern OR 10^7 Bits⁴²

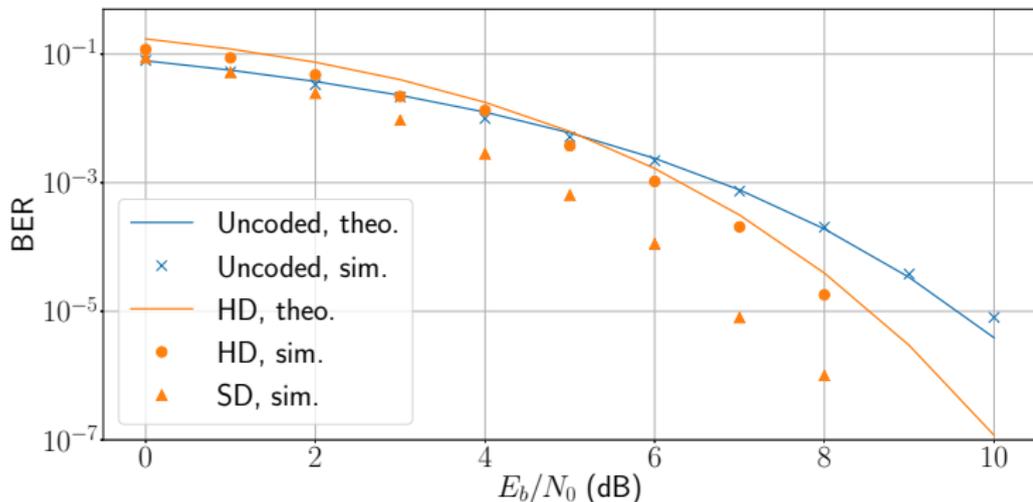


⁴⁰**Datei:** block_coding.ipynb; dort geringere Anzahl von Bits

⁴¹Die asymptotischen Codierungsgewinne sind $G_{HD} \approx 0.58$ (dB) und $G_{SD} \approx 2.34$ (dB).

⁴²Die Approximation der theoretischen Kurve entstammt [Fri95, S. 93].

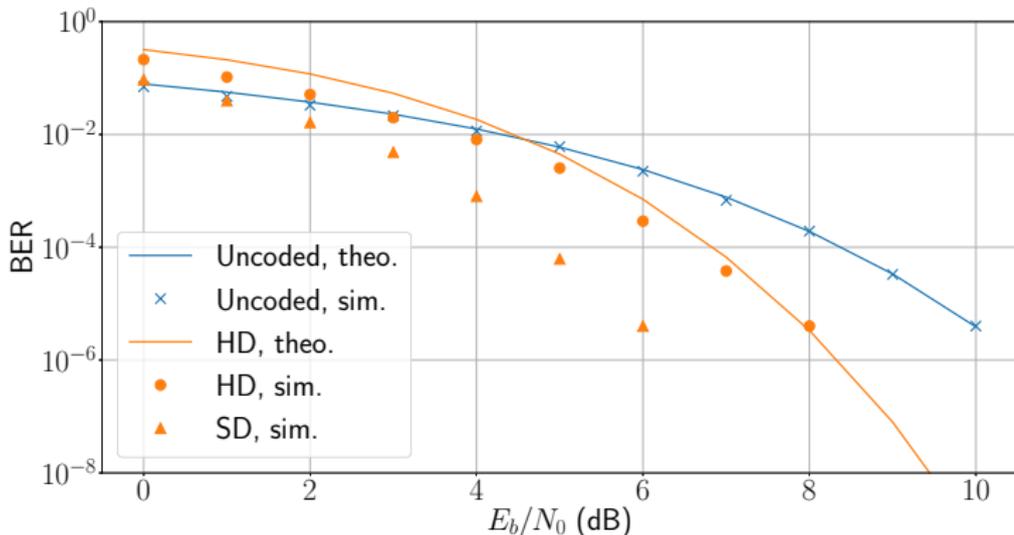
- **Beispiel:** BER bei Hard-Decision und Soft-Decision⁴³ für den (15, 11)-Hamming-Code bei 100 Fehlern OR 10^6 Bits⁴⁴



⁴³Die asymptotischen Codierungsgewinne sind $G_{HD} \approx 1.66$ (dB) und $G_{SD} \approx 3.42$ (dB).

⁴⁴Die Approximation der theoretischen Kurve entstammt [Fri95, S. 93].

- **Beispiel:** BER bei Hard-Decision und Soft-Decision⁴⁵ für den (23, 12)-Golay-Code bei 100 Fehlern OR 10^6 Bits⁴⁶



⁴⁵Die asymptotischen Codierungsgewinne sind $G_{HD} \approx 2.81$ (dB) und $G_{SD} \approx 5.25$ (dB).

⁴⁶Die Approximation der theoretischen Kurve entstammt [Fri95, S. 93].

Definition

Ein linearer (n, k) -Blockcode ist *zyklisch*, wenn durch jede zyklische Verschiebung eines Codewortes wieder ein Codewort entsteht:

$$\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathcal{C} \implies (c_i, c_{i+1}, \dots, c_n, c_1, \dots, c_{i-1})^T \in \mathcal{C}$$

Vereinbarung

Im Folgenden werden lineare, zyklische Codes betrachtet.

Theorem

Für einen linearen, systematischen, zyklischen Code ist in der Generatormatrix $G \in \mathbb{F}_2^{k \times n}$ das Element $(G)_{kn}$ („unten rechts“) gleich 1:

$$G = \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & * \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & 0 & \cdots & * \\ 0 & \cdots & & 1 & \cdots & 1 \end{array} \right)$$

- **Nachweis:** Annahme $(G)_{kn} = 0$; betrachte $d^T = (0, \dots, 0, 1)$. Dann ist⁴⁷ $c^T = (0, \dots, 0, 1 | *, \dots, *, 0)$. Da der Code zyklisch ist, muss auch $c'^T = (0, 0, \dots, 0 | 1, *, \dots, *, 0)$ ein Codewort sein. Widerspruch! ■

⁴⁷Ausnahmesweise wird hier „|“ zur Trennung des Datenworts und der Paritycheckbits verwendet.



■ Beispiel:

- Betrachte die Generatormatrix

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{3 \times 7}$$

- Über $\mathbf{c}^T = \mathbf{d}^T \mathbf{G}$ folgt der Code

$$\mathcal{C} = \{(0000000), (0011101), (0100111), (0111010) \dots \\ \dots (1001110), (1010011), (1101001), (1110100)\},$$

der wie beabsichtigt zyklisch ist.



- **Aufgabe:** Algebraische Beschreibung zyklischer systematischer Codes
- **Ansatz:** Transformiere Generatormatrix in Polynome⁴⁸ mit Koeffizienten in \mathbb{F}_2 , so dass in der rechten Spalte 1 steht und Linksverschiebung einer Multiplikation mit x entspricht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x^6 & 0 & 0 & x^3 & x^2 & x & 0 \\ 0 & x^5 & 0 & 0 & x^2 & x & 1 \\ 0 & 0 & x^4 & x^3 & x^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Die letzte Zeile wird als *Generatorpolynom* des Codes bezeichnet:

$$g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$$

⁴⁸Die Rechnung funktioniert „normal“, nur dass für Koeffizienten die Rechenregeln in \mathbb{F}_2 gelten.



- **Aussage:** Bildung des Codes aus dem Generatorpolynom erfolgt gemäß:
 - Abbildung der Datenworte \mathbf{d} in ein Polynom:

$$\mathbf{d}^T = (d_1 , \dots , d_k)$$

↓

$$d(x) = d_1 x^{k-1} + d_2 x^{k-2} + \dots + d_{k-1} x + d_k$$

- Multiplikation des Datenpolynoms mit dem Generatorpolynom

$$c(x) = d(x) \cdot g(x)$$

- Umwandeln des Codepolynoms in ein Codewort

$$c(x) = c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_{n-1} x + c_n$$

↓

$$\mathbf{c}^T = (c_1 , \dots , c_n)$$

- **Beispiel:** Für das Generatorpolynom $g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$ und das Datenwort $d^T = (1, 0, 1)$ folgt:

- Datenpolynom

$$d(x) = x^2 + 1$$

- Multiplikation mit Generatorpolynom⁴⁹

$$\begin{aligned}d(x)g(x) &= (x^2 + 1) \cdot (x^4 + x^3 + x^2 + 1) \\ &= x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 \\ &= 1x^6 + 1x^5 + 0x^4 + 1x^3 + 0x^2 + 0x^1 + 1\end{aligned}$$

- Rückumwandlung in Codewort

$$c^T = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1)$$

⁴⁹Erinnerung: In \mathbb{F}_2 ist $1 + 1 = 0$.



- **Beobachtung:** Jeder zyklische lineare Code hat ein Generatorpolynom der Form

$$g(x) = x^{n-k} + \dots + 1.$$

Der Grad des Polynoms ist immer $n - k$ und der konstante Koeffizient ist immer 1.

Theorem⁵⁰

Ein Generatorpolynom erzeugt genau dann einen linearen zyklischen (n, k) -Code, wenn es ein Teiler von $x^n + 1$ ist.

⁵⁰Nachweis siehe [Fri95]

- **Beispiel:** Untersucht wird die Existenz von zyklischen $(7, k)$ -Codes
 - Es sind die Teiler von $x^7 + 1$ zu bestimmen
 - Man „erkennt“ die Darstellung

$$x^7 + 1 = (x + 1)(x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1);$$

die verbleibenden Polynome haben hierbei keine Nullstellen in \mathbb{F}_2 mehr; sie sind *irreduzibel*.

- Somit sind zyklische $(7, 1)$, $(7, 3)$, $(7, 4)$, $(7, 6)$ -Codes möglich.
- Ein linearer zyklischer $(7, 3)$ -Code ergibt sich für

$$\begin{aligned}g(x) &= (x + 1)(x^3 + x + 1) \\ &= x^4 + x^2 + x + x^3 + x + 1 \\ &= x^4 + x^3 + x^2 + 1\end{aligned}$$



■ Konstruktion zyklischer Codes:

- Festlegen der gewünschten Korrekturfähigkeit t .
- Hamming-Ungleichung

$$2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^t \binom{n}{i}$$

liefert *mögliche Paare* (n, k) , welche die Korrekturfähigkeit t erreichen können.

- Bestimme einen Teiler von $x^n + 1$ mit Grad $n - k$ und wähle diesen als Generatorpolynom.
- Berechne die Generatormatrix G .
- Prüfen, ob der Code auch die gewünschten Eigenschaften besitzt. (**Hinweis:** Die Hamming-Ungleichung ist notwendig, nicht hinreichend!)

Offene Frage: Wie erstellt man G aus $g(x)$?

Anhang C: Generatormatrix zyklischer Blockcodes

- **Bekannt:** Ist der Code linear, systematisch und zyklisch, so hat die Generatormatrix die Gestalt

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & \cdots & 0 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & 0 & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & \mathbf{1} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} x^{n-1} & \cdots & 0 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & 0 & \cdots & * \\ 0 & \cdots & x^{n-k} & \cdots & \mathbf{1} \end{array} \right)$$

- Das Generatorpolynom

$$g(x) = x^{n-k} + g_1 x^{n-k-1} + \cdots + g_{n-k-1} x + 1, \quad g_i \in \mathbb{F}_2$$

steht hierbei „rechtsbündig“ in der letzten Zeile.

Anhang C: Generatormatrix zyklischer Blockcodes

- **Ansatz:** Bilde

$$G' = \begin{pmatrix} x^{k-1}g(x) \\ \vdots \\ x^2g(x) \\ xg(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$$

- Codierung gemäß

$$c(x) = d(x)g(x) = d_1x^{k-1}g(x) + d_2x^{k-2}g(x) + \dots + d_kg(x)$$

liefert ein zyklisches Polynom mit den Koeffizienten c_1, \dots, c_{n-1} .

- **Aber:** Die erzeugten Codewörter sind nicht systematisch.⁵¹

⁵¹ **Übung:** Führen Sie die Konstruktion für $g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$ durch.

- **Beispiel:** Betrachte wieder den $(7, 3)$ -Code mit $g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$
 - Die nicht systematische Generatormatrix lautet

$$G' = \begin{pmatrix} x^6 & x^5 & x^4 & 0 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^5 & x^4 & x^3 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x^4 & x^3 & x^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■ Konstruktion systematischer zyklischer Codes:

- Festlegen von t , daraus (n, k) und schließlich $g(x)$ wie bekannt
- Schreibe $g(x)$ in die letzte Zeile von G
- Erzeuge die $(k - 1)$ -te Zeile durch Verschiebung der Einträge der k -ten Zeile um eins nach links; mathematisch: $xg(x)$
- Kommt das Monom x^{n-k} vor, so addiere $g(x)$:

$$(k - 1)\text{-te Zeile von } G = \begin{cases} xg(x), & \text{Koeffizient von } x^{n-k} = 0 \\ xg(x) + g(x), & \text{Koeffizient von } x^{n-k} = 1 \end{cases}$$

Somit wird „eine evtl. 1 über der bisherigen 1 vermieden“

- Für die $(k - 2)$ -te Zeile verschiebe die $(k - 1)$ -te Zeile eins nach links; tritt der Koeffizient $n - k$ auf, so addiere $g(x)$.
- etc. etc.

Anhang C: Generatormatrix zyklischer Blockcodes

- **Beispiel:** Betrachte wieder den $(7, 3)$ -Code mit $g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$
 - Obiger Mechanismus ergibt:

$$G = \begin{pmatrix} x[xg(x) + g(x)] \\ xg(x) + g(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$$

- Eingesetzt:

$$\begin{pmatrix} x^6 & 0 & 0 & x^3 & x^2 & x & 0 \\ 0 & x^5 & 0 & 0 & x^2 & x & 1 \\ 0 & 0 & x^4 & x^3 & x^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Anhang C: Generatormatrix zyklischer Blockcodes

- **Konstruktion systematischer zyklischer Codes:** (Alternative)
 - Festlegen von t , daraus (n, k) und schließlich $g(x)$ wie bekannt
 - Schreibe $g(x)$ in die letzte Zeile von G
 - Erzeuge die Generatormatrix

$$G' = \begin{pmatrix} x^{k-1}g(x) \\ \vdots \\ x^2g(x) \\ xg(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$$

- Forme die Matrix durch Zeilenoperationen⁵² so um, dass vorne die Einheitsmatrix steht. Dann steht hinten die Matrix zur Konstruktion der Prüfbits:

$$G' \rightarrow G = [I_k, P]$$

⁵²Wie im Gaußalgorithmus

- Erzeugung zyklischer Codes

- Voraussetzungen

$$\text{Datenwort } \mathbf{d} \rightarrow d(x) = d_1x^{k-1} + d_2x^{k-2} \cdots + d_{k-1}x + d_k$$

$$\text{Codewort } \mathbf{c} \rightarrow c(x) = c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} \cdots + c_{n-1}x + c_n$$

- $d(x)$ hat max. den Grad $k - 1 \implies x^{n-k}d(x)$ hat max. den Grad $n - 1$
 - Anwendung des Euklid'schen Algorithmus („Division mit Rest“) auf die Division von $x^{n-k}d(x)$ durch das Generatorpolynom $g(x)$ ergibt:

$$x^{n-k}d(x) = q(x)g(x) + r(x), \quad \text{grad}(r(x)) \leq n - k - 1$$

Damit ist $x^{n-k}d(x) + r(x) = q(x)g(x)$ durch $g(x)$ teilbar.⁵³

⁵³Bedenke, dass in \mathbb{F}_2 Subtraktion und Addition äquivalent sind.



- Erzeugung zyklischer Codes (ctd.)
 - Die Zeilen der Generatormatrix sind stets Polynome, die mit $g(x)$ multipliziert werden \implies alle Codewörter sind von der Form

$$c(x) = a(x)g(x), \quad \text{grad}(a(x)) \leq k - 1$$

- Somit ist $x^{n-k}d(x) + r(x) = q(x)g(x)$ ein Codewort; da x^{n-k} lediglich ein „nach links Verschieben“ der Koeffizienten bewirkt, sind die Checkbits des Codes gerade

$$r(x) = \text{Rest} \left\{ x^{n-k}d(x)/g(x) \right\}$$

- **Beispiel:** Betrachte das Generatorpolynom $g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$ eines $(7, 3)$ -Codes.
 - Nach Beispielrechnung ist $g(x)$ ein Teiler von $x^7 + 1$, weshalb $g(x)$ das Generatorpolynom eines zyklischen Codes ist.
 - Betrachtet man den Datenblock $\mathbf{d}^T = (0, 0, 1)$, so ergibt sich $d(x) = 1$, $x^{n-k}d(x) = x^{7-3} \cdot 1 = x^4$ und schließlich

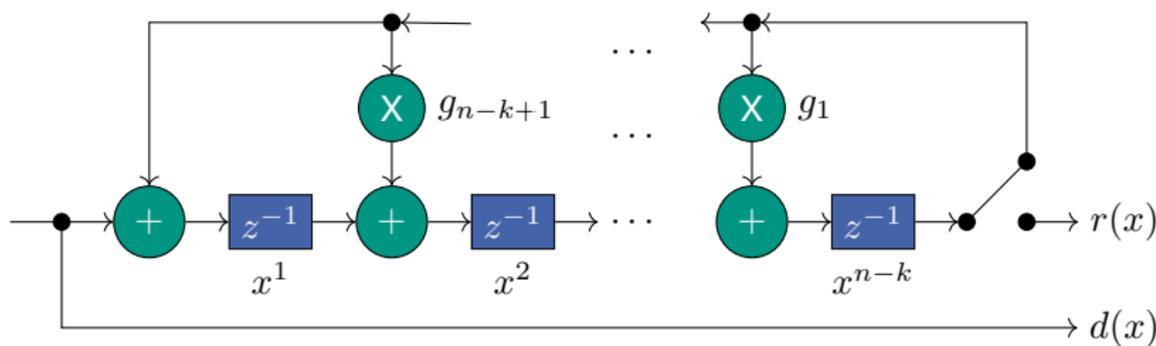
$$\begin{aligned}r(x) &= \text{Rest} \left\{ x^{n-k}d(x)/g(x) \right\} \\ &= \text{Rest} \left\{ x^4/(x^4 + x^3 + x^2 + 1) \right\} \\ &= x^3 + x^2 + 1.\end{aligned}$$

Daraus folgen die Paritycheckbits 1, 1, 0, 1 und das Codewort $\mathbf{c}^T = (0, 0, 1, 1, 1, 0, 1)$.

- **Bisher:** Konstruktion zyklischer, systematischer Codes durch
 - Festlegen von $g(x)$
 - Berechnung der Codierung durch
 - Konstruktion von G
 - Rechnen mit Polynomen und Polynomdivision

- **Aber:** Wie kann dies effizient realisiert werden?

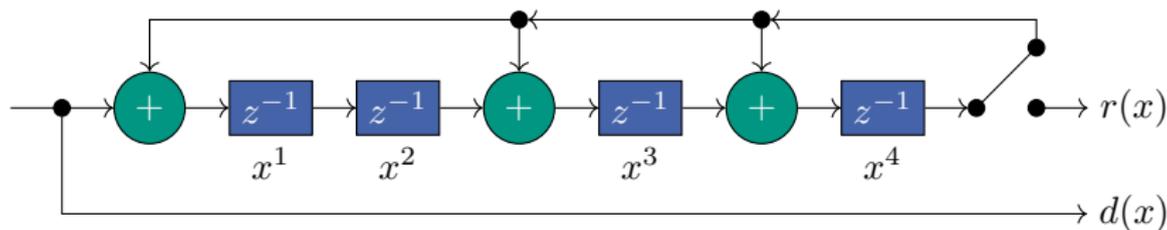
- **Praktisch:** Realisierung der Checkbits durch ein *linear rückgekoppeltes Schieberegister*⁵⁴
 - Polynomkoeffizienten beschreiben Rückkopplungen
 - Anfangsbelegung der Zellen mit 0
 - „Durchschieben“ der Datenbits
 - Wenn das letzte Datenbit das Register nach $n - k + 1$ Takten verlässt, stehen in den Zellen die Paritycheckbits



⁵⁴Engl.: *Linear Feedback Shift Register, LFSR*

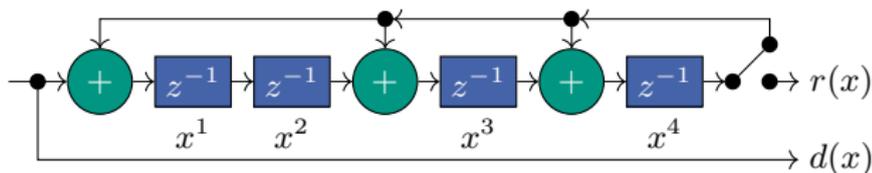
■ Beispiel:

- Für das Generatorpolynom $g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$ ergibt sich das folgende LFSR:



■ Beispiel: (ctd.)

■ Erinnerung:



- Die Belegung des LFSR für das Datenwort $\mathbf{d} = (0, 0, 1)^T$ ergibt letztlich das bekannte Ergebnis

Zellennummer	x	x^2	x^3	x^4
Bits starten	0	—	—	—
	0	0	—	—
Letztes Bit eingelesen	1	0	0	—
	0	1	0	0
	0	0	1	0
Letztes Datenbit verlässt LFSR	0	0	0	1
Belegung nach Verlassen = Checkbits	1	0	1	1

4 Kanalcodierung

- Grundlegende Betrachtungen
- Blockcodierung
- **Faltungscodierung**
 - Zur Faltungscodierung
 - Darstellungen des Encoders
 - Decoder
 - Der Viterbi-Algorithmus
 - Korrektureigenschaften von Faltungscodes
- Ausblick
- Beispiele
- Lernziele
- Literatur



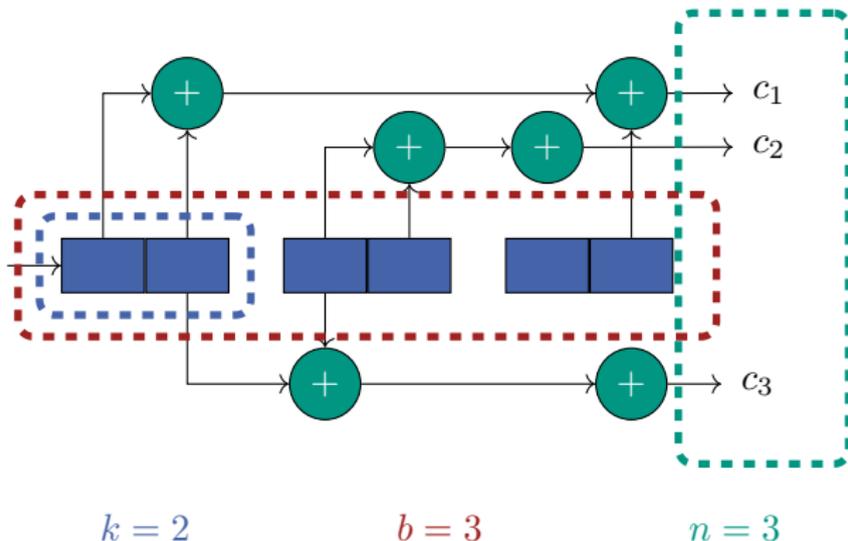
- **Grundidee:** Eine Faltungscodierung ergibt sich durch ein Schieberegister, das aus einem Eingangsstrom von Bits einen Ausgangsstrom von Bits erzeugt.
- **Kenngößen:** Eine Faltungscodierung ist festgelegt durch: (siehe Bild auf nächster Folie)
 - Die Zahl k der pro Takt eingehenden Bits
 - Die Zahl n der pro Takt ausgehenden Bits
 - Die Anzahl b der internen Speicherblöcke, auch *Eindringtiefe* genannt

Hieraus ergeben sich die Begriffe:

- *Einflusslänge:* $L = b \cdot k$
- *Coderate:* $r = k/n$
- *Systematischer Code:* Datenbits treten direkt in der Codebitfolge auf.

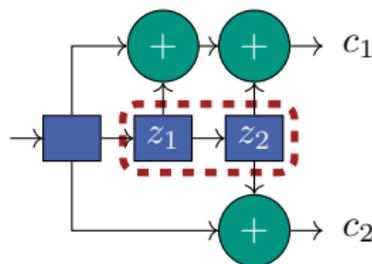


- **Graphisch:** Darstellung eines Faltungscodes mit $k = 2$, $b = 3$ und $n = 3$
⇒ Coderate $r = 2/3$, Einfluslänge $L = 6$



■ Beispiel:

- Kenngrößen: $k = 1, b = 3, n = 2,$
 $r = 1/2, L = 3$
- **Zustand:** (z_1, z_2)
- Anfangsbelegung $0, 0, 0$



- Datenfolge

0 1 1 0 1 0 ...

ergibt die Zustandsfolge:

(0)00 (1)00 (1)10 (0)11 (1)01 (0)10 ...

und damit die Ausgangsfolge⁵⁵

00 11 01 01 00 10 ...

⁵⁵Achtung: Zuerst wird das obere Bit ausgegeben; „linkes Bit kommt früher“.

■ Ergänzung:

- Offensichtlich ist der Faltungscoder charakterisiert, indem man – neben den Parametern k, b, n – die XOR-Verknüpfungen pro Ausgangsbit angibt.
- In binärer Rechnung (\mathbb{F}_2) ist somit jede Registerzelle entweder beteiligt (1) oder unbeteiligt (0).
- Durch „Hinschreiben“ der Einflüsse ist in obigem Beispiel das Codebit 1 erzeugt durch 111 und das Codebit 2 erzeugt durch 101.
- Darstellung der Einflüsse als Polynom oder als Oktalwert ergibt:

$$\mathbf{G} = (g_1(x), g_2(x)) = (1 + x + x^2, 1 + x^2)$$

$$\mathbf{G} = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) = (7_8, 5_8)$$



Hinweis

- Gegenüber [Jon11] besitzen die Zustandsbits eine vertauschte Reihenfolge.
- Diese Änderung wurde gewählt, da auf diese Weise
 - 1 der Zustand der „Draufsicht“ entspricht
 - 2 das aktuelle Bit leichter als z_0 interpretiert werden kann
 - 3 die Zustandsnummer (Index) somit⁵⁶ den seit Eintreten vergangenen Taktzyklen entspricht

⁵⁶ ... ähnlich einer FIR-Filterung...



■ *Schieberegister:*

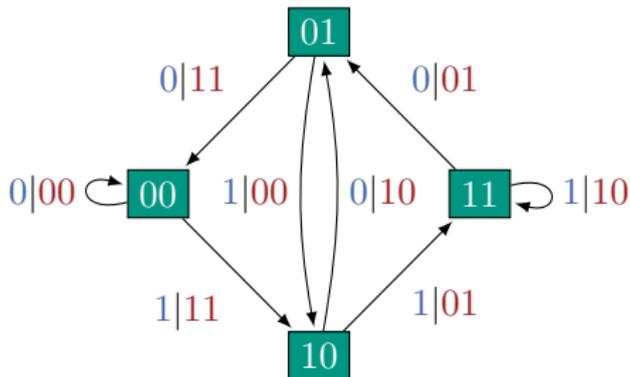
- Hatten wir gerade kennengelernt
- Fluss der Bits durch die Register; Berechnung der Codebits durch XOR-Verknüpfungen

■ *Codebaum:*

- Darstellung der Ausgabe in Abhängigkeit von Eingangsbits (Bild siehe [Jon11])
- Komplexität mit Länge der Eingangsfolge sehr schnell wachsend

■ Zustandsdiagramm.⁵⁷

- Faltungscoder besteht aus b Blöcken, von denen der erste („linke“, „Index 0“) das aktuelle Bit enthält $\implies 2^{b-1}$ mögliche Zustände (z_1, \dots, z_{b-1})
- **Zustand** (Registerbelegung)
- **Eingangsbits** bestimmen Zustandsübergänge
- Erzeugte **Ausgangsbits** (Codebits)

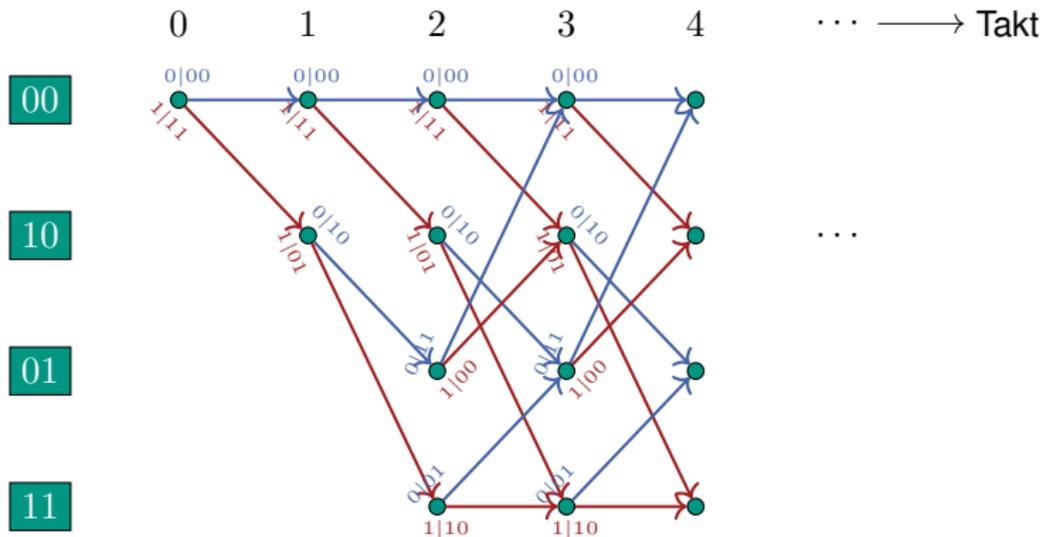


⁵⁷Das dargestellte Diagramm entsteht bei dem bereits vorher verwendeten Beispiel.

Darstellungen des Encoders

■ Trellis.⁵⁸

- Entwickelt die Zustände über der Zeit (dem Takt)
- Bezeichnung der Übergänge wie beim Zustandsdiagramm



⁵⁸Das dargestellte Diagramm entsteht bei dem bereits vorher verwendeten Beispiel.

■ Hinweis:

- Obiges „Standardbeispiel“ und die abgeleiteten Darstellungen haben $k = 1$ und damit $L = b$ verwendet.
- Für $k > 1$ besteht der Eingang aus einem k -stelligen Bitwort. Dementsprechend erhöht sich die Zahl der Übergänge von 2 wie in den bisherigen Darstellungen auf 2^k .



■ Beobachtung:

- Ein Decoder bildet Codefolgen in Datenfolgen ab.
- Blockdecodierung bildet n Codebits auf k Datenbits ab. \implies *blockweise Entscheidung*
- Bei *Faltungsdecodierung* entstehen per Konstruktion Abhängigkeiten; „alte“ Datenbits haben Einfluss auf aktuelle Codebits.
 \implies Entscheidung für die gesamte Folge

- **Aufgabe:** Bei der Faltungsdecodierung muss aus der vom Demodulator erhaltenen Codebitfolge y die Datenbitfolge x bestimmt werden.
- **Annahme:** Im Folgenden gehen wir davon aus, dass die Folgen dieselbe Länge N haben.



■ Bemerkungen:

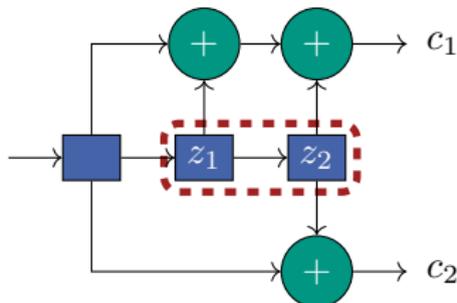
- Nach Konstruktion ist die Anzahl der möglichen Datenfolgen der Länge N gerade 2^N , wächst also exponentiell mit der Folgenlänge.
- Der Wertebereich von \mathbf{y} differiert – wie bei Blockdecodierung – je nach Verfahren:
 - $\mathbf{y} \in \{0, 1\}^N$: Hier erhält der Decodierer vom Demodulator bereits Bitfolgen bzw. der Demodulator entscheidet bereits auf Bits. Man spricht von *Hard-Decision*.
 - $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$: Der Demodulator trifft keine Entscheidung, sondern wandelt „lediglich“ das Sendesignal in reelle Werte um. Man spricht von *Soft-Decision*.
- **Frage:** Nach welchem Kriterium soll der Decoder entscheiden?
- **Antwort:** Es gelten die „Standard-Entscheidungskriterien“ MAP und ML!

- (Idealer) ML-Detektor berechnet ML-Schätzer für die Folge: *Maximum Likelihood Sequence Estimation, MLSE* \implies Berechnung der Abstände von Folgen der Länge N
- **Problem:** Aufwand (Anzahl der zu vergleichenden Folgen) steigt exponentiell mit der Folgenlänge
- **Konsequenz:** Faltungscodes waren de-facto nicht einsetzbar

- **Durchbruch:** *Viterbi-Algorithmus*, beschrieben in [Vit67]
- **Entscheidend:** Es müssen nicht mehr 2^N Pfade verglichen werden, sondern 2^{L-1} , wobei L die Einflusslänge des Faltungscodierers bezeichnet.

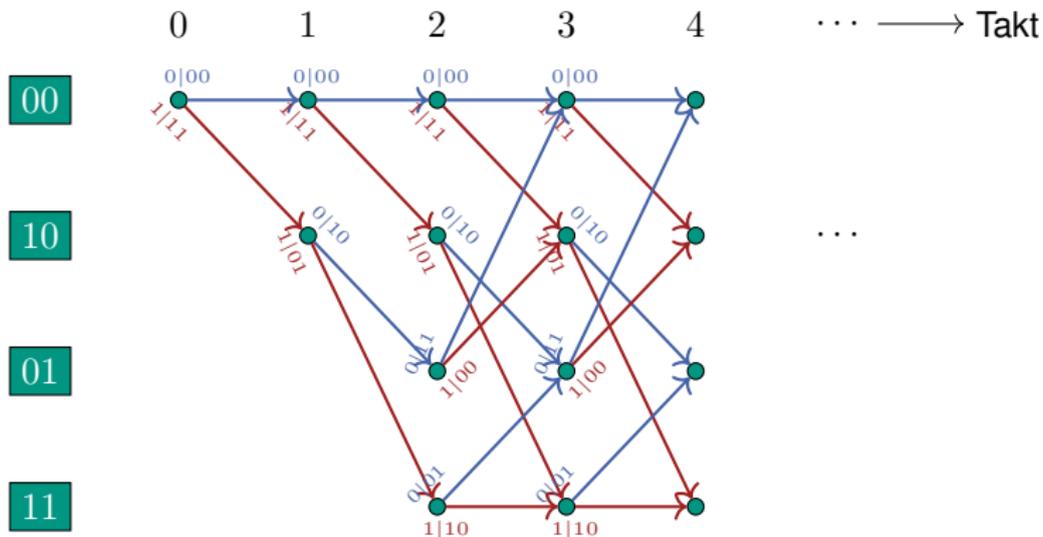


- Funktionsweise des Viterbi-Algorithmus wird anhand des vorherigen Beispiels verdeutlicht
- **Erinnerung:**



■ Beobachtungen zum Trellis (s.u.):

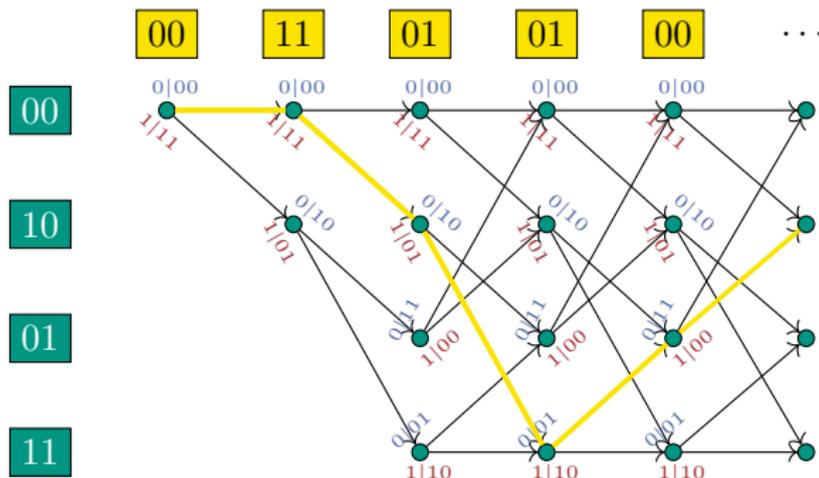
- Ab Takt 3 ist der Trellis „eingeschwungen“
- In jedem Zustand kommen zwei Pfade an



- Darstellung des Prinzips bei Hard-Decision
- **Decodierprinzip:** Verfolge den Pfad im Trellis, der kleinsten Abstand zur beobachteten Folge besitzt.
- **Beobachtungen:**
 - Besitzt einer der beiden ankommenden Pfade größeres Gewicht, so wird er später immer größeres Gewicht als der „Mitankömmling“ besitzen.
 - Besitzen zwei Pfade identisches Gewicht, so haben die zugehörigen Folgen identische Wahrscheinlichkeit (siehe Betrachtungen auf Folien 44, 46) und bzgl. Fehlerwahrscheinlichkeit sind beide gleichwertig.

Der Viterbi-Algorithmus

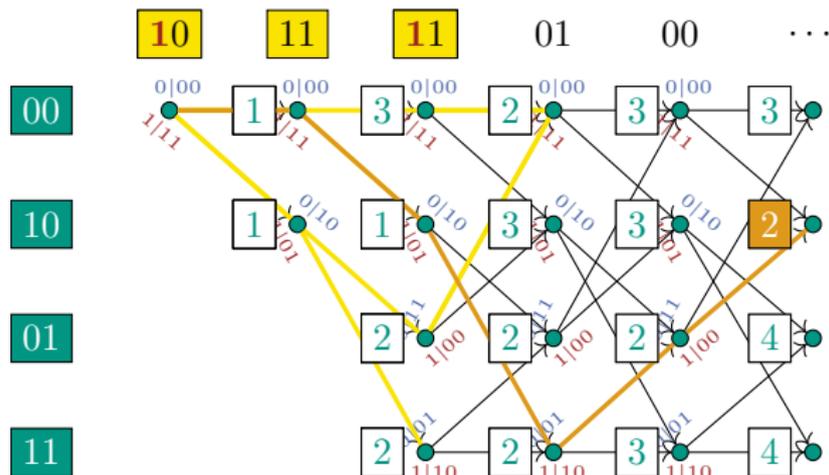
- 1. Fall: Fehlerfreie Übertragung; Codebitfolge 00 11 01 01 00
 - Zu decodierende Sendefolge ist⁵⁹ 011010
 - Durch Nachverfolgung des Pfades im Trellis ergibt sich:
 - Decodiert: 0, 1, 1, 0, 1



⁵⁹ **Erinnerung:** Für die Beschreibung der Ausgaben gilt: „Weiter links ist zeitlich früher“



- 2. Fall: Fehlerbehaftete Übertragung; Codebitfolge **1** 0 11 **1** 1 01 00
 - Zu decodierende Sendefolge ist 011010
 - Durch Nachverfolgung des Pfades im Trellis ergibt sich:
 - Decodiert: 0, 1, 1, 0, 1



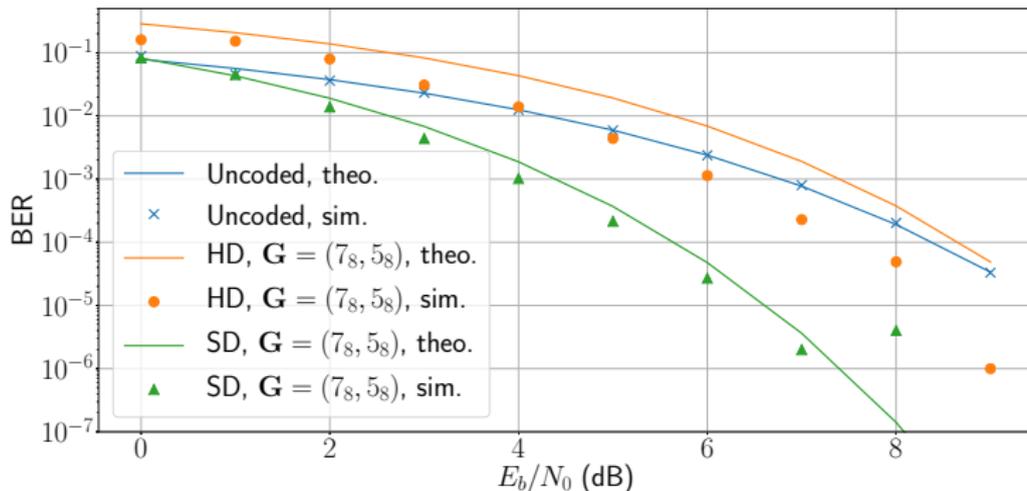
■ Bemerkungen:

- Nach Berechnung der Metrik verfolgt man den korrekten Pfad von hinten nach vorn.
- Der plötzliche Abbruch der Folge kann Fehler verursachen. Deshalb werden die Folgen häufig/meist *terminiert*, indem nach Ende der Folge noch so viel 0-en gesendet werden bis der Decoder den Nullzustand erreicht.
- Bei Soft-Decision funktioniert der Viterbi-Algorithmus prinzipiell gleich; es werden lediglich die Ausgänge des Matched-Filters direkt an den Viterbi-Decoder gegeben. In diesem Fall muss statt der Hamming-Distanz die Euklid'sche Distanz verwendet werden.



Korrektureigenschaften von Faltungscodes

- **Beispiel:**⁶⁰ BER⁶¹ bei HD und SD für $r = 1/2$ bei $G = (7_8, 5_8)$ mit 10^2 Fehlern OR 10^6 Bits



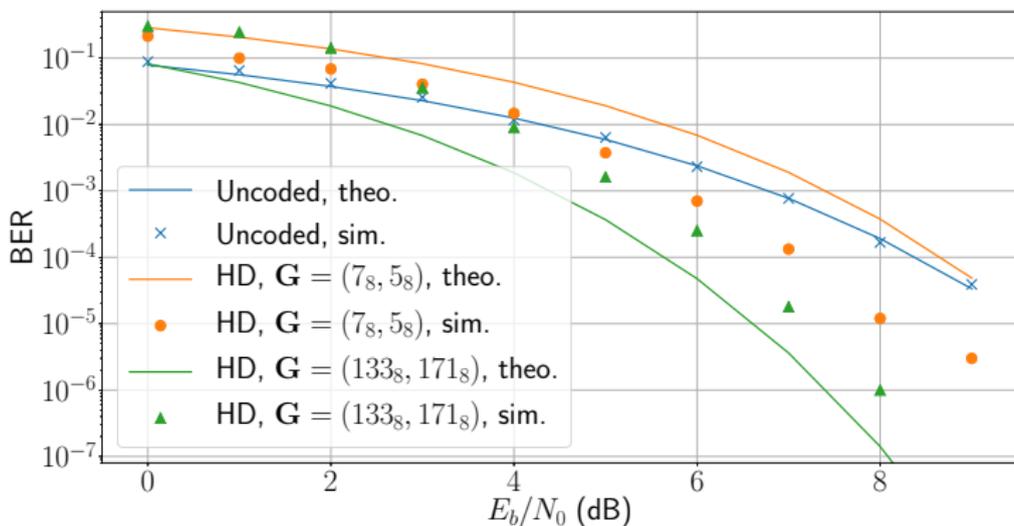
⁶⁰ **Datei:** convolutional_coding.ipynb; dort geringere Anzahl von Bits

⁶¹ Die BER-Approximationen entstammen [Fri95, S.287/288].



Korrektureigenschaften von Faltungscodes

- **Beispiel:** BER bei HD für $r = 1/2$, $G_1 = (7_8, 5_8)$ $G_2 = (131_8, 171_8)$, inkl. asymptotischer BER⁶² mit 10^2 Fehlern OR 10^6 Bits

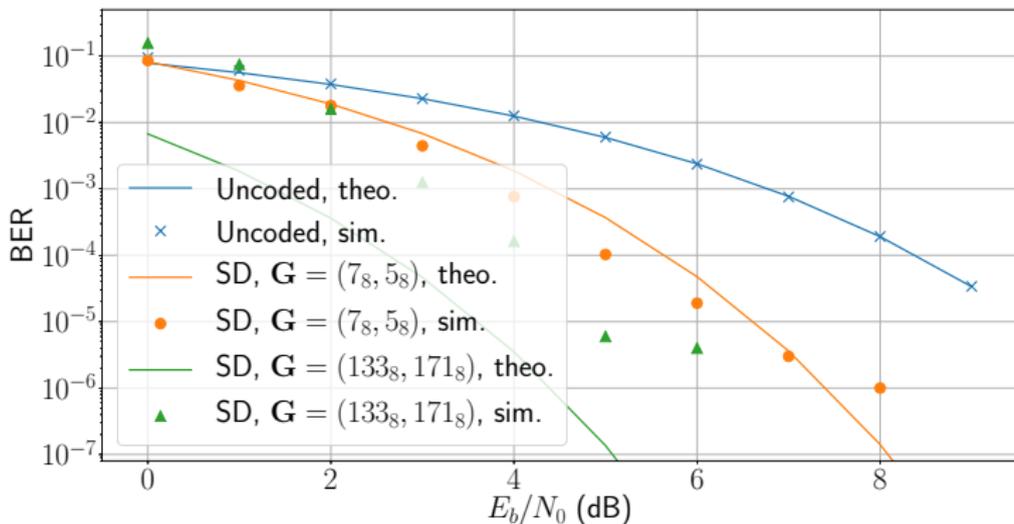


⁶²Die BER-Approximationen entstammen [Fri95, S.287/288].



Korrektureigenschaften von Faltungscodes

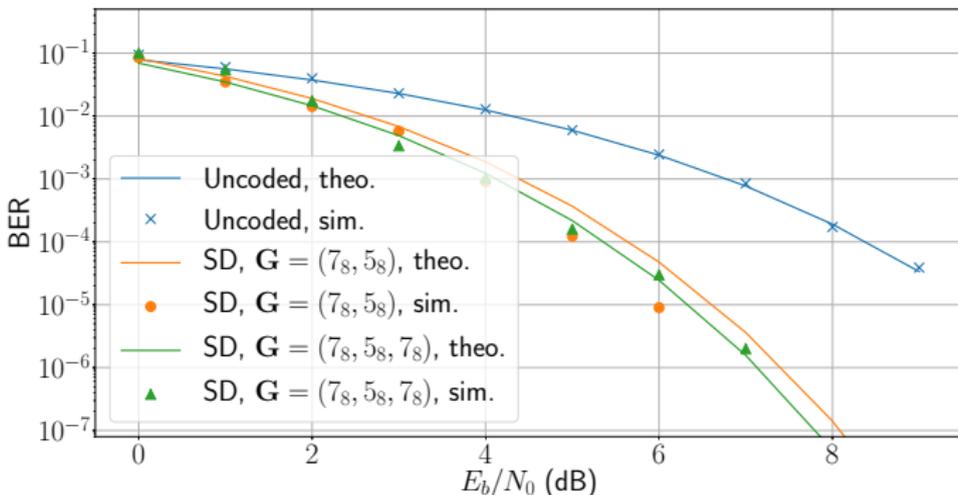
- **Beispiel:** BER bei SD für $r = 1/2$, $G_1 = (7_8, 5_8)$ $G_2 = (131_8, 171_8)$, inkl. asymptotischer BER⁶³ mit 10^2 Fehlern OR 10^6 Bits



⁶³Die BER-Approximationen entstammen [Fri95, S.287/288].

Korrektureigenschaften von Faltungscodes

- **Beispiel:** BER bei SD für $r = 1/2$, $G_1 = (7_8, 5_8)$ und $r = 1/3$, $G_2 = (7_8, 5_8, 7_8)$ inkl. asymptotischer BER⁶⁴ mit 10^2 Fehlern OR 10^6 Bits



⁶⁴Die BER-Approximationen entstammen [Fri95, S.287/288].



■ Bemerkungen:

- Vergleich verschiedener Verfahren durch Betrachtung des für eine bestimmte Fehlerwahrscheinlichkeit benötigten SNRs. \implies Soft-Decision erzielt gegenüber Hard-Decision einen *Gewinn von ca. 2.2 dB in praktischen Bereichen und 3 dB im Asymptotischen*. [Fri95, S. 290]
- Die resultierende BER sinkt mit der Einflusslänge und sinkender Coderate. Dafür wird ein höherer Codier- und Decodier-Aufwand benötigt.
- Die BER ist nicht nur abhängig von der Anzahl der Fehler, sondern auch von deren Positionen.

4 Kanalcodierung

- Grundlegende Betrachtungen
- Blockcodierung
- Faltungscodierung
- **Ausblick**
- Beispiele
- Lernziele
- Literatur



- Neben den eingeführten Prinzipien für Block- und Faltungscodes gibt es eine Vielzahl weiterer Methoden/Verbesserungen
- Für eine detaillierte Beschreibung siehe [PS08], [Fri95] oder [RU08].
- **Hinweis:** Die folgenden Begrifflichkeiten dienen der „Allgemeinbildung“ und sind nicht klausurrelevant.

- *Punktierung*: ([Fri95])
 - Ausgangspunkt: *Mutter-Code* der Rate $r = 1/n$
 - Streichen/nicht-Übertragen mancher Bits an bekannten Stellen
 - Erlaubt höhere Coderaten
 - Wiedergewinnung gestrichener Bits am Empfänger durch Einfügen von Dummies und Fehlerkorrektur

- *Bündelfehler/Burstfehler* ([Fri95])
 - Treten auf, wenn eine längere Sequenz von Bits verfälscht wird.
 - Lösungen:
 - Für Bündelfehler optimierte Codierung (*Reed-Solomon-Codes*)
 - *Interleaver*⁶⁵

⁶⁵Erklärung des Interleaver-Prinzips: Tafel

- *Verkettete Codes:* ([Fri95])
 - Wichtige Eigenschaften: Serielle Anwendung von Codes (*innerer Code* und *äußerer Code*)
 - Innerer Code (näher am Kanal) sorgt dafür, dass der äußere Code einen deutlich verbesserten Kanal sieht
 - Äußerer Code könnte beispielsweise auf die Beseitigung verbliebener Bündelfehler optimiert sein
 - Hoher Aufwand; „sensibles Zusammenwirken“

- *Turbo Codes:* ([BGT93])
 - Wichtige Eigenschaften: Systematischer Faltungscode, Verknüpfung von Codierungen, iterative Decodierung
 - Parallele Verknüpfung zweier Faltungscores über einen Interleaver
 - Iteratives Decodieren, indem die beiden Decoder Information austauschen (Stichwörter: extrinsische und intrinsische Information, EXIT-Chart); Performance verbessert sich mit Anzahl der Iterationen

- *Low Density Parity Check-Codes:* ([Gal63])
 - Blockcode mit gering besetzter Paritycheck-Matrix
 - Decodierung über Tanner-Graphen

4 Kanalcodierung

- Grundlegende Betrachtungen
- Blockcodierung
- Faltungscodierung
- Ausblick
- **Beispiele**
- Lernziele
- Literatur

- Faltungscodierung (FC) mit

$$g_1(x) = 1 + x + x^3 + x^4$$

$$g_2(x) = 1 + x^3 + x^4$$

mit Rate $r = 1/2$ bei Gedächtnislänge 4, vgl. [Mol11],

- Einteilung der Bit in Wichtigkeitsklassen: Class Ia mit Fehlererkennung und FC, class Ib mit FC, class II ohne alles
- Letztlich entstehen 456 Bit (aus 260), was genau 4 Bursts zu 114 Bit entspricht \implies notwendige Datenrate $456 / 20 \text{ ms} = 22.8 \text{ kbit/s}$
- FC besser für Einzelfehler geeignet \implies Interleaver verteilt 456 Bit über 8 Bursts



- Faltungscodierung (FC) mit

$$g_1(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^8$$

$$g_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^5 + x^7 + x^8$$

mit Rate $r = 1/2$ bei Gedächtnislänge 8 bis 32 kbit/s für allg. Kanäle, Rate $1/3$ für „Dedicated Channels“; vgl. [Mol11] für die Rate $1/3$ Polynome

- Turbo-Codes ab 32 kbit/s: systematischer Rate $1/3$ -Code; Codierung durch rekursive lineare Schieberegister⁶⁶ der Einflusslänge 3

⁶⁶Rückkopplung der Ausgangsbits

- Faltungscodierung für Kontrollkanäle, Rate 1/3, Einflusslänge 7; Polynome

$$g_1(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^5 + x^6$$

$$g_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^6$$

$$g_3(x) = 1 + x + x^2 + x^4 + x^6$$

- Turbo-Codes für Datenkanäle, Rate 1/3, rekursive lineare Schieberegister mit Einflusslänge 3
- Fehlererkennung mit Cyclic-Redundancy-Check (CRC) der Länge 24
- Hybrid ARQ, HARQ

4 Kanalcodierung

- Grundlegende Betrachtungen
- Blockcodierung
- Faltungscodierung
- Ausblick
- Beispiele
- **Lernziele**
- Literatur



- Die folgende Aufstellung fasst die zentralen Punkte zusammen.
- Es wird aufgezeigt, welche Punkte nach Bearbeitung des Kapitels klar sein sollten.
- **Hinweise:**
 - Die Auflistung ist nicht vollständig, sondern führt die wichtigsten Aussagen auf; nicht erwähnte Inhalte sind dennoch bedeutsam.
 - Oft enthalten die Nachweise wichtige Ideen; diese also nicht vernachlässigen.
 - Stets versuchen, Gleichungen in Verbindung mit Interpretationen und Anwendungen zu sehen
 - Des weiteren sollten alle kleinen nützlichen Ergänzungen verstanden sein.
 - Es ist immer eine gute Idee, etwas Gelerntes im Rechner umzusetzen. Dies hilft beim Verständnis und schärft das Bewusstsein für mögliche Probleme.

Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- Grundaufgabe der Kanalcodierung
- Rechnen in \mathbb{F}_2
- SNR-BER und Codierungsgewinn
- (n, k) -Code, Coderate, Codewörter
- Idee der Berechnung von Fehlerwahrscheinlichkeiten
- Linearer Code und Matrix-Vektordarstellung



Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- Systematische Codes
 - Hamming-Abstand und Korrekturfähigkeit
 - Syndrom
 - Hamming-Ungleichung
- Zyklische Codes
 - Eigenschaften und Existenz (Teiler von ...)
 - Zusammenhang Matrizen und Polynome
 - Konstruktion aus $g(x)$ (Matrizen, Polynom und -division)
 - Realisierung durch Schieberegister

Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- Grundidee der Faltungscodierung
- Parameter eines Faltungscodierers (n, k, b, L, r)
- Darstellung eines Faltungscodierers als Schieberegister, Zustandsdiagramm und Trellis
- Hard-Decision und Soft-Decision
- Entscheidungskriterien MAP und ML und deren Zusammenhänge und Auswirkungen (Abstandsmaße)
- Viterbi-Algorithmus
- Diskussion von Bündelfehlern, Interleaver

4 Kanalcodierung

- Grundlegende Betrachtungen
- Blockcodierung
- Faltungscodierung
- Ausblick
- Beispiele
- Lernziele
- **Literatur**



- [Jon11] F. Jondral, *Nachrichtenübertragung*, Schlembach, 4. Auflage, 2011
- [Fri95] B. Friedrichs, *Kanalcodierung*, Springer, 1995
- [PS08] J. Proakis, M. Salehi, *Digital Communications*, McGraw-Hill, 2008
- [Vit67] A. J. Viterbi, *Error Bounds for Convolutional Codes and an Asymptotically Optimum Decoding Algorithm*, IEEE Transactions on Information Theory, Vol.13, 1967, pp 260-269
- [RU08] T. Richardson, R. Urbanke, *Modern Coding Theory*, Cambridge University Press, 2008
- [BGT93] C. Berrou, A. Glavieux and P. Thitimajshima, *Near Shannon limit error-correcting coding and decoding: Turbo-codes. 1*, Communications, 1993. ICC '93 Geneva. Technical Program, Conference Record, IEEE International Conference on, Geneva, 1993, pp. 1064-1070 vol.2.
- [Gal63] R. G. Gallager, *Low-Density Parity-Check Codes*, M.I.T. Press Classic Series, Cambridge MA, 1963 (M.I.T. Press research monographs 21)



- [Gol05] A. Goldsmith, *Wireless Communications*, Cambridge University Press, 2005
- [Mol11] A. Molisch, *Wireless Communications*, Wiley, 2011

Nachrichtentechnik I – Theorie und Praxis der Nachrichtenkanäle

Holger Jäkel

Communications Engineering Lab (CEL)



- 5 Praxis der Nachrichtenkanäle
 - Praktische Gesichtspunkte
 - Die E_b/N_0 -BER-Ebene
 - Die Shannon-Kapazität
 - Die Nyquistbandbreite
 - Fadingkanäle
 - Lernziele
 - Literatur

- Folgende Diskussionen erfolgen gemäß¹

[Jon11]: F. Jondral, *Nachrichtenübertragung*, Schlembach, 4. Auflage, 2011

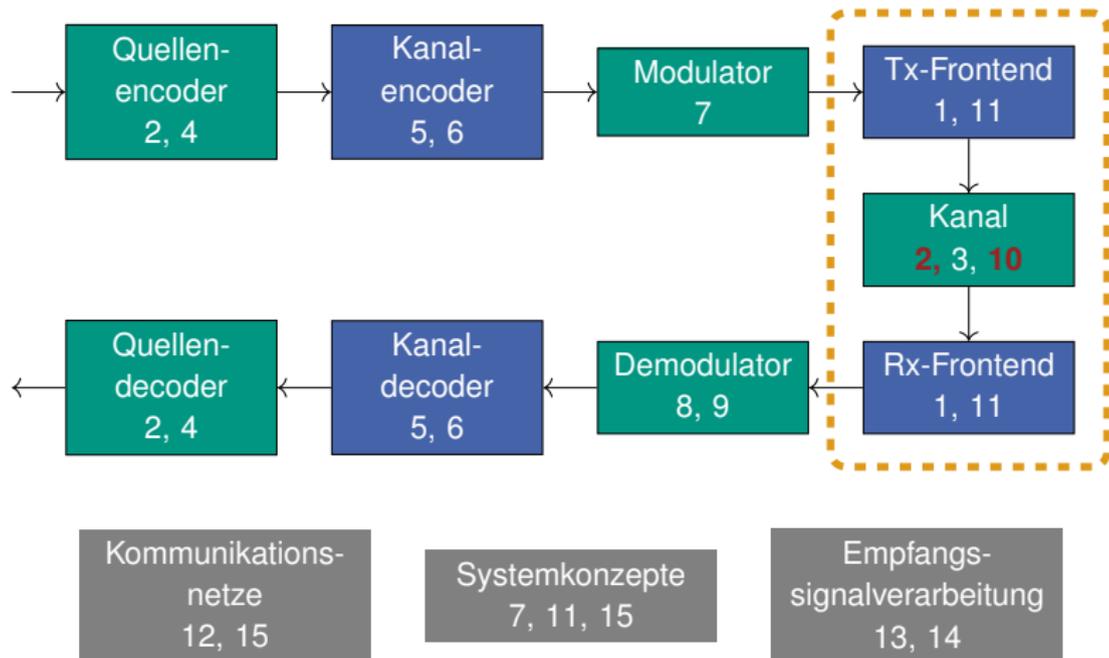
¹Von dort entstammt die Struktur der Folien, die Formeln und die meisten Bilder.

- Weitere Ergänzungen entstammen oft

[PS08]: J. Proakis, M. Salehi, *Digital Communications*, McGraw-Hill, 2008

[Kam04]: K.-D. Kammeyer, *Nachrichtenübertragung*, Teubner, 3. Auflage, 2004

Einordnung der Kapitel von [Jon11]



- 5 Praxis der Nachrichtenkanäle
 - Praktische Gesichtspunkte
 - Die E_b/N_0 -BER-Ebene
 - Die Shannon-Kapazität
 - Die Nyquistbandbreite
 - Fadingkanäle
 - Lernziele
 - Literatur

- **Frage:** Welche Ziele ergeben sich beim Entwurf nachrichtentechnischer Systeme?

- **Antwort:** Optimierung bestimmter Qualitätsparameter
 - Maximierung der Bitübertragungsrate R
 - Minimierung der Bitfehlerrate BER
 - Minimierung der Sendeleistung
 - Minimierung der Systembandbreite
 - Maximierung der Systemverfügbarkeit
 - Minimierung von Systemkomplexität, Rechenleistung und Kosten
 - u. v. a. m.

- **Problem:** Die Forderungen schließen sich teilweise aus
- **Lösung:** Kompromisse

- **Randbedingungen:**
 - Minimal gewünschte Datenrate
 - Bandbreite
 - Kapazität eines Kanals
 - Rechtliche Rahmen und Lizenzen
 - Technische Realisierbarkeit

5 Praxis der Nachrichtenkanäle

- Praktische Gesichtspunkte
- Die E_b/N_0 -BER-Ebene
- Die Shannon-Kapazität
- Die Nyquistbandbreite
- Fadingkanäle
- Lernziele
- Literatur

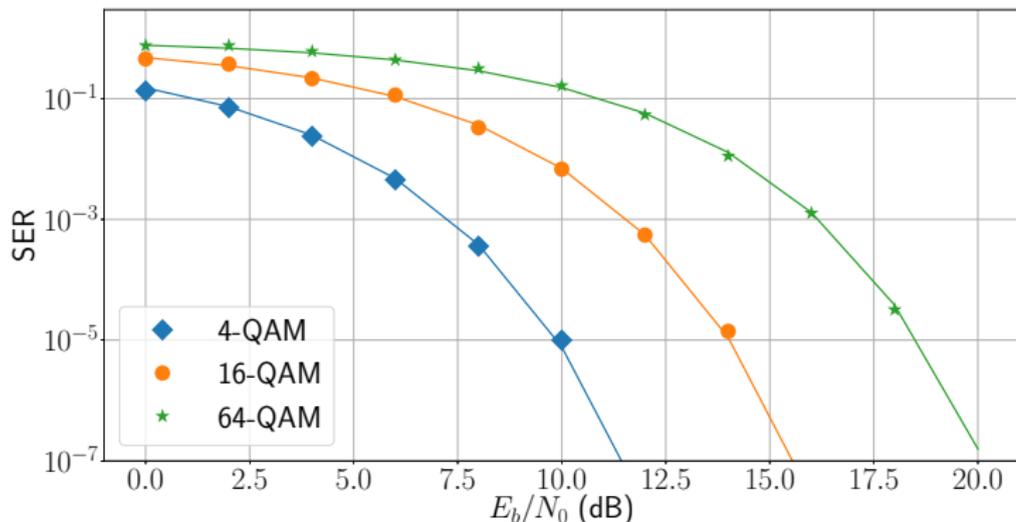
- **Erinnerung:** Bitfehlerkurven zeigen die BER, die für ein bestimmtes E_b/N_0 entsteht.
- **Beobachtung:** E_b/N_0 -BER-Arbeitspunkt abhängig von
 - Modulationsart
 - Kanalcodierung
 - Pulsformung
 - ...

Viele Systemparameter sind im Hintergrund gewählt und können evtl. gegeneinander ausgetauscht werden.

⇒ „Be aware!“

Die E_b/N_0 -BER-Ebene

- **Beispiel:** Symbolfehlerrate² für verschiedene QAM-Verfahren³; Simulation von 200 Fehlern OR⁴ 10^6 Bits



²Diese müssen noch in Bitfehlerraten umgerechnet werden.

³Frage: Wo läge BPSK und warum?

⁴Bedeutet: Zuerst erreichte Bedingung verursacht Abbruch.



- 5 Praxis der Nachrichtenkanäle
 - Praktische Gesichtspunkte
 - Die E_b/N_0 -BER-Ebene
 - Die Shannon-Kapazität
 - Die Nyquistbandbreite
 - Fadingkanäle
 - Lernziele
 - Literatur

- **Bisher (Kap. IT):** Kanalkapazität für DMC in bit/Kanalnutzung

- Reale Kanäle besitzen aber

- Zeitbezug/Symboldauer T
- Leistungsbeschränkung $S \leq S_{\max}$
- Bandbreitenbeschränkung $B \leq B_{\max}$

⇒ Den Nutzer interessiert bit/s; den Regulierer S, B .



- „**Plausibilitätsherleitung**“: Die Übertragungskapazität eines AWGN-Kanals ist abhängig von
 - Signalleistung S : mehr Leistung macht Punkte besser unterscheidbar
 - Rauschleistung N : weniger Rauschen verfälscht Punkte geringer
 - Bandbreite W : mehr Bandbreite erlaubt schnellere Änderung der die Information übertragenden Signale⁵
- **Hinweis**: *Bandbreite* bezeichnet hier⁶ die „einseitige Bandbreite“ (wie in SuS), sprich die maximale Frequenz. Die Bandbreite im Sinne des Kapitels 2 ist somit $B = 2W$.

⁵**Übung**: Machen Sie sich das in Zeit- und Frequenzbereich klar.

⁶Die Begründung für diese Unterscheidung erfordert tiefer gehende Betrachtungen, die erst in späteren Vorlesungen möglich sind.



Theorem (Shannon)⁷

Die *Kanalkapazität* eines AWGN-Kanals ist

$$C_{\text{AWGN}} = W \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) \quad \left(\frac{\text{bit}}{\text{s}} \right).$$

Es gilt:

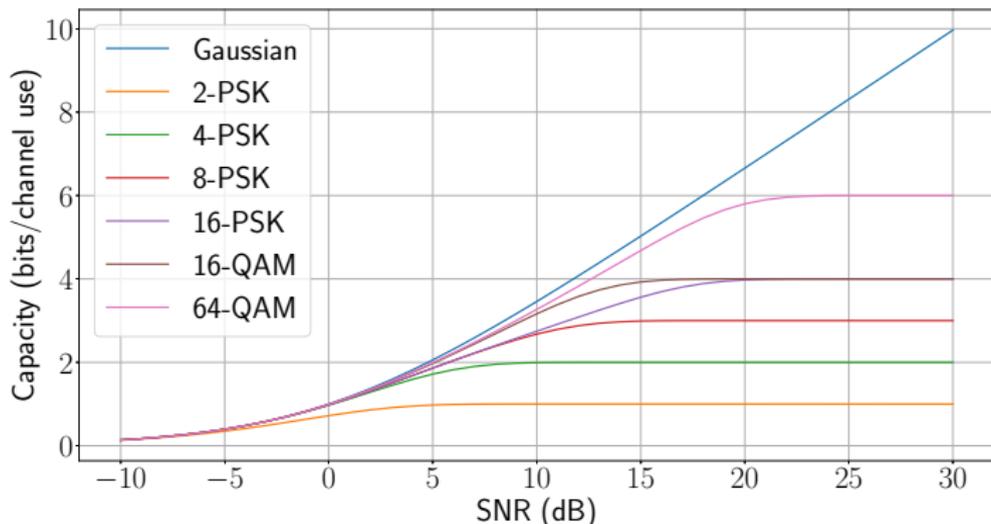
- Für jede Rate $R < C$ kann mit „geeigneter Codierung“⁸ eine beliebig kleine Bitfehlerwahrscheinlichkeit erreicht werden.
- Für jedes $R > C$ ist es unmöglich, Bits mit beliebig kleiner Bitfehlerwahrscheinlichkeit zu übertragen.

⁷Siehe [Sha48], [PS08]

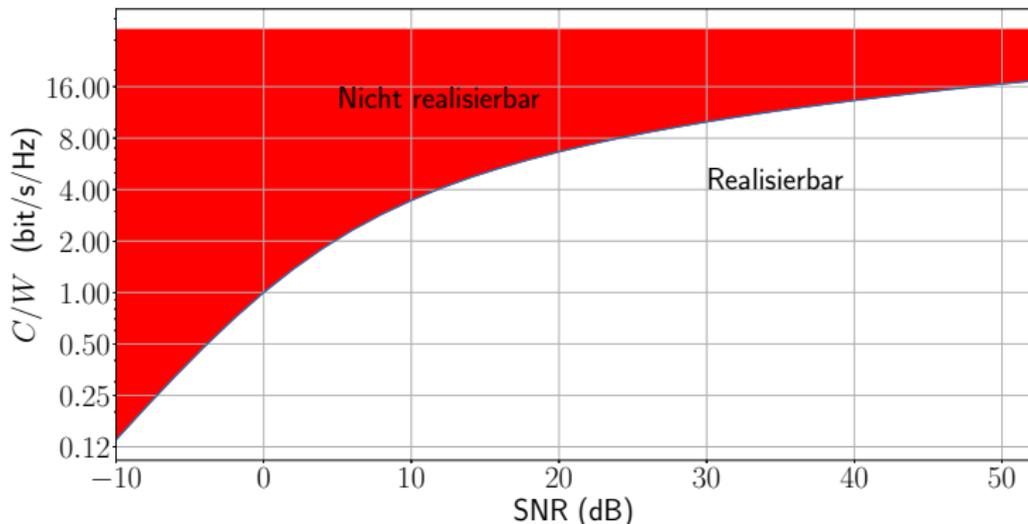
⁸Der hierfür benötigte Aufwand ist je nach Codierung erheblich. Erst in „neuerer Zeit“ sind sogenannte *capacity achieving codes* anwendbar. (→ LDPC-Codes, Turbo-Codes)



- **Beispiel:** Darstellung der Shannon-Kapazität und der Datenrate „realer“ Modulationsverfahren



- **Anschaulich:** Darstellung der auf die Bandbreite normierten Kanalkapazität C/W (ähnlich der spektralen Effizienz)



- Betrachte erneut C/W :
 - Bei $R = C$ und mit $N = WN_0$ folgt

$$\frac{C}{W} = \log_2 \left(1 + \frac{E_b C}{N_0 W} \right)$$

- Mit $x = \frac{E_b C}{N_0 W}$ folgt:

$$\frac{C}{W} = x \log_2 \left((1 + x)^{\frac{1}{x}} \right) \xleftrightarrow{x, \text{klein}} \frac{C}{W} = \frac{E_b C}{N_0 W} \log_2 (e)$$

- Für beliebig kleines C/W und damit immer kleinere Datenrate⁹ folgt:

$$\left(\frac{E_b}{N_0} \right)_{\min} = \frac{1}{\log_2(e)} = 0.693 = -1.59\text{dB}$$

⁹Nach Anschauung reduziert eine Senkung der Datenrate die benötigte Energie.

Theorem

Das kleinst mögliche $\frac{E_b}{N_0}$, für das eine Übertragung möglich ist, ist durch die *Shannon-Grenze* bestimmt:

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{\min} = \frac{1}{\log_2(e)} = 0.693 = -1.59 \text{ dB.}$$

Unterhalb dieses $\frac{E_b}{N_0}$ ist auch für beliebig kleine Datenraten keine Übertragung möglich.

- Potenzieren von

$$\frac{C}{W} = \log_2 \left(1 + \frac{E_b C}{N_0 W} \right)$$

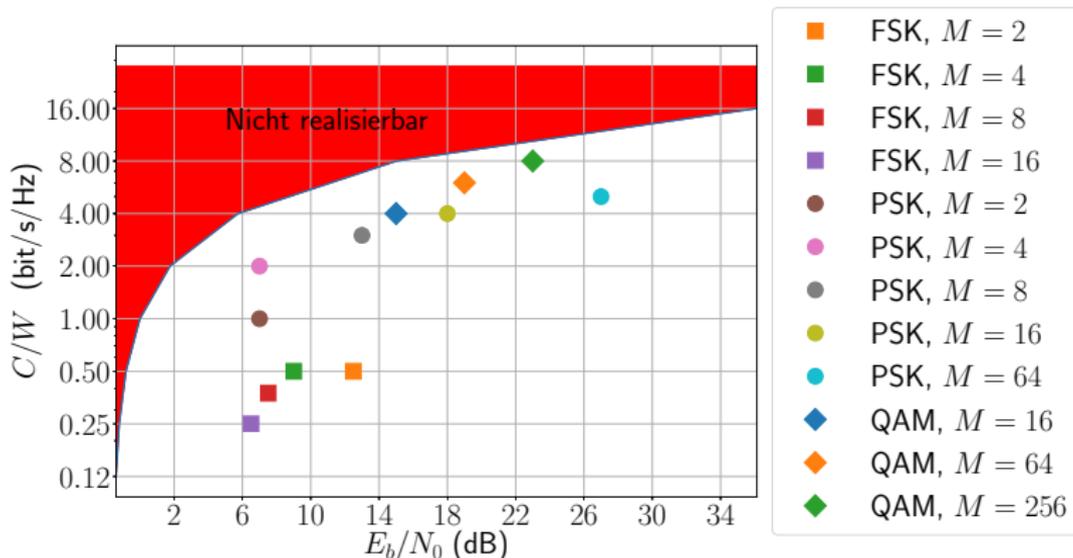
und Umstellen liefert

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{W}{C} \left(2^{\frac{C}{W}} - 1 \right)$$

- Als Funktion von $\frac{C}{W}$ verhält sich $\frac{E_b}{N_0}$ also ungefähr wie $2^x/x$



- **Beispiel:**^{10 11} Spektrale Effizienz – Realisierungsgrenze und mögliche Verfahren bei $\text{BER} = 10^{-5}$ und idealer Pulsformung



¹⁰Bild nach [Jon11]

¹¹Frage/Übung: Wo ist 4-QAM?

■ Erinnerung:

$$C_{\text{AWGN}} = W \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) \quad \left(\frac{\text{bit}}{\text{s}} \right)$$

■ Übung:¹²

- Welches Verhalten besitzt C als Funktion von W ?
- Was passiert für $W \rightarrow \infty$?
- Was passiert bei $W \rightarrow 0$?

¹²Hinweis: Setzen Sie $N = N_0 W$.



5 Praxis der Nachrichtenkanäle

- Praktische Gesichtspunkte
- Die E_b/N_0 -BER-Ebene
- Die Shannon-Kapazität
- Die Nyquistbandbreite
- Fadingkanäle
- Lernziele
- Literatur



- **Feststellung:** Praktisch aufgrund der Bandbegrenzung keine Rechteckpulsformer \implies Es entsteht *Inter-Symbol-Interferenz, ISI*
- **Frage:** Wieso ist ISI überhaupt so störend?
- **Antwort:** „Weil ISI kein AWGN ist.“ \rightarrow **Diskussion**



Definition

Die *Bandbreiteneffizienz* ist definiert als Datenrate pro Bandbreite:

$$\Gamma = \frac{R}{W},$$

wobei R die Datenrate in bit/s und W die Bandbreite in Hz bezeichnet.



Theorem (Nyquist)¹³

Über einen Kanal der Bandbreite W können ohne ISI maximal $R_s = 2W$ Symbole pro Sekunde ohne ISI übertragen werden.

Vertauschen der Perspektive liefert: Für die Übertragung der (Symbol-)Rate R_s ohne ISI benötigt man mindestens die Bandbreite $W = R_s/2$ Hz.

¹³Siehe etwa [PS08]



■ Beispiele:

- Um 1 Mbit/s mit BPSK ISI-frei zu übertragen benötigt man die Bandbreite 500 kHz. Verwendet man stattdessen 256-QAM, so genügt die Bandbreite $500 \text{ kHz}/8 \approx 62.5 \text{ kHz}$.
- Ein Kanal der Bandbreite 200 kHz kann ISI-frei maximal $400 \cdot 10^3$ Symbole/s übertragen. Bei binärer Signalisierung entspricht dies 400 kbit/s.
- Mit der Bandbreite 20 MHz sind theoretisch $40 \cdot 10^6$ Symbole/s übertragbar. Bei binärer Signalisierung somit 40 Mbit/s.

■ Bemerkungen:

- Aussage von Nyquist liefert eine spektrale Effizienz von

$$\Gamma = 2 \left(\frac{\text{Symbole}}{\text{s} \cdot \text{Hz}} \right).$$

Dies ist bzgl. des Bandbreitenbedarfs eine untere Schranke. Praktisch ergeben sich aufgrund nicht-idealer Verarbeitung „typischerweise“ etwa 1 Symbol/s/Hz. Eine Erhöhung der Datenrate muss also durch Erhöhung von M erreicht werden.

■ Bemerkungen: (ctd.)

- Da Modulationssymbole $\log_2(M)$ Bits an Information tragen, kann durch Erhöhung von M die Bandbreiteneffizienz (theoretisch) beliebig gesteigert werden. Höheres M erfordert¹⁴ allerdings ein höheres Empfangs-SNR, etwa durch
 - Erhöhung der Sendeleistung
 - Verringerung der (Empfangs-)Rauschleistung
 - Verbesserung der Empfangsgüte (Antennengewinne, ...)

¹⁴ ..., da bei normierter Sendeleistung der Abstand der Signalpunkte in \mathbb{C} mit zunehmendem M sinkt, ...

5 Praxis der Nachrichtenkanäle

- Praktische Gesichtspunkte
- Die E_b/N_0 -BER-Ebene
- Die Shannon-Kapazität
- Die Nyquistbandbreite
- **Fadingkanäle**
- Lernziele
- Literatur

■ Erinnerung:

Fadingbegriffe	$B < B_C$	$B \geq B_C$
$T < T_C$	flat, slow	freq. selective, slow
$T > T_C$	flat, fast	freq. selective, fast



■ Vorbemerkung:

- Hier erfolgt nur eine kurze Diskussion um Bewusstsein zu schaffen.
- Tiefer gehende Analysen und Betrachtungen erfolgen in weiterführenden Vorlesungen.

■ Modell:

- Kanal beeinflusst durch „slow, flat fading“ (siehe Kapitel 2):

$$y = hx + n, \quad n \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2)$$

- Aufgrund der Argumente in Kapitel 2 wird für h eine komplexwertige Gaußverteilung angenommen: $h \sim \mathcal{CN}(0, 1)$

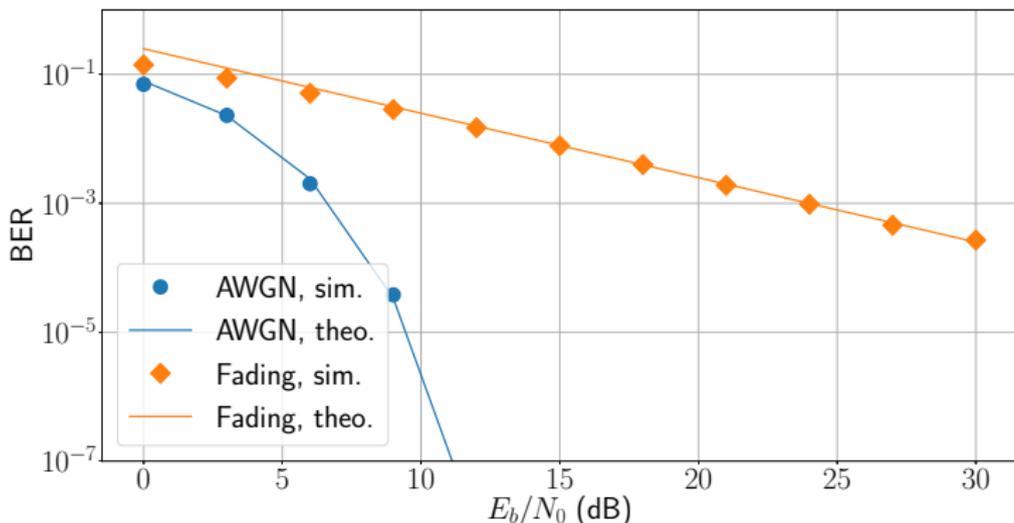


- **Erinnerung:** Zusammenhang im Basisband lautet

$$y = hx + n = |h|e^{j\angle h}x + n, \quad y, h, x, n \in \mathbb{C}$$

- **Beobachtung:** Letztlich AWGN mit dem „neuen Signal hx “?!?
- **Feststellung:** Für festes $|h| < 1$ ist das SNR geringer.
- **Frage:** Vermeintliche Lösung? Warum funktioniert diese nicht?

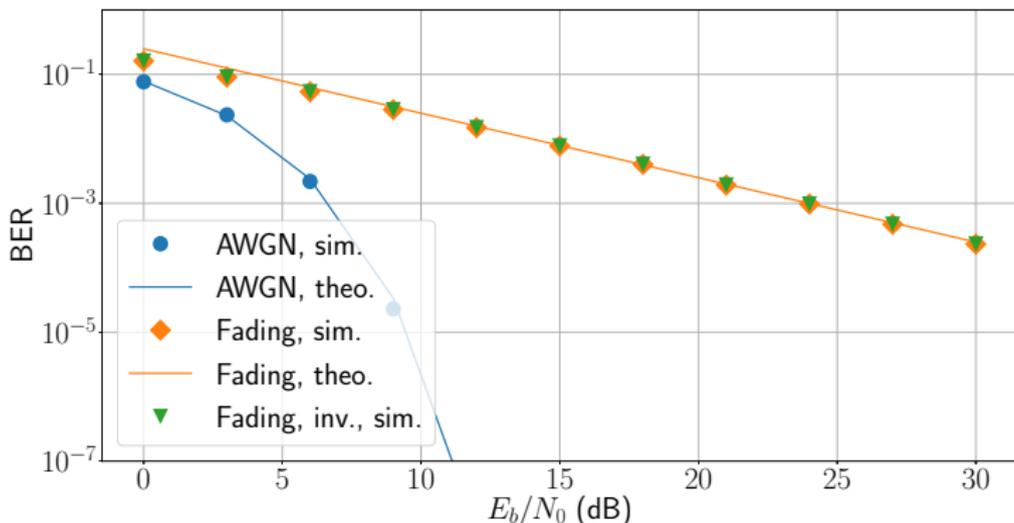
- **Beispiel:**¹⁵ Bitfehlerwahrscheinlichkeit bei BPSK für flat fading¹⁶ und Vergleich mit AWGN; Simulation von 100 Fehlern OR 10^6 Bits



¹⁵ **Datei:** ber_fading.ipynb

¹⁶ Theoretisches Ergebnis: $1/(4 \cdot E_b/N_0)$ aus [TV06].

- **Beispiel:**¹⁷ Bitfehlerwahrscheinlichkeit bei BPSK für flat fading¹⁸ und Vergleich mit AWGN; Simulation von 100 Fehlern OR 10^6 Bits



¹⁷ **Datei:** ber_fading.ipynb

¹⁸ Theoretisches Ergebnis: $1/(4 \cdot E_b/N_0)$ aus [TV06].

■ Diskussion:

- Wir lesen ab, dass in flat fading für eine BER von 10^{-3} etwa 24 dB anstelle von 7 dB notwendig sind. \implies Faktor 50!
- Bei „reiner Kanalinvertierung“ (grün) ergibt sich dasselbe Ergebnis wie bei Matched-Filter-Empfang (orange).

- **Folgerung:** Es werden „clevere Methoden“ notwendig. (\rightarrow weiterführende Vorlesungen; Stichwort: Diversity)

5 Praxis der Nachrichtenkanäle

- Praktische Gesichtspunkte
- Die E_b/N_0 -BER-Ebene
- Die Shannon-Kapazität
- Die Nyquistbandbreite
- Fadingkanäle
- **Lernziele**
- Literatur

- Die folgende Aufstellung fasst die zentralen Punkte der behandelten Kapitel zusammen.
- Es wird aufgezeigt, welche Punkte nach Bearbeitung der Kapitel klar sein sollten.
- **Hinweise:**
 - Die Auflistung ist nicht vollständig, sondern führt die wichtigsten Aussagen auf; nicht erwähnte Inhalte sind dennoch bedeutsam.
 - Oft enthalten die Nachweise wichtige Ideen; diese also nicht vernachlässigen.
 - Stets versuchen, Gleichungen in Verbindung mit Interpretationen und Anwendungen zu sehen
 - Des weiteren sollten alle kleinen nützlichen Ergänzungen verstanden sein.
 - Es ist immer eine gute Idee, etwas Gelerntes im Rechner umzusetzen. Dies hilft beim Verständnis und schärft das Bewusstsein für mögliche Probleme.



Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- Parameter beim Entwurf eines Nachrichtentechnischen Systems; Austauschbarkeit bzw. gegenseitige Abhängigkeit
- $\frac{E_b}{N_0}$ -BER-Ebene als Maß für die Güte; Achtung: viele andere Einflüsse werden maskiert
- Bedeutung von Inter-Symbol-Interferenz; max. Datenrate unter Vermeidung von ISI (Nyquist); Bandbreiteneffizienz
- Shannon-Kapazität; Shannon-Grenze
- Schwierigkeit in Fading-Kanälen



5 Praxis der Nachrichtenkanäle

- Praktische Gesichtspunkte
- Die E_b/N_0 -BER-Ebene
- Die Shannon-Kapazität
- Die Nyquistbandbreite
- Fadingkanäle
- Lernziele
- Literatur



- [Jon11] F. Jondral, *Nachrichtenübertragung*, Schlembach, 4. Auflage, 2011
- [PS08] J. Proakis, M. Salehi, *Digital Communications*, McGraw-Hill, 2008
- [Kam04] K.-D. Kammeyer, *Nachrichtenübertragung*, Teubner, 2004
- [Sha48] C. E. Shannon, *A Mathematical Theory of Communications*, The Bell System Technical Journal, Vol. XXVI, 1948 (online verfügbar unter <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=6773067>)
- [CT06] T. Cover, J. Thomas, *Elements of Information Theory*, Wiley, 2006
- [TV06] D. Tse, P. Viswanath, *Fundamentals of Wireless Communications*, Cambridge University Press, 2006

Nachrichtentechnik I – Empfangssignalverarbeitung

Holger Jäkel

Communications Engineering Lab (CEL)



- 6 Empfangssignalverarbeitung
 - Synchronisation
 - Entzerrung
 - Beispiele
 - Lernziele
 - Literatur

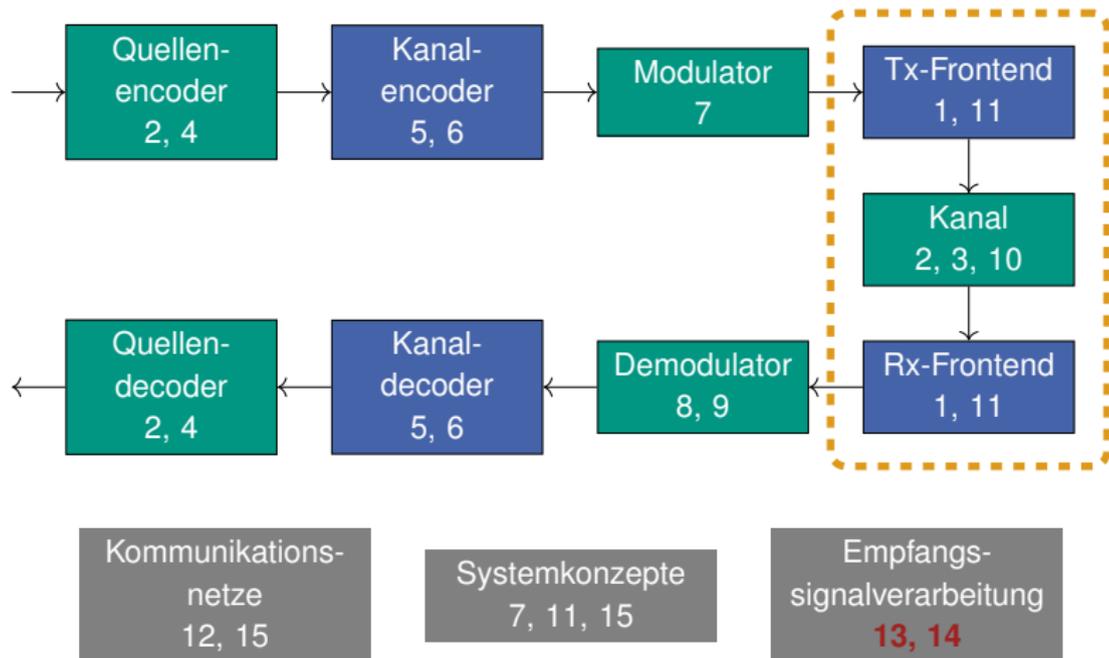


- Folgende Diskussionen erfolgen gemäß¹

[Jon11]: F. Jondral, *Nachrichtenübertragung*, Schlembach, 4. Auflage, 2011

¹Von dort entstammt die Struktur der Folien, die Formeln und die meisten Bilder.

Einordnung der Kapitel von [Jon11]



- 6 Empfangssignalverarbeitung
 - Synchronisation
 - Grundlegende Betrachtungen
 - Phasenregelkreis
 - Trägerrückgewinnung bei BPSK
 - Taktableitung
 - Entzerrung
 - Beispiele
 - Lernziele
 - Literatur



- **Ausgangspunkt:** Digitales Übertragungssystem enthält
 - einen Mischer zur Transformation vom/zum Basisband (Kap. 2)
 - ein MF inkl. Sampler im Symboltakt bzw. einen Korrelator (Kap. 3)
 - ein Detektionsverfahren zur Wiedergewinnung der Information (Kap. 3)

- **Beobachtung:** Diese arbeiten nur korrekt, falls sie Trägerfrequenz f_T , Symboltakt T (bzw. dessen „Null-Zeitpunkt“) und Phasendrehung ϑ kennen. Andernfalls²
 - sind die Symbolraumdiagramme verdreht,
 - drehen sich die Symbolraumdiagramme mit der Zeit,
 - tastet der Sampler zum falschen Zeitpunkt ab.

²**Übung:** Weisen Sie den Effekten die korrekten Ursachen zu und erklären Sie die Auswirkungen auf die Symbolübertragung/-entscheidung.

■ Hinweise:

- In den folgenden Folien werden einige Beispiele für die Auswirkungen falscher Parameter gezeigt. In „unserer Vorlesung“ geht es hier um das grundsätzliche Verständnis; Details werden in weiterführenden Vorlesungen diskutiert.
- Der Index „off“ bezeichnet in den folgenden Illustrationen einen Offset, also eine Abweichung vom tatsächlichen Wert.



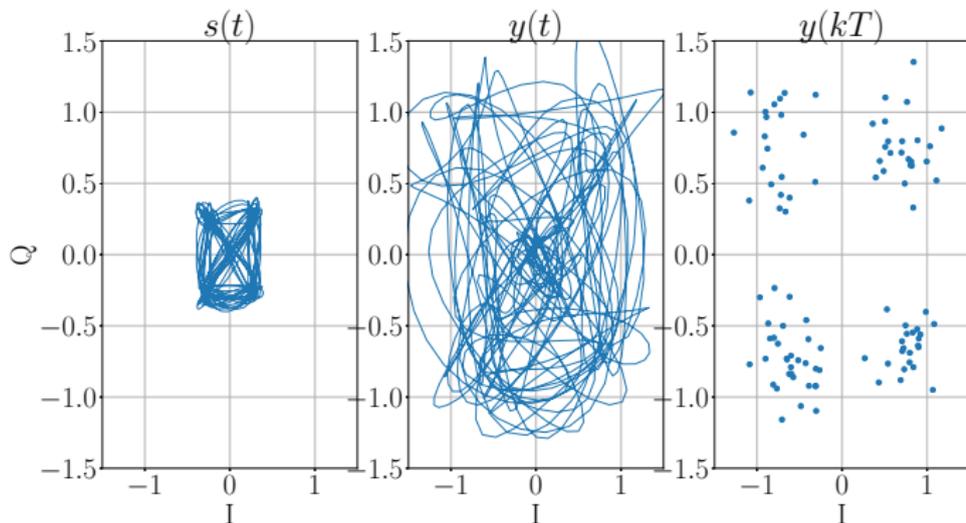
■ Erinnerung:

- Das Basisband-Sendesignal bei linearer Modulation und Pulsform $g(t)$ lautet:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A(nT)g(t - nT) \in \mathbb{C}$$

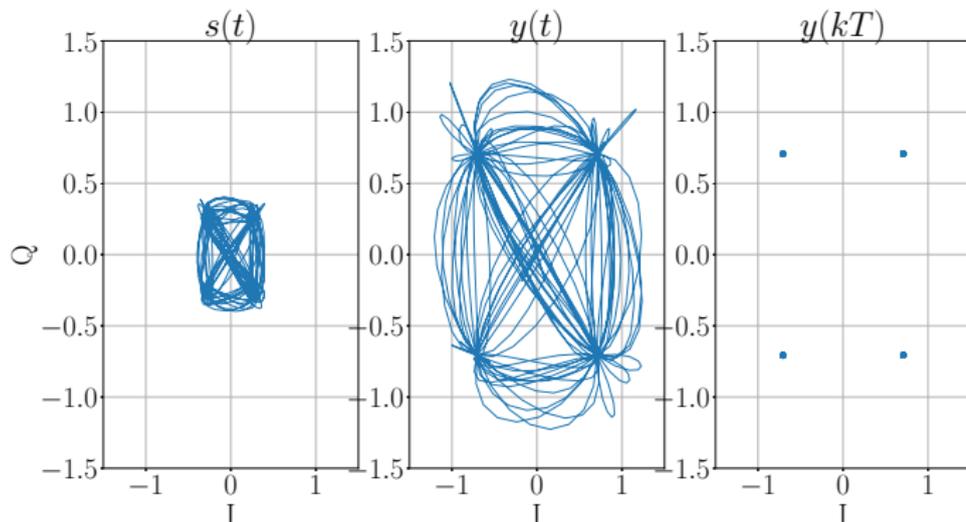
- „Läuft“ man entlang der Zeit, so beschreibt $s(t)$ eine Trajektorie in der komplexen Ebene, die idealerweise am Ausgang des MF an den Abtastzeitpunkten exakt mit den möglichen Symbolpunkten übereinstimmt.

- **Beispiel:**³ QPSK mit RRC-Pulsformung mit $T = 1$ s, $n_{\text{up}} = 8$, $\phi_{\text{off}} = 0$, $f_{\text{off}} = 0$; idealer Abtastzeitpunkt, $E_b/N_0 = 10$ dB



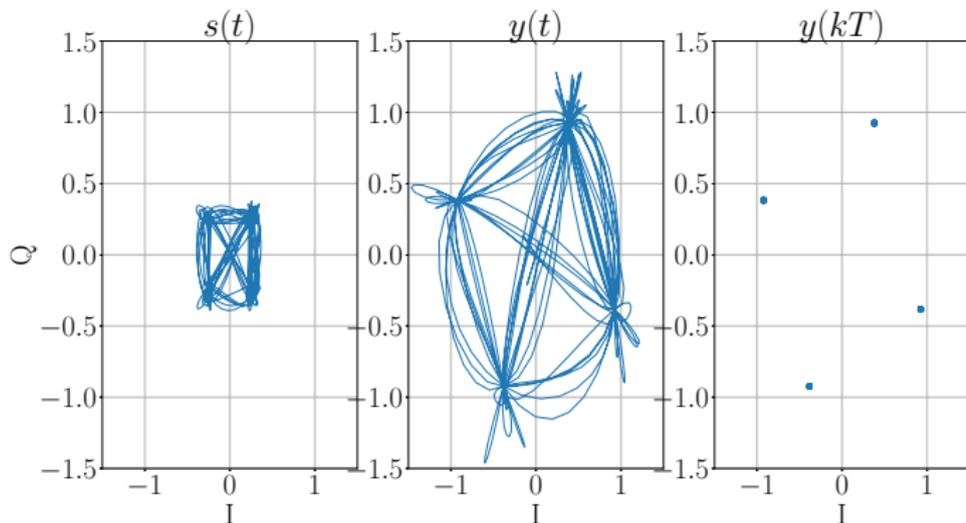
³ Datei: Rx_asynch.ipynb

- **Beispiel:**⁴ QPSK mit RRC-Pulsformung mit $T = 1$ s, $n_{\text{up}} = 8$, $\phi_{\text{off}} = 0$, $f_{\text{off}} = 0$; idealer Abtastzeitpunkt, $E_b/N_0 = 100$ dB



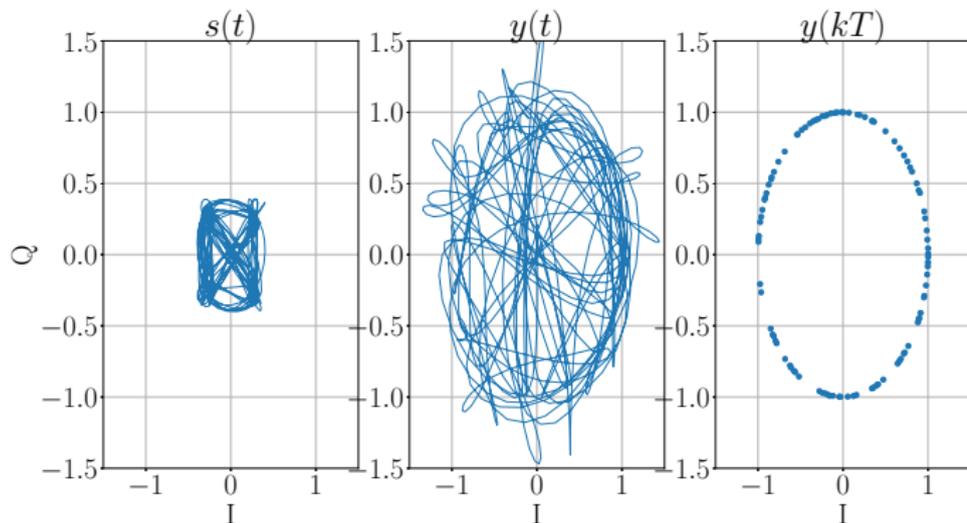
⁴ **Datei:** Rx_asynch.ipynb

- **Beispiel:**⁵ QPSK mit RRC-Pulsformung mit $T = 1$ s, $n_{\text{up}} = 8$, $\phi_{\text{off}} = \pi/8$, $f_{\text{off}} = 0$; idealer Abtastzeitpunkt, $E_b/N_0 = 100$ dB



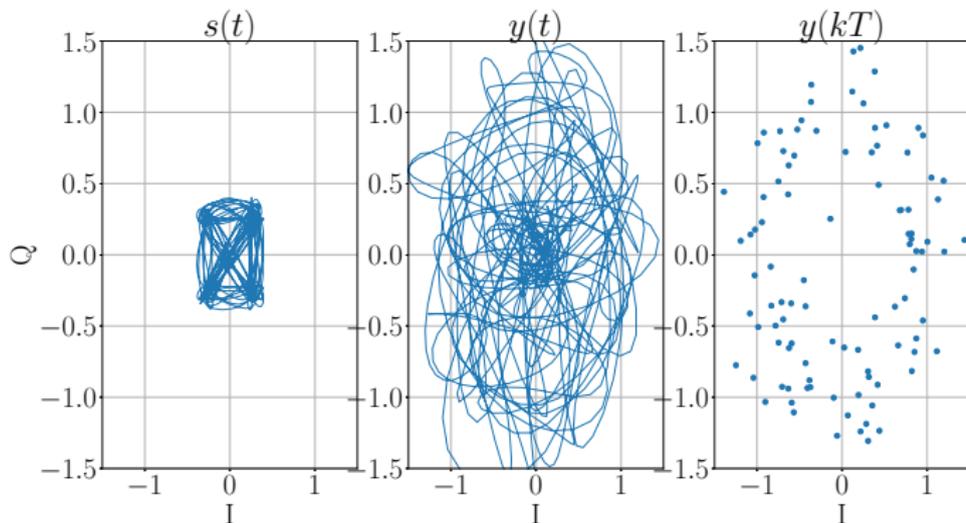
⁵ Datei: Rx_asynch.ipynb

- **Beispiel:**⁶ QPSK mit RRC-Pulsformung mit $T = 1$ s, $n_{\text{up}} = 8$, $\phi_{\text{off}} = 0$, $f_{\text{off}} = 10^{-3}/t_s$; ideale Abtastzeitpunkt, $E_b/N_0 = 100$ dB



⁶ Datei: Rx_asynch.ipynb

- **Beispiel:**⁷ QPSK mit RRC-Pulsformung mit $T = 1$ s, $n_{\text{up}} = 8$, $\phi_{\text{off}} = \pi/8$, $f_{\text{off}} = 10^{-3}/t_s$; ideale Abtastung, $E_b/N_0 = 10$ dB



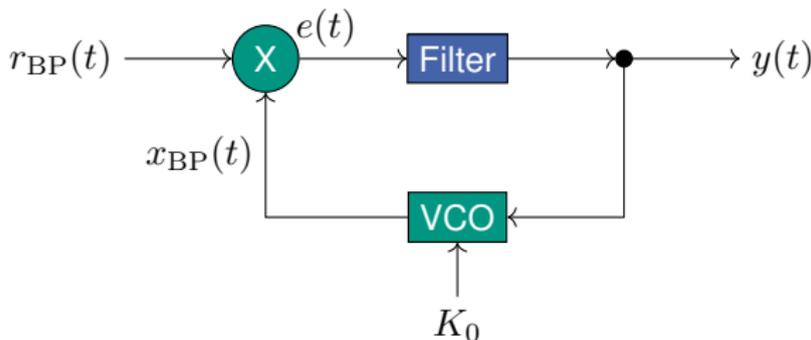
⁷ Datei: Rx_asynch.ipynb

- **Feststellung:** *Synchronisation* notwendig
 - *Trägerrückgewinnung:* Bestimmung der Trägerfrequenz f_T und (bei kohärentem Empfang) der Phase ϑ
 - *Taktableitung:* Bestimmung des Symboltakts und des Abtastzeitpunkts

- **Hinweis:** Die folgenden Betrachtungen geben nur einen groben Überblick über die Funktionsweise. Für detaillierte Betrachtungen wird auf weiterführende Vorlesungen verwiesen.

■ Aufbau: Phasenregelkreis, Phase Locked Loop, PLL

- Ausgangsfrequenz des VCO⁸ linear von Eingangsspannung abhängig⁹
- Wirkung:
 - Pos. Eingangsspannung $y > 0 \implies f_{\text{VCO}} > f_{\text{T}}$
 - Neg. Eingangsspannung $y < 0 \implies f_{\text{VCO}} < f_{\text{T}}$



⁸VCO: Voltage Controlled Oscillator

⁹... zumindest innerhalb eines bestimmten Arbeitsbereiches

■ Analyse:

- Das Eingangssignal in die PLL und der VCO-Ausgang seien:

$$r_{\text{BP}}(t) = \sin(2\pi f_{\text{T}}t + \vartheta(t))$$

$$x_{\text{BP}}(t) = 2 \cos(2\pi f_{\text{T}}t + \hat{\vartheta}(t)) ,$$

wobei $\vartheta(t)$ eine langsam veränderliche Phase beschreibt.

- Nach dem Multiplizierer folgt:

$$e(t) = r_{\text{BP}}(t) \cdot x_{\text{BP}}(t)$$

$$= \sin(2\pi f_{\text{T}}t + \vartheta(t)) \cdot 2 \cos(2\pi f_{\text{T}}t + \hat{\vartheta}(t))$$

$$= \sin(\vartheta(t) - \hat{\vartheta}(t)) + \sin(4\pi f_{\text{T}}t + \vartheta(t) + \hat{\vartheta}(t))$$

- **Analyse:** (ctd.)

- **Erinnerung:**

$$e(t) = \sin(\vartheta(t) - \hat{\vartheta}(t)) + \sin(4\pi f_{\text{T}}t + \vartheta(t) + \hat{\vartheta}(t))$$

- Hat das Schleifenfilter Tiefpasscharakteristik, so folgt:

$$y(t) = e(t) * h(t) = \sin(\vartheta(t) - \hat{\vartheta}(t)) * h(t)$$

- Ist der Phasenfehler klein, ergibt sich:

$$y(t) = e(t) * h(t) \approx (\vartheta(t) - \hat{\vartheta}(t)) * h(t)$$

■ Analyse: (ctd.)

- Die Momentanfrequenz am Ausgang des VCO lautet:

$$f(t) = \frac{d}{dt} \left(f_{\text{T}}t + \frac{\hat{\vartheta}(t)}{2\pi} \right) \implies f(t) - f_{\text{T}} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \hat{\vartheta}(t)$$

- Ist die Differenzfrequenz eine lineare Funktion der Eingangsspannung, ergibt sich die *lineare Loop-Gleichung*:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \hat{\vartheta}(t) \approx K_0 \cdot (\vartheta(t) - \hat{\vartheta}(t)) * h(t)$$

- **Hinweis:** Der Zusammenhang ist nur für kleine Abweichungen der Phase korrekt.

- **Analyse:** (ctd.)

- **Erinnerung:**

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \hat{\vartheta}(t) \approx K_0 \cdot (\vartheta(t) - \hat{\vartheta}(t)) * h(t)$$

- Fourier-Transformation liefert:

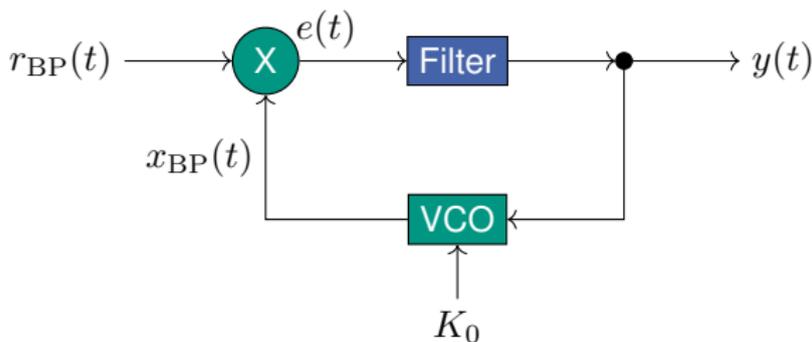
$$jf \hat{\Theta}(f) \approx K_0 (\Theta(f) - \hat{\Theta}(f)) \cdot H(f)$$

und damit die *Closed-Loop Übertragungsfunktion der PLL* zu:

$$C_{\text{BP}}(f) := \frac{\hat{\Theta}(f)}{\Theta(f)} = \frac{K_0 H(f)}{jf + K_0 H(f)}$$



- 1. Fall: $\hat{\vartheta} = \vartheta$
 - VCO-Ausgang $x_{\text{BP}}(t)$ und PLL-Eingang $r_{\text{BP}}(t)$ haben dieselbe Frequenz:
 $f(t) = f_{\text{T}}$
 - VCO-Ausgang $x_{\text{BP}}(t)$ und PLL-Eingang $r_{\text{BP}}(t)$ haben eine um $\frac{\pi}{2}$ verschobene Phase



- 2. Fall: $\hat{\vartheta} < \vartheta$, $|\hat{\vartheta} - \vartheta| < \frac{\pi}{6}$: Nach Konstruktion ist $\Delta f(t) = K_0 \cdot (\vartheta(t) - \hat{\vartheta}) > 0$ und damit

$$\Delta\vartheta = \int_0^t 2\pi\Delta f(t)dt > 0,$$

die Phase nimmt zu, bis $\hat{\vartheta} = \vartheta$ erreicht ist.

- 3. Fall: $\hat{\vartheta} > \vartheta$, $|\hat{\vartheta} - \vartheta| < \frac{\pi}{6}$: Analog zum zweiten Fall nimmt die Phase ab, bis $\hat{\vartheta} = \vartheta$ erreicht ist.

■ Bemerkungen:

- Ist $\frac{\pi}{6} < |\hat{\vartheta} - \vartheta| < \frac{\pi}{2}$, so ist die Approximation

$$\sin(\hat{\vartheta}(t) - \vartheta(t)) \approx \hat{\vartheta}(t) - \vartheta(t)$$

nicht mehr gerechtfertigt. Die Schleife korrigiert die Phase zwar noch, das Schleifenverhalten ist aber deutlich langsamer.

- Für $|\hat{\vartheta} - \vartheta| > \frac{\pi}{2}$ gerät die PLL aus dem „Lock-Zustand“; eine neue Initialschätzung (*Akquisition*) wird notwendig.

- **Ziel:** Wiedergewinnung der tatsächlichen Trägerfrequenz aus dem Empfangssignal
- **Szenario:** Es wurde BPSK mit Trägerfrequenz f_T bei Rechteckpulsformung gesendet \implies Das gesendete Basisbandsignal ist von der Gestalt:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A(nT)g_R(t - nT)$$

- Das Bandpasssignal ergibt sich zu

$$r_{\text{BP}}(t) = a(t) \sin(2\pi f_{\text{T}}t + \vartheta) + n_{\text{BP}}(t),$$

wobei $a(t) \in \{-1, +1\}$ und $n_{\text{BP}}(t)$ AWGN ist.¹⁰

- **Feststellung:** Ignoriert man das Rauschen, so folgt¹¹ das Spektrum als Spektrum von $a(t)$ an den Frequenzen $\pm f_{\text{T}} \implies$ Keine starke Komponente an der Stelle des Trägers

¹⁰**Ergänzung:** Die Unterscheidung Basisband–Bandpass ist für ideales weißes Rauschen eigentlich nicht sinnvoll, sondern ergibt nur für bandbegrenztetes weißes Rauschen Sinn (**Übung:** Begründung?). Zur Verdeutlichung ist die Bezeichnung hier dennoch mitgeführt. (**Übung:** Rechtfertigung?)

¹¹**Übung:** Begründen Sie.



■ Lösung:

- Quadrieren des Empfangssignals liefert:

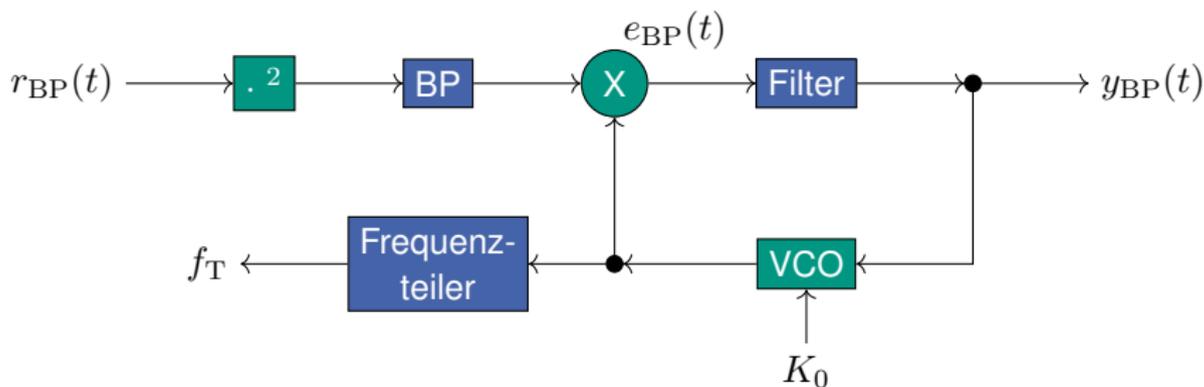
$$\begin{aligned}r_{\text{BP}}^2(t) &= (a(t) \sin(2\pi f_{\text{T}}t + \vartheta) + n_{\text{BP}}(t))^2 \\ &= a^2(t) \sin^2(2\pi f_{\text{T}}t + \vartheta) + 2a(t) \sin(2\pi f_{\text{T}}t + \vartheta)n_{\text{BP}}(t) + n_{\text{BP}}^2(t) \\ &= \frac{a^2(t)}{2} (1 - \cos(4\pi f_{\text{T}}t + 2\vartheta)) \\ &\quad + 2a(t) \sin(2\pi f_{\text{T}}t + \vartheta)n_{\text{BP}}(t) + n_{\text{BP}}^2(t)\end{aligned}$$

- Filtert man $r_{\text{BP}}^2(t)$ mit einem Bandpass der Mittenfrequenz $2f_{\text{T}}$, so folgt:¹²

$$\text{BP}_{2f_{\text{T}}} \{r_{\text{BP}}^2(t)\} = -\frac{1}{2} \cos(4\pi f_{\text{T}}t + 2\vartheta) + \tilde{n}_{\text{BP}}(t)$$

¹²Übung: Wo ist $a^2(t)$?

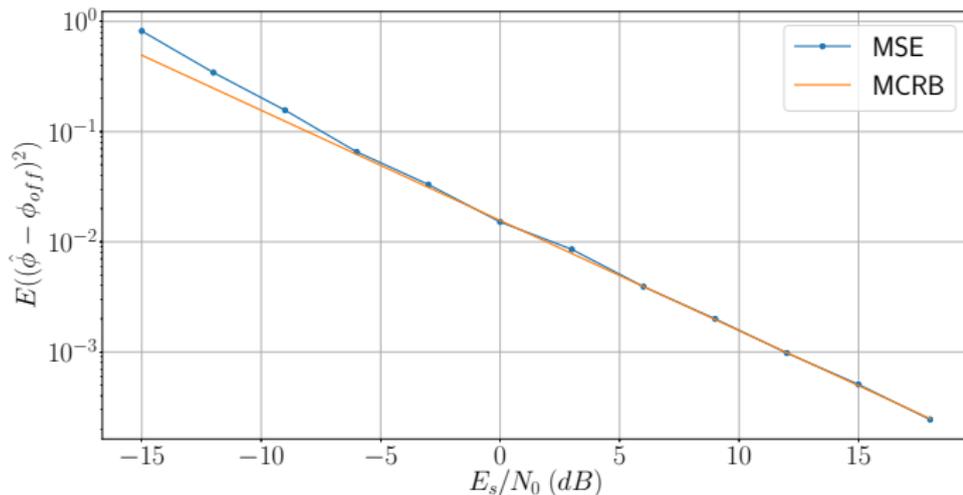
■ Illustration:



■ Bemerkungen:

- Durch die Quadratur werden auch Phasenrauschen und Phasenjitter verdoppelt \implies PLL wird anfälliger für Rauschen
- Bei der Akquisition kann es zu einem Lock auf die falsche Frequenz kommen \implies kein sinnvoller Empfang möglich
- Eine Vergrößerung der Rauschleistung kann mittels der *Costas-Loop* vermieden werden. Diese realisiert letztlich die Trägerrückgewinnung unter Vermeidung der Quadratur. Siehe hierzu [Jon11] oder [PS08].

- **Beispiel (NT II):** Quadratische Abweichung¹³ der Phasenschätzung¹⁴ bei QPSK und RRC-Pulsformung



¹³MCRB steht für „Modified Cramér-Rao Bound“, eine Abwandlung der Cramér-Rao-Schranke, die eine untere Grenze für Varianz eines Schätzfehlers darstellt.

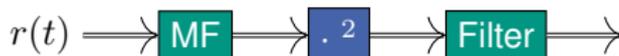
¹⁴Hier geht es weniger um die Details; vielmehr soll ein „Gefühl“ dafür vermittelt werden, wann die Synchronisation funktioniert.

- **Beobachtung:** Zur korrekten Abtastung am Ausgang des MF benötigt der Empfänger den exakten Symboltakt und den korrekten Abtastzeitpunkt
- Mögliche Vorgehensweisen:¹⁵
 - Direkte Ableitung aus dem Empfangssignal → *Open-Loop-Verfahren*
 - Abgleichen eines internen Takts mit dem Empfangssignal → *Closed-Loop-Verfahren*

¹⁵Die folgenden Betrachtungen geben lediglich die Grundidee wieder. Für tiefere Analysen siehe weiterführende Vorlesungen oder [PS08].

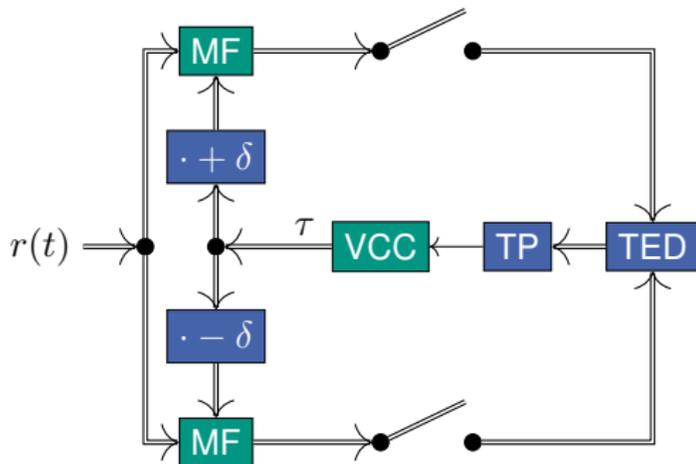
■ *Open-Loop-Verfahren:*

- Der Sender ... sendet eine feste Datenfolge, etwa in einer Präambel
- Der Empfänger ...
 - verwendet ein Filter, das auf den Sendeimpuls „matched“ ist
 - quadriert den Ausgang des MF
 - beobachtet am Ausgang des Filters Signalspitzen im Takt der Sendesymbole



■ Closed-Loop-Verfahren: (Early-Late-Gate)

- Der Sender ... sendet die Datenfolge
- Der Empfänger ...
 - integriert verschobene Versionen zur Bildung eines *early* und eines *late* Anteils¹⁶ ¹⁷
 - vergleicht die Werte der Zweige und verschiebt sein Beobachtungsfenster



¹⁶Hier durchgeführt als abgetasteter Ausgang des MF.

¹⁷**Abkürzungen:** VCC = voltage-controlled clock; TED = Timing error detection [PS08]

■ Bemerkungen:

- Zur Bewertung der Güte verschiedener Verfahren sei auf die Literatur verwiesen. Für das Early-Late-Gate findet sich das beispielsweise in [Jon11].
- Die dargestellten Methoden stellen nur einen Bruchteil des möglichen dar und sollen lediglich eine Idee dafür vermitteln, was prinzipiell zu tun ist. Details siehe weiterführende Vorlesungen. So gibt es beispielsweise für alle Parameter einen ML-Schätzer.



6 Empfangssignalverarbeitung

- Synchronisation
- Entzerrung
 - Grundlegende Betrachtungen
 - Inter-Symbol-Interferenz (ISI)
 - Prinzip der Kanalentzerrung
- Beispiele
- Lernziele
- Literatur



■ Erinnerung:

- Sendesignal wird beschrieben als

$$s_{\text{BP}}(t) = \text{Re} \left\{ s(t) e^{j2\pi f_{\text{T}} t} \right\}$$

mit dem Basisbandsignal:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A(nT) g(t - nT)$$

Hinweis

- Hier und im Folgenden werden alle Größen im Basisband betrachtet.



■ Ansatz:

- Kanäle des Mobilfunks sind filternde Mehrwegekanäle \implies Beschreibung durch Impulsantwort $f(t)$; es folgt

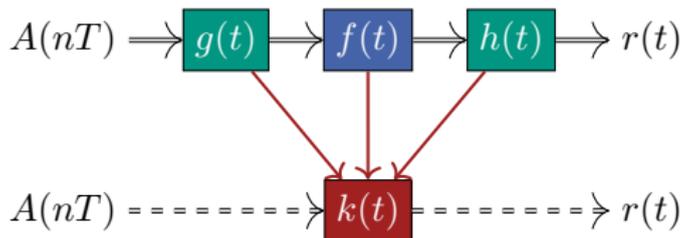
$$r(t) = s(t) * f(t) + n(t)$$

- Filtert man das Empfangssignal mit einem Empfangsfilter¹⁸ mit der Impulsantwort $h(t)$ und integriert die Filterung in das Empfangssignal, so folgt:

$$\begin{aligned} r(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} A(nT) g(t - nT) * f(t) * h(t) + n(t) * h(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A(nT) k(t - nT) + \tilde{n}(t) \end{aligned}$$

¹⁸ ... etwa dem Matched Filter...

■ Illustration:



■ Erinnerung:

$$r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A(nT)k(t - nT) + \tilde{n}(t), \quad k(t) = g(t) * f(t) * h(t)$$

- Tastet man das Signal $r(t)$ mit der Abtastzeit T ab¹⁹, so folgt:

$$\begin{aligned} r(mT) &= r(t) \Big|_{t=mT} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A(nT)k(mT - nT) + \tilde{n}(mT) \\ &= A(mT)k(0) + \sum_{n \neq m} A(nT)k(mT - nT) + \tilde{n}(mT) \end{aligned}$$

¹⁹Hier ist der Symboltakt verwendet, da sich der Symboltakt als relevant erweisen wird.

■ Erinnerung:

$$r(mT) = A(mT)k(0) + \sum_{n \neq m} A(nT)k(mT - nT) + \tilde{n}(mT)$$

⇒ Symbole beeinflussen sich gegenseitig

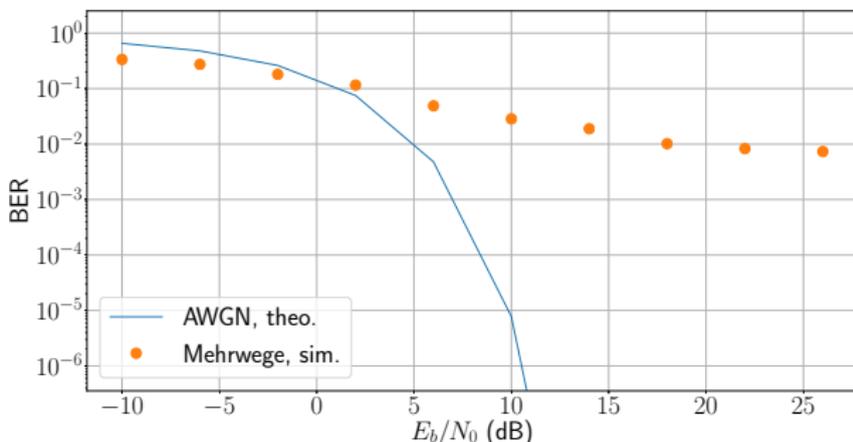
Definition

Die gegenseitige Beeinflussung von Symbolen im Empfänger bezeichnet man als *Inter-Symbol-Interferenz, ISI*.



Inter-Symbol-Interferenz (ISI)

- **Beispiel:**²⁰ BER²¹ ²² für BPSK für den AWGN-Kanal und den Kanal mit der Impulsantwort $h[n] = [1, 0.4, -0.3, 0.1, 0.1, 0.05, 0.05]$



²⁰ Datei: isi.ipynb

²¹ Man bezeichnet dieses Verhalten als „error floor“.

²² Übung („WT-Knobelei“): Können Sie den asymptotischen BER-Wert begründen?

■ Erste Idee:²³

- Das Empfangssignal lautet vereinfacht:

$$r(t) = s(t) * k(t) + \tilde{n}(t)$$

$$R(f) = S(f) \cdot K(f) + \tilde{N}(f)$$

- Ideal aus ISI-Sicht wäre der *Zero-Forcing-Entzerrer* mit Frequenzgang²⁴

$$H_{\text{eq}}(f) = \frac{1}{K(f)} \implies R_{\text{eq}}(f) = H_{\text{eq}}(f)R(f) = S(f) + \frac{\tilde{N}(f)}{K(f)}$$

■ Eigenschaften:

- Intersymbol-Interferenz komplett vermieden („Kanal ist raus“)
- Potenziell sehr hohe Rauschverstärkung, falls $K(f)$ Nullstellen auf der imaginären Achse besitzt (bzw. $K(s)$ Nullstellen nahe der imaginären Achse)

²³ **Annahmen:** Sende- und Empfangs-MF integriert in $k(t)$; Kanalimpulsantwort zeitinvariant

²⁴ **Übung:** Wann gehört $H_{\text{eq}}(f)$ zu einem stabilen System?

■ Kanalschätzung, 1. Möglichkeit.²⁵

■ Annahmen:

- Eingangsprozess (Eingangssignal) $X(t)$
- Ausgangsprozess (Empfangssignal) $Y(t)$
- Kanal ist stationär mit unbekannter Impulsantwort $k(t)$

- Ist $Y(t) = X(t) * k(t)$, so folgt für das Kreuzleistungsdichtespektrum²⁶:

$$\Phi_{XY}(f) = \mathcal{F} \{ \varphi_{XY}(\tau) \} \stackrel{(a)}{=} \Phi_{XX}(f) \cdot K(f)$$

- Besteht der Eingang aus weißem Rauschen mit Leistungsdichtespektrum $\Phi_{XX}(f) = \frac{N_0}{2}$, so folgt:

$$K(f) = \frac{2\Phi_{XY}(f)}{N_0}$$

²⁵Zur besseren Analogie zu [JW02] sind hier Sende- und Empfangsprozess als $X(t)$ und $Y(t)$ bezeichnet, sie entsprechen „unserem“ $s(t), r(t)$.

²⁶**Übung:** Rechnen Sie Schritt (a) nach.

- *Kanalschätzung, 1. Möglichkeit: (ctd.)*

- **Erinnerung:**

$$K(f) = \frac{2\Phi_{XY}(f)}{N_0}$$

- Inverse Fourier-Transformation liefert

$$k(\tau) = \frac{2}{N_0} \varphi_{XY}(\tau)$$

- Schätzung der Kanalimpulsantwort durch Senden eines (pseudo-)weißen Signals und Berechnen der Korrelation mit dem Empfangssignal:

$$X(t) \text{ senden} \rightarrow Y(t) \text{ empfangen} \rightarrow \hat{\varphi}_{XY}(\tau) \rightarrow \hat{k}(\tau)$$



■ Kanalschätzung, 2. Möglichkeit:²⁷

- Sende bekannte Sequenz $x[n]$
- Beobachte Ausgangsfolge (mit unbekanntem $k[n]$)

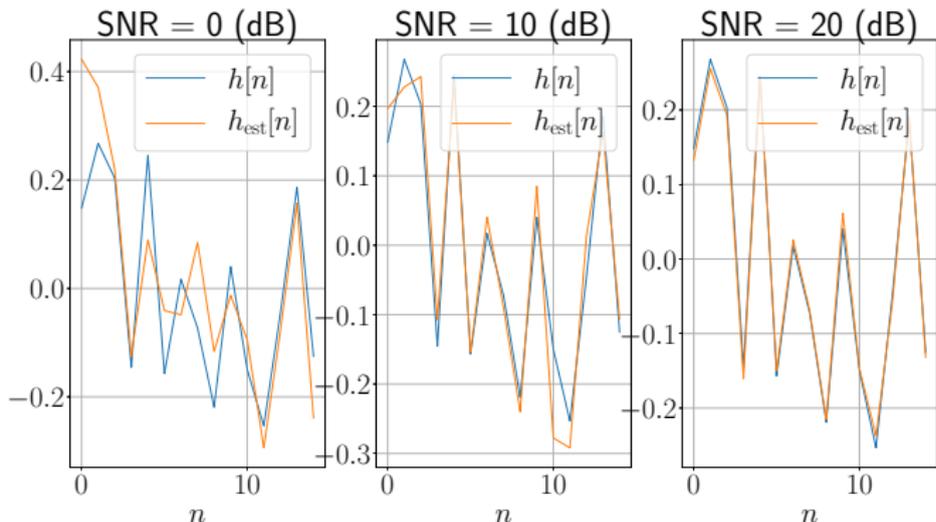
$$r[n] = k[n] * x[n] + \tilde{n}[n]$$

- Stelle ein lineares Gleichungssystem zwischen $x[n]$, $k[n]$, $y[n]$ auf
- Berechne Lösung gemäß gewisser Kriterien (etwa *Least-Squares-Lösung*)
- **Bemerkung:** Die Länge der Impulsantwort muss hierzu bekannt sein; sie kann aus den Ausbreitungsbedingung zumindest approximativ bestimmt werden.

²⁷Nicht in [Jon11] dargestellt, aber intuitiv.



- *Kanalschätzung, 2. Möglichkeit: (ctd.)*
 - **Beispiel:** LS-Schätzer für eine Impulsantwort der Länge 15; Eingangssignal ist eine BPSK-modulierte pseudozufällige Folge der Länge 31



■ *Decision Feedback Equalizer:*

■ **Annahmen:**

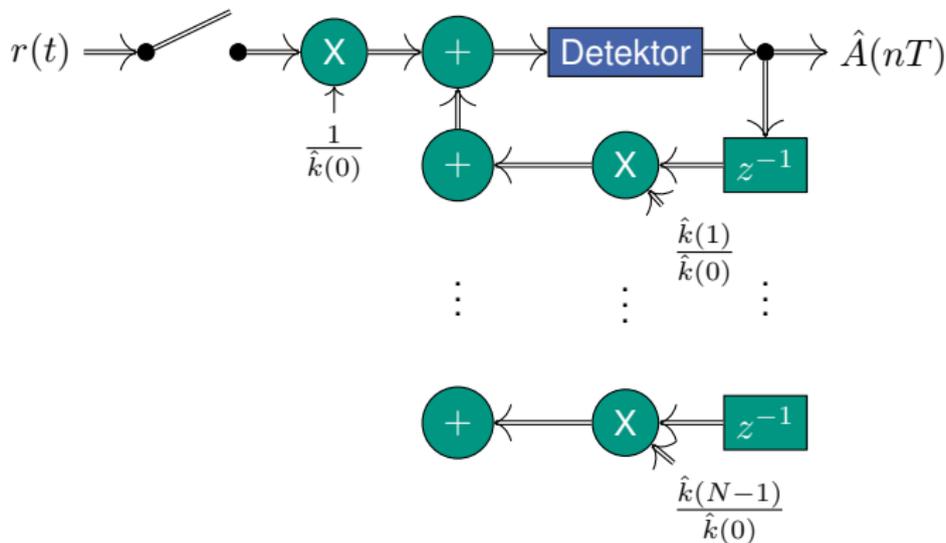
- Kanal ist stationär
- Kanal ist kausal und nur N Abtastwerte sind ungleich 0

■ **Konsequenz:**

$$r(mT) = A(mT)k(0) + \sum_{n=1}^{N-1} A(mT - nT)k(nT)$$

■ Decision Feedback Equalizer, DFE

- **Idee:** Subtrahiere die bereits entschiedenen Symbole und beseitige so die ISI
- **Problem:** Fehlerfortpflanzung



- **Feststellung:** Alle bisherigen Betrachtungen sind nur für stationäre Kanäle gültig. *Mobilfunkkanäle sind nicht stationär.*
- **Lösung:**
 - Übertragungen aufgeteilt in Bursts²⁸
 - Schätzung des Kanals pro Burst mithilfe bekannter Symbole
- **Illustration:**²⁹ Präambel und Midambel



²⁸Wie beim Vielfachzugriff diskutiert.

²⁹PN = *Pseudo-Noise*

■ Bemerkung:

- Die dargestellten Methoden stellen nur einen Bruchteil des möglichen dar und sollen lediglich eine Idee dafür vermitteln, was prinzipiell zu tun ist. Details siehe weiterführende Vorlesungen.

6 Empfangssignalverarbeitung

- Synchronisation
- Entzerrung
- **Beispiele**
- Lernziele
- Literatur

- Systemdesign
 - Bursts der Länge („aktive“) 148 Bit, entsprechend ca. 0.5 ms
 - Verwenden einer Midambel der Länge 26 Bit (für „normale“ Bursts)
- Synchronisation
 - Regelmäßige Übertragung eines *frequency correction bursts* zur Frequenzschätzung
 - Verwendung eines *Timing Advance*, so dass Signale synchron an der Basisstation eintreffen
- Entzerrung
 - Methode nicht im Standard festgelegt \implies Freiheitsgrad der Hersteller
 - Meist: Viterbi-Entzerrung, ähnlich Viterbi-Decodierung

³⁰Nach [Mol11]

- Verfahren ist OFDM-basiert (siehe Kap. 7)
- Synchronisation
 - *Primary and Secondary Synchronization Signals (PSS, SSS)*
 - PSS mit Zadoff-Chu-Sequenz: Zeit-Frequenz-Synchronisation durch Bestimmen des Korrelationsmaximums
- Entzerrung
 - Vereinfacht sich durch OFDM zu „one-tap equalizer“ (simple Multiplikation im Frequenzbereich; vgl. Kap. 7)
 - Verteilung der Piloten (bekannte Symbole) in der Zeit-Frequenz-Ebene und Schätzung der Werte zwischen den Piloten wichtig

6 Empfangssignalverarbeitung

- Synchronisation
- Entzerrung
- Beispiele
- **Lernziele**
- Literatur



- Die folgende Aufstellung fasst die zentralen Punkte der behandelten Kapitel zusammen.
- Es wird aufgezeigt, welche Punkte nach Bearbeitung der Kapitel klar sein sollten.
- **Hinweise:**
 - Die Auflistung ist nicht vollständig, sondern führt die wichtigsten Aussagen auf; nicht erwähnte Inhalte sind dennoch bedeutsam.
 - Oft enthalten die Nachweise wichtige Ideen; diese also nicht vernachlässigen.
 - Stets versuchen, Gleichungen in Verbindung mit Interpretationen und Anwendungen zu sehen
 - Des weiteren sollten alle kleinen nützlichen Ergänzungen verstanden sein.
 - Es ist immer eine gute Idee, etwas Gelerntes im Rechner umzusetzen. Dies hilft beim Verständnis und schärft das Bewusstsein für mögliche Probleme.

Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- Notwendigkeit einer Synchronisation; Auswirkungen bei falscher Synchronisation
- Welche Parameter sind zu bestimmen?
- PLL und deren Funktionsweise
- Trägerrückgewinnung durch Quadratur; warum notwendig, welche Nachteile?
- Grundidee der Bestimmung von Symboltakt und Abtastzeitpunkt

Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- Grund und Auswirkungen von ISI
- Notwendigkeit der Entzerrung
- Grundidee der Entzerrung als „Kanalinvertierung“
- Kanalschätzung mittels Kreuzleistungsdichtespektrum oder Gleichungslösung
- DFE als FIR-Filter, das den Kanal „rückrechnet“
- Was tun im Mobilfunkkanal? (nicht stationär)

6 Empfangssignalverarbeitung

- Synchronisation
- Entzerrung
- Beispiele
- Lernziele
- Literatur



- [Jon11] F. Jondral, *Nachrichtenübertragung*, Schlembach, 4. Auflage, 2011
- [Pra11] R. Prasad, *Globalization of mobile and wireless communications: today and in 2020*, Springer, 2011
- [Mol11] A. Molisch, *Wireless Communications*, Wiley, 2011
- [Gol05] A. Goldsmith, *Wireless Communications*, Cambridge University Press, 2005
- [PS08] J. Proakis, M. Salehi, *Digital Communications*, McGraw-Hill, 2008
- [Kam04] K.-D. Kammeyer, *Nachrichtenübertragung*, Teubner, 2004
- [JW02] F. Jondral, A. Wiesler, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und stochastische Prozesse*, Teubner, 2002



Nachrichtentechnik I – Systemkonzepte

Holger Jäkel

Communications Engineering Lab (CEL)



- 7 Systemkonzepte
 - Spreizverfahren
 - Mehrträgerübertragung
 - MIMO-Systeme
 - Lernziele
 - Literatur

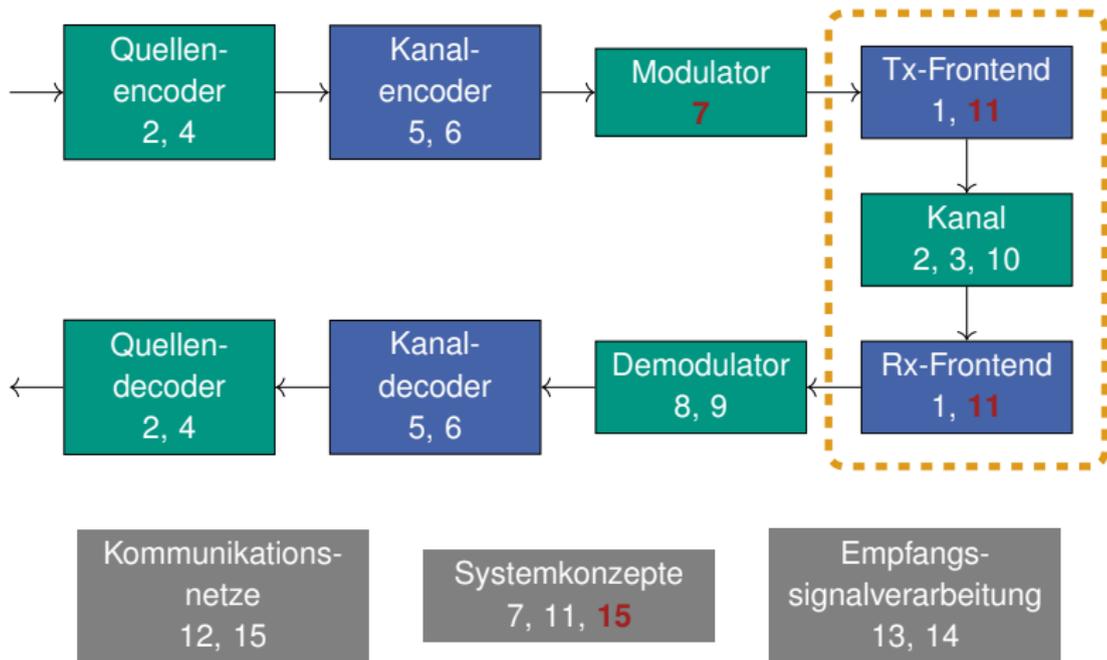


- Folgende Diskussionen erfolgen gemäß¹

[Jon11]: F. Jondral, *Nachrichtenübertragung*, Schlembach, 4. Auflage, 2011

¹Von dort entstammt die Struktur der Folien, die Formeln und die meisten Bilder.

Einordnung der Kapitel von [Jon11]



- 7 Systemkonzepte
 - Spreizverfahren
 - Mehrträgerübertragung
 - MIMO-Systeme
 - Lernziele
 - Literatur



■ Grundidee:

- Verwendung eines „Fingerabdrucks“ pro Nutzer
- Korrelation zur Wiedergewinnung der Information

■ Bemerkungen:

- Spreizverfahren vollzieht ein *Spreizen* der Information, indem ein „unnötig großer Frequenzbereich genutzt wird“ \implies Verschiedene Möglichkeiten:
 - *Direct Sequence Spread Spectrum, DSSS* \rightarrow das im Folgenden Dargestellte
 - *Frequency Hopping Spread Spectrum, FH-SS*
- Verteilung der Sendeleistung auf breiteren Frequenzbereich macht es unwahrscheinlicher, dass das Signal gestört wird, sei es unabsichtlich (*interference*) oder absichtlich (*jamming*) \implies Robustheit



- Verwendung eines DSSS² mit *Spreadfaktor*³ L durch

$$g_i(t) = \sum_{\ell=1}^L c_{i,\ell} \cdot g_{R,T_c}(t - \ell T_c), \quad T_c < T_b$$

wobei die *Chips* $c_{i,\ell} \in \{-1, 1\}$ für den Nutzer charakteristisch sind.

- Das modulierte und pulsgeformte Signal wird mit der Signatur multipliziert:⁴

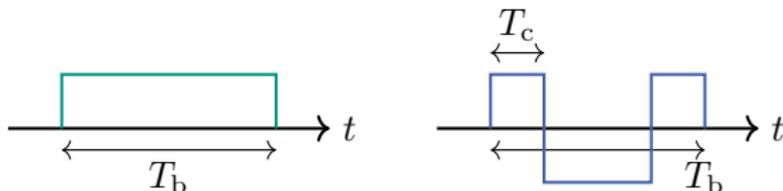
$$A(nT)g_{R,T_b}(t) \quad \rightarrow \quad A(nT)g_{R,T_b}(t) \cdot g_i(t - nT)$$

²**Hinweis:** Im Folgenden zur Verdeutlichung alles mit Rechteckpulsformung.

³**Frage/Übung:** Können Sie erklären, was hier „gespreizt“ wird?

⁴**Achtung:** Bei Simulationen auf Normierung achten.

- **Illustration:** (Rechteckpulsformung, $L = 4$)



- **Bemerkungen:**

- In der Definition „passt“ die Länge der Signatur genau zur Symboldauer; dies sind sogenannte *short codes*. Bei *long codes* ist die Signatur länger als die Symboldauer.
- Letztlich entspricht bei short codes die Anordnung Pulsformung–Spreizung der Verwendung einer „komplizierten Pulsformung“ mit der Pulsform $g_{R, T_b}(t)g_i(t)$.

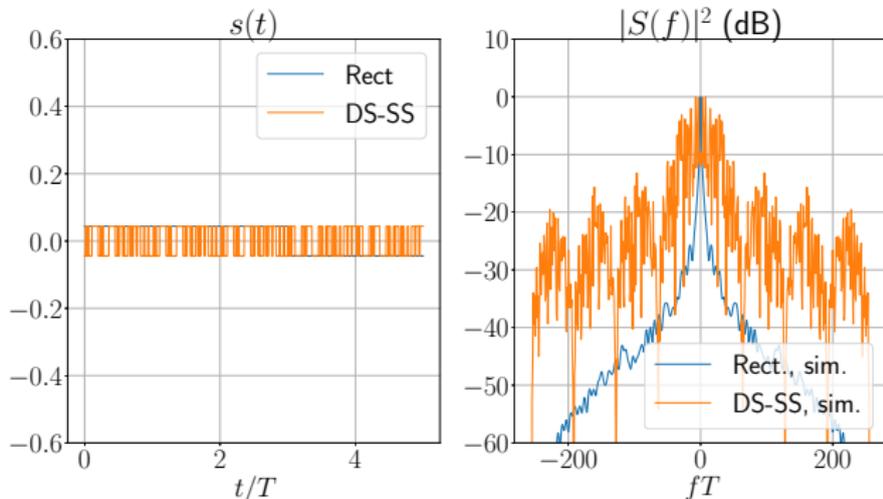
- **Beobachtung:** Dauer eines Teilpulses im Zeitbereich um Faktor T_b/T_c kleiner \implies Belegte Bandbreite um den Faktor T_b/T_c größer \implies Spreizfaktor SF ist:

$$\text{SF} = \frac{T_b}{T_c} = \frac{B_c}{B_b}$$

- **Empfänger:** Korrelation mit der Signatur \implies Signaturen erfüllen im Idealfall (bis auf Vorfaktor):

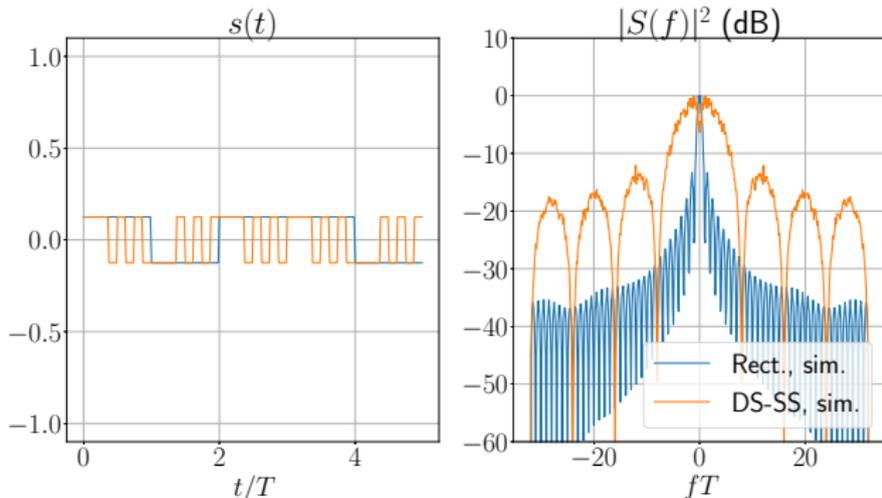
$$\int_0^{T_b} g_i(t)g_j(t)dt = \delta_{ij}$$

- **Beispiel:**⁵ Spreizsignal mit $L = 64$ Chips pro Symbol; Schätzung des Spektrums anhand von 100 Symbolen und 10 Realisierungen



⁵ Datei: dsss.ipynb

- **Beispiel:**⁶ Spreadsignal mit $L = 8$ Chips pro Symbol; Schätzung des Spektrums anhand von 100 Symbolen und 100 Realisierungen⁷



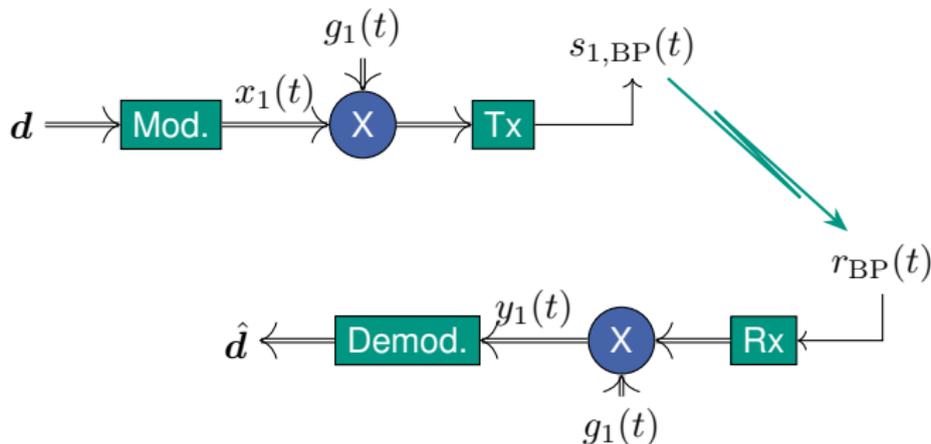
⁶ **Datei:** dsss.ipynb

⁷ **Hinweis:** Die Spreizfolge („Chips“) wurde hier für jede Realisierung neu ausgewürfelt, um ein mittleres Spektrum zu erhalten.

■ DSSS-System: (aus Sicht von Nutzer 1)⁸

- Daten werden zu $x_1(t)$ moduliert und mit $g_1(t)$ gespreizt („Doppelmodulation“)
- Aufbringen auf den Träger
- Gesamt:

$$s_1(t) = x_1(t)g_1(t)$$



⁸Zur besseren Intuition kann man sich dies jeweils pro Symbol der Dauer T_b vorstellen.

- *DSSS-System: (ctd.)*

- Im Empfänger überlagern sich mehrere DSSS-Signale verschiedener Nutzer⁹

$$r(t) = \sum_{i=1}^N x_i(t)g_i(t)$$

- Setzt man für die Nutzer eine Rechteckpulsformung an, so folgt:

$$r(t) = \sum_{i=1}^N A_i g_i(t), \quad 0 \leq t < T$$

⁹**Annahme:** Synchroner Überlagerung; Rauschen wird vorläufig vernachlässigt.



■ DSSS-System: (ctd.)

- Nutzer 1 multipliziert mit seiner Signatur und erhält $y_1(t)$
- Integration von $y_1(t)$ über $[0, T_b]$ liefert das Datensymbol von Nutzer 1:¹⁰

$$\begin{aligned}\int_0^{T_b} y_1(t) dt &= \int_0^{T_b} r(t) \cdot g_1(t) dt \\ &= \int_0^{T_b} \left(\sum_{i=1}^N A_i g_i(t) \right) \cdot g_1(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^N A_i \int_0^{T_b} g_i(t) g_1(t) dt \\ &\stackrel{(a)}{=} A_1\end{aligned}$$

¹⁰**Hinweis:** (a) gilt, da die Signaturen orthogonal sind und Energie 1 besitzen.

■ Bemerkungen:

- Bisherige Betrachtungen setzen ein synchrones System und orthogonale Signaturen voraus. Ist dies nicht erfüllt, so verschwinden die Beiträge der anderen Nutzer nicht komplett. Es entsteht *Multiple Access Interference, MAI*. [Mol11]
- Sind die Signaturen nicht orthogonal, so ist das System anfällig für Leistungsunterschiede zwischen den Nutzern; näher gelegene Nutzer können die Signale der anderen Nutzer signifikant stören. → *near-far effect* [Gol05]
- Lösung für die genannten Probleme: *Multi-user Detektoren*¹¹

¹¹ **Frage:** Was wäre wohl optimal...?!?



Hinweise

- Sofern bereits Samples vorliegen (etwa im Chiptakt) werden die Korrelationen durch zeitdiskrete Summen bzw. Innenprodukte gebildet.
- Falls die Samples der Signaturen/Codes die Amplitude ± 1 besitzen, so ist im diskreten Fall der Vorfaktor $1/L$ wichtig, damit

$$\langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j \rangle = \delta_{ij}$$

gültig ist. Andernfalls wäre der dem Demodulator zugeführte Wert mit L skaliert.

■ Beispiel: (Klausur 2018F)

- Samples eines CDMA-Systems mit zwei Nutzern, die jeweils BPSK verwenden, und Rauschen:

$$\mathbf{r} = (2.51, 0.72, -0.29, -1.6, 0.90, -3.15, 0.40, 2.83)$$

- Code von Nutzer 1: $\mathbf{c}_1 = (+1, +1, -1, -1)$
- Entspreizt:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{r}[1 : 4], \mathbf{c}_1 \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 r_i \cdot (\mathbf{c}_1)_i \\ &= \frac{1}{4} (2.51 \cdot (+1) + 0.72 \cdot (+1) - 0.29 \cdot (-1) - 1.6 \cdot (-1)) \\ &= 1.28 \\ \langle \mathbf{r}[5 : 8], \mathbf{c}_1 \rangle &= \dots = -1.37\end{aligned}$$



- **Feststellung:** Die Signaturen fußen auf Codes.
- **Frage:** Welche Codes gibt es? Welche Vor- und Nachteile haben sie?¹²
- **Hinweis:** Die Notation/Konstruktion arbeitet teilweise auf 0/1, teilweise auf 1/-1. Die Darstellungen sind gemäß $s = (-1)^b$ ineinander überführbar.

¹²Die folgenden Folien stellen nur in Kürze 3 Codes dar. In diesem reichhaltigen Feld gibt es weit mehr zu entdecken.



- *Orthogonal Variable Spreading Factor, OVSF, Codes*¹³
 - Konstruktion über Codebaum (→ Tafel)
 - Starte mit 1
 - In der nächsten Stufe kopiere im oberen Zweig dieselbe Folge dahinter, im unteren Zweig kopiere das Negative der Folge
 - Wiederhole bis gewünschte Länge erreicht ist.
 - **Bemerkungen:**
 - Hohe Spreizfaktoren \implies lange OVSF Folgen; niedrige Spreizfaktoren \implies kurze OVSF Folgen
 - Codefolgen unterschiedlicher Länge sind orthogonal, falls das System synchronisiert ist und sie im Codebaum nicht auf demselben Pfad zur Wurzel liegen.
 - In UMTS als Teilnehmer-spezifische Signaturen verwendet.

¹³Familie der OVSF-Folgen enthält dieselben Elemente wie die Familie der Walsh-Folgen.

■ *m*-Folgen

- Konstruktion durch linear rückgekoppelte Schieberegister
- Darstellung der Rückkopplungsbranche durch ein Polynom (vgl. Kap. 4)
- Bei geeigneter Form des Polynoms ergeben sich Folgen mit maximal möglicher Periode¹⁴

■ **Bemerkungen:**

- *m*-Sequenzen sind gute „pseudozufällige“ Sequenzen
- *m*-Sequenzen besitzen gute AKF-Eigenschaften

¹⁴Bedenke: Alles, was mit einem Schieberegister erzeugt wird, ist inhärent periodisch: L Register \implies max. Periode $2^L - 1$ (**Übung:** Wieso „-1“?)



- *Gold-Folgen*

- Entstehen durch XOR-Addition zweier geeigneter *m-Folgen*

- **Bemerkungen:**

- „Gute“ KKF-Eigenschaften
- Verwendung von Gold-Folgen mit 38400 Chips bei UMTS im UL und DL (jeweils andere) als zellspezifische Folgen

- UMTS basiert auf CDMA mit der Chiprate 3.84 MChip/s
- Frames der Länge 10 ms besitzen 15 Slots der Dauer 0.667 ms (2 560 Chips)
- „Channelization Codes“: Trennung der Nutzer; OVSF-Codes
- „Scrambling Codes“: Trennung von Zellen und/oder Nutzer; Vermeidung nicht-idealer Channelization Codes; short-Code und long-Code (letzterer ist ein Gold-Code)



- 7 Systemkonzepte
 - Spreizverfahren
 - Mehrträgerübertragung
 - Grundprinzip
 - OFDM: Signal und Erstellung
 - Cyclic Prefix
 - Aufbau eines OFDM-Systems
 - Beispiele
 - Einträgerübertragung
 - MIMO-Systeme
 - Lernziele
 - Literatur



■ Motivation:

- Systeme der Nachrichtenübertragung sind einfacher handzuhaben, wenn der Puls nicht verzerrt wird. (vgl. Beispiel in Kap. 2)
- In Mehrwegeszenarien entstehen Überlappungen der Symbole durch Echos, *Inter-Symbol-Interferenzen, ISI*
- Beides sind unerwünschte Effekte. Wie könnten diese vermieden werden?

■ Lösungen:

- Verändere das Signal so, dass der Kanal im Frequenzbereich als konstant angesehen werden kann.
- Verlängere die Dauer eines Symbols, so dass die Überlappung vernachlässigbar/erträglich wird.



Begrifflichkeiten

- *Kohärenzzeit*: Beschreibt anschaulich die Zeit, in der der Kanal als konstant angenommen werden kann; Formelzeichen:¹⁵ T_C
- *Kohärenzbandbreite*: Beschreibt anschaulich die Bandbreite, über welche der Kanal als konstant angenommen werden kann; Formelzeichen:¹⁶ B_C

¹⁵In dieser Vorlesung wie in Kap. 2 als T_C ; [Jon11] bezeichnet dies als τ_K

¹⁶In dieser Vorlesung wie in Kap. 2 als B_C ; [Jon11] bezeichnet dies als B_K



■ Ansatz:

- S/P-Wandlung: Umsetzung eines hochratigen seriellen Datenstroms in mehrere niederratige parallele Datenströme
- Verteilung der Datenströme auf verschiedene Frequenzen („Unterträger“)
- Bei Verwendung von N Unterträgern:

$$\text{Symboldauer: } T \mapsto T_N = T \cdot N$$

$$\text{Symbolrate (pro Unterträger): } R_S \mapsto R'_S = R_S / N$$

■ Folgerungen:

- Symboldauer pro Unterträger um Faktor N größer \implies weniger ISI \implies Entzerrung („Kanalrückrechnen“) wird deutlich einfacher



- **Feststellung:** Die Verwendung von N Unterträgern würde N Oszillatoren benötigen?!?
- **Lösung:** Erzeuge Unterträger digital \implies *Orthogonal Frequency Division Multiplexing, OFDM*
- **Entwurfsziele:**
 - Dauer eines OFDM-Symbols kleiner als *Kohärenzzeit* des Kanals: $T_N < T_C$
 - Unterträgerabstand kleiner als *Kohärenzbandbreite* des Kanals: $\Delta f < B_C$

Damit wird der Kanal pro Unterträger durch einen skalaren Faktor beschrieben. [Jon11]

■ Ansatz:

- N (serielle, komplexwertige) Sendesymbole $A(0), \dots, A((N - 1)T)$ werden zu einem OFDM-Symbol zusammengefasst. Für die Symbolauern gilt damit:

$$T_N = N \cdot T$$

- Der Unterträgerabstand wird invers zur Symboldauer gewählt:

$$\Delta f = \frac{1}{T_N}$$

- **Bemerkung:** Die Signale der Unterträger lauten damit bei rechteckiger Pulsformung¹⁷

$$s_n(t) = \sqrt{T_N} g_R \left(t - \frac{T_N}{2} \right) \cdot e^{j2\pi n \Delta f t}, \quad n = 0, \dots, N - 1.$$

Für diese Signale gilt^{18 19}

$$\int_0^{T_N} s_\ell(t) s_n^*(t) dt = T_N \cdot \delta_{\ell n},$$

d. h. die Signale der Unterträger sind bei Rechteckpulsformung orthogonal.

¹⁷Der Vorfaktor $\sqrt{T_N}$ wird verwendet, um ab der zweiten Gleichung die Amplitude 1 zu erreichen.

¹⁸**Nachweis: Übung**

¹⁹**Erinnerung:** $\delta_{\ell n} = \begin{cases} 1, & \ell = n \\ 0, & \ell \neq n \end{cases}$

- **Bemerkung:** Das OFDM-Signal ergibt sich durch Addition der Unterträgersignale mit Aufträgen der Symbole und lautet:

$$s(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A(nT) \cdot \sqrt{T_N} g_R \left(t - \frac{T_N}{2} \right) \cdot e^{j2\pi n \Delta f t}, \quad 0 \leq t < T_N$$
$$\stackrel{(a)}{=} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A(nT) \cdot e^{j2\pi \frac{n}{T_N} t}, \quad 0 \leq t < T_N,$$

wobei in (a) die Eigenschaft $\Delta f = 1/T_N$ und die Rechteckpulsform eingesetzt wurden.

- **Beobachtung:** „Sieht beinahe aus wie eine IDFT“.



- **Nächster Schritt:** Abtastung von $s(t)$ mit der Abtastzeit T liefert:

$$\begin{aligned} s(kT) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A(nT) \cdot e^{j2\pi \frac{n}{T_N} t} \Big|_{t=kT} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A(nT) \cdot e^{j2\pi \frac{n}{T_N} kT} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A(nT) \cdot e^{j2\pi \frac{n}{NT} kT} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A(nT) \cdot e^{j2\pi \frac{nk}{N}}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned}$$

■ Erinnerung:

$$s(kT) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A(nT) \cdot e^{j2\pi \frac{nk}{N}}, \quad 0 \leq k \leq N - 1$$

Beobachtung: „Sieht genau aus wie eine IDFT“. \implies Samples des OFDM-Signals entstehen als IDFT²⁰ der Sendesymbole.

²⁰Praktisch natürlich der IFFT...



■ Beobachtungen:

- Mit wachsendem N wird der relative Anteil der ISI kleiner und der Unterträgerabstand sinkt.
- Es verbleibt stets Rest-ISI.
- System empfindlich gegenüber Interferenz zwischen den Trägern, *Inter-Carrier-Interference, ICI* ²¹

■ Lösung: *Guard-Intervall*

²¹ **Übung:** Können Sie das erklären?



■ Ansatz:

- Einführen eines *Guard-Intervalls* der Länge

$$T_G \geq \tau_{\max},$$

wobei τ_{\max} die maximale Länge des Kanaleinflusses beschreibt. Die Gesamtdauer des OFDM-Symbols ist dann:

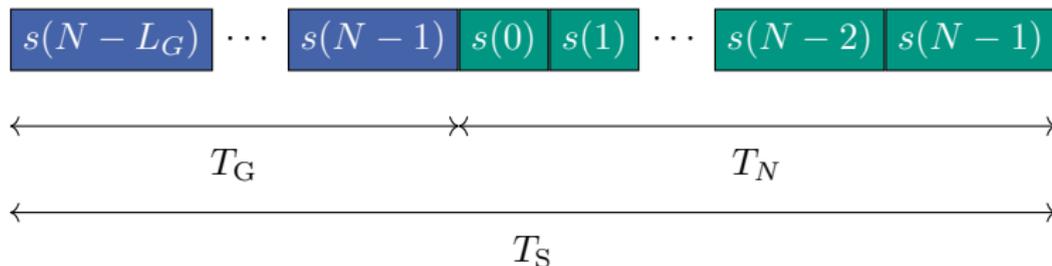
$$T_S = T_N + T_G$$

⇒ Kein Überlappen der Symbole mehr!

- **Frage:** Was wird in dem Guard-Intervall gemacht? Schweigen? Irgendetwas Cleveres?

■ Ansatz: (ctd.)

- Während des Guard-Intervalls wird nicht „geschwiegen“, sondern ein Teil des OFDM-Symbols am Anfang zyklisch wiederholt: *Cyclic Prefix*



■ Bemerkungen:²²

- Durch Cyclic Prefix (CP)
 - wird die *Datenrate reduziert*, da Daten doppelt übertragen werden.
 - entsteht umgerechnet *SNR-Verlust*, da keine neue Information übertragen wird.
- Anstelle des Cyclic Prefix könnte auch ein *Zero Prefix (ZP)* verwendet werden. Dies würde keine Leistung verschwenden!?
- **Frage:** Wieso könnte CP doch eine gute Wahl sein?
- **Hinweis:** Denken Sie an die inhärente Zyklizität der DFT!
- **Aussage:**²³ Durch CP wird erreicht, dass der Kanal pro Unterträger lediglich eine Multiplikation durchführt und die Orthogonalität zwischen den Unterträgern erhalten bleibt.

²²Siehe beispielsweise [Mol11], [Gol05].

²³Nachweis siehe [Mol11]

- **Hinweis:** (Abgrenzung τ_{\max} und T_C)
 - τ_{\max} ist die maximale Verzögerung aller Echos. Anschaulich: Wie lange schwingt der Kanal nach? (\rightarrow *Verzögerung*)
 - T_C ist die Kohärenzzeit des Kanals. Anschaulich: Wie schnell ändert sich der Kanal (\rightarrow *Dynamik*)

■ Vorgehen zur Verwendung des CP:

- Länge des Cyclic-Prefix in Samples:

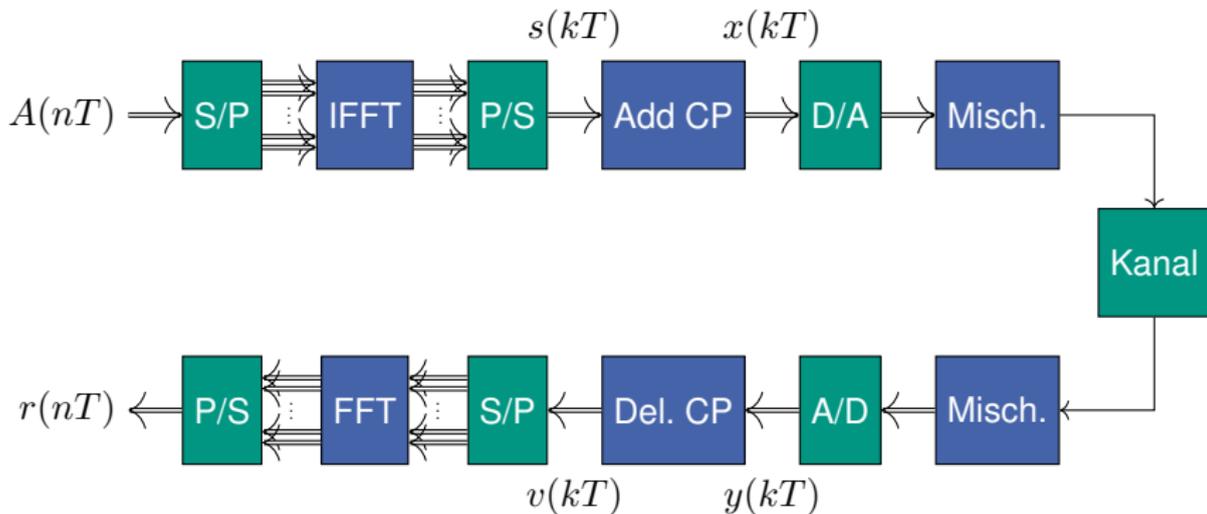
$$L_G = \left\lceil \frac{T_G}{T} \right\rceil = \left\lceil \frac{T_G N}{T_N} \right\rceil$$

- Erweiterung von $s(kT)$ um L_G Samples:

$$x(kT) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A(nT) \cdot e^{j2\pi \frac{nk}{N}}, \quad -L_G \leq k \leq N - 1$$

Demnach entspricht $x(kT)$ genau $s(kT)$ ergänzt um die zyklische Erweiterung.

■ Aufbau des Gesamtsystems:



- *OFDM-Empfänger* macht alle Operationen rückgängig:
 - Signal nach dem D/A-Wandler:

$$y(kT), \quad k = -L_G, \dots, N - 1$$

- Signal nach Beseitigen des Cyclic-Prefix:

$$v(kT) = y(kT), \quad k = 0, \dots, N - 1$$

- Nach FFT folgt

$$r(nT) = \sum_{k=0}^{N-1} v(kT) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}, \quad n = 0, \dots, N - 1$$



- Aufgrund der Verwendung von OFDM inkl. des Cyclic-Prefix kann der Kanaleinfluss auf jedem Träger als flach angesehen werden.
- Die Übertragung entspricht der Verwendung von N parallelen Kanälen mit flachem Fading und Rauschen
- Es folgt:²⁴

$$r(nT) = H(nT)A(nT) + w(nT), \quad n = 0, \dots, N - 1$$

²⁴Beachte, dass die Betrachtungen im Basisband erfolgen. Somit sind alle Größen komplexe Zahlen.



- In Vektor-Schreibweise ergibt sich:

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}\mathbf{A} + \mathbf{w}$$

mit

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= (r(0T), \dots, r((N-1)T))^T \\ \mathbf{A} &= (A(0T), \dots, A((N-1)T))^T \\ \mathbf{w} &= (w(0T), \dots, w((N-1)T))^T\end{aligned}$$

und

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H(0T) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H(1T) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & H((N-1)T) \end{pmatrix}$$

■ Beispiele:²⁵ ²⁶

	DVB-T	DAB	802.11a (WLAN)
Bandbreite	6, 7, 8 MHz	1.5 MHz	16.6 MHz
Freq.	700 MHz	200/1400 MHz	5 GHz
Träger (N)	2018, 8192	1536	52
Modulation	BPSK, 4-64 QAM	DQPSK	BPSK, 4-64 QAM
Codierung	Faltung+Block	Faltung	Faltung
Durchsatz	5-31 Mbit/s	1.1 Mbit/s	54 Mbit/s
Reichweite	>100 km	100 km	200 m

²⁵Aus [BV06]

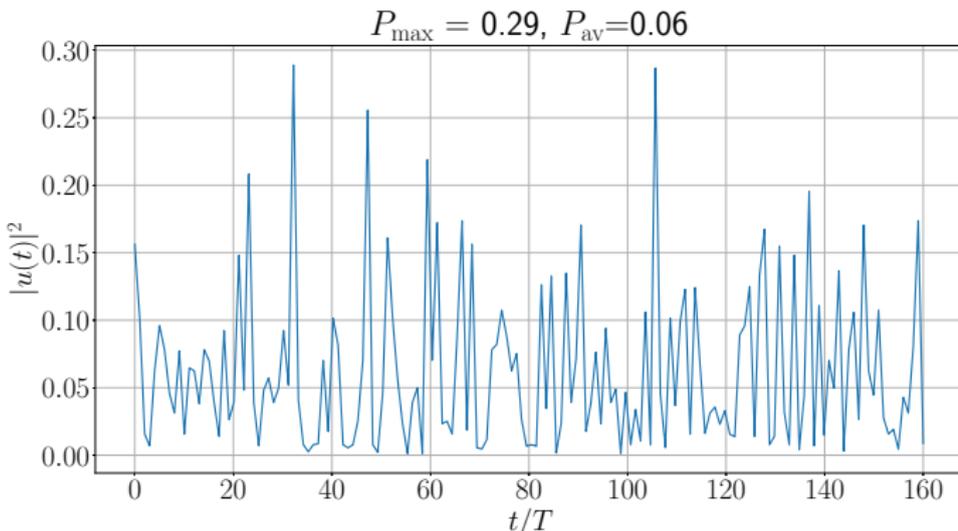
²⁶Als weiteres wichtiges Beispiel kann LTE aufgeführt werden. Dies wird in einer gesamtsystemischen Betrachtung am Ende der Vorlesung dargestellt.

- **Nachteil von OFDM:** Hohes *Peak-to-Average-Power-Ratio*, *PAPR*:

$$\text{PAPR} = \frac{P_{\max}}{P_{\text{av}}}$$

⇒ Hohe Anforderungen an Linearität der Verstärker

- **Beispiel:**²⁷ PAPR bei $T = 1$ s, $N = 16$ für 4-QAM und 10 OFDM-Symbole (entsprechend 160 Symbolen)



²⁷ **Datei:** ofdm.ipynb

- **Vorschlag:** Verwende eine im Hinblick auf PAPR optimierte Verteilung der Daten auf die Träger bzw. eine optimierte Auswahl von Unterträgern
- **Problem:** Aufwand!
- **Alternative:** Einträger-Verfahren mit Entzerrung im Frequenzbereich, *Single-Carrier, Frequency-Domain-Equalization, SC-FDE*

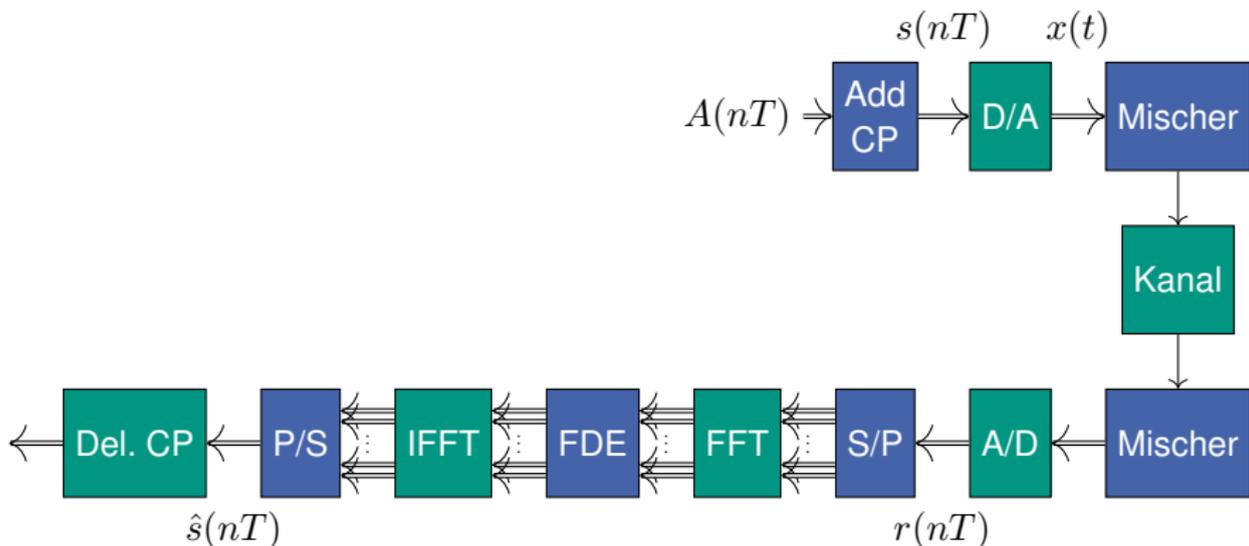
- **Ansatz:**²⁸ Einträgerübertragung wird so „organisiert“, dass die Entzerrung im Frequenzbereich stattfinden kann. \implies *Single-Carrier, Frequency Domain Equalization, SC-FDE*
- **Modell:** Abtastung des Empfangssignals mit Abtastzeit T (Symboldauer) liefert

$$r(nT) = \sum_{k=0}^{K-1} h(kT)s((n-k)T) + w(nT),$$

wobei $w(\cdot)$ das Rauschen mit Rauschleistung σ_w^2 ist und $h(\cdot)$ den Kanal inkl. Sende- und Empfangsfilter beschreibt.

²⁸Nach [Ben10]

■ Graphische Darstellung:



■ Bemerkungen:

- Letztlich sind dieselben Blöcke wie bei OFDM vorhanden
- Schutzintervall bzw. „Prefix“ dient dazu, die Faltung zirkulär zu machen
- Das Sendesignal kann teilweise im Sender in OFDM-ähnliche Frequenzaufteilung abgebildet werden. Hierzu würden Teile der möglichen Frequenzen belegt, andere hingegen freigelassen. Details sollen an dieser Stelle nicht diskutiert werden.

- 7 Systemkonzepte
 - Spreizverfahren
 - Mehrträgerübertragung
 - MIMO-Systeme
 - Grundlegende Betrachtungen
 - Das MIMO-Kanalmodell
 - Die MIMO-Kanalkapazität
 - Die Singulärwertzerlegung in MIMO
 - MIMO-Detektion
 - MIMO-Verfahren
 - Lernziele
 - Literatur

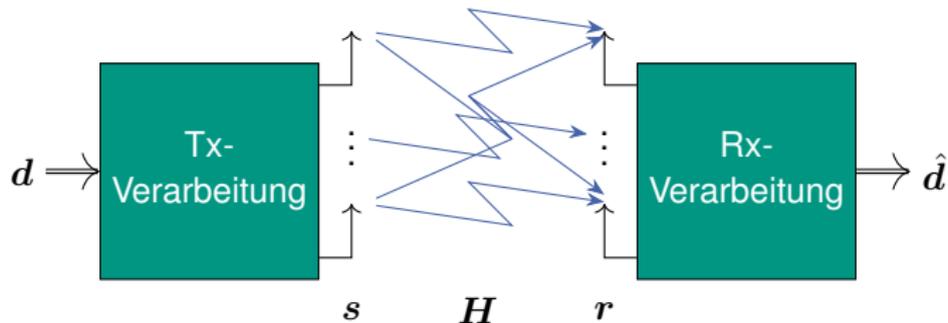
- **Bisher:** Systeme übertragen Signale auf einer Antenne
- **Idee:** Verwendung mehrerer Antennen könnte Vorteile bieten
 - Parallele Übertragung mehrerer Datenströme \implies *erhöhte Datenrate*
 - Verwendung mehrerer Ausbreitungspfade für denselben Datenstrom \implies *erhöhte Zuverlässigkeit durch Diversität*
- **Bezeichnung:**
 - Bisherige Systeme: Single-Input Single-Output, SISO
 - Nun: *Multiple-Input Multiple-Output, MIMO*²⁹

²⁹**Bemerkung:** Die Bezeichnung ist auf den Kanal bezogen zu lesen.

■ Bemerkung:

- Neben der Verwendung zur Erhöhung der Datenrate oder der Zuverlässigkeit kann mit mehreren Antennen auch Richtwirkung erzielt werden → „*beamforming*“
- Derartige Fragen werden in den folgenden (Basis-)Betrachtungen nicht diskutiert; siehe hierzu beispielsweise weiterführende Vorlesungen oder [TV08], [Mol11]

- **Modell:** System bestehend aus N_T Sende- und N_R Empfangsantennen



Hinweise

- Hier und im Folgenden werden alle Größen im Basisband betrachtet. Wie gewohnt (und anders als in [Jon11]) wird die Notation s , \mathbf{H} , r verwendet.
- Die im Folgenden verwendete Bezeichnung für die Anzahl der Sende- und Empfangsantennen weicht von [Jon11] ab. Dies wird zur Konsistenz mit der sonstigen Literatur und zur verbesserten Eindeutigkeit geändert:

N_T : Anzahl der Sendeantennen; entsprechend M in [Jon11]

N_R : Anzahl der Empfangsantennen; entsprechend N in [Jon11]



■ Modell: (ctd.)

■ Sendesignal:

- Der Sender überträgt auf N_T Antennen \implies Sendesignal ist ein *Sendevektor*

$$\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_{N_T})^T$$

- Sendeleistung pro Antenne ist $\sigma_s^2 \implies$ Gesamtsendeleistung ist

$$P_s = N_T \sigma_s^2$$

- **Hinweis:** Falls die gesamte Sendeleistung begrenzt ist, muss die Sendeleistung pro Antenne gemäß $\sigma_s^2 \sim \frac{1}{N_T}$ skalieren.
- Über jede Antenne wird eine der bekannten Modulationen übertragen

■ Modell: (ctd.)

■ Kanal:

- Ist der Kanal *frequenzflach*^{30 31}, so besteht von Tx-Antenne m zu Rx-Antenne n seine Wirkung in der Multiplikation mit einer komplexen Zahl³² $h(n, m) \in \mathbb{C}$:

$$\text{Tx}_m \rightarrow h(n, m) \rightarrow \text{Rx}_n$$

- Der gesamte Kanal ist im Basisband durch die *Kanalmatrix* beschreibbar:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h(1, 1) & h(1, 2) & \cdots & h(1, N_T) \\ h(2, 1) & h(2, 2) & \cdots & h(2, N_T) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(N_R, 1) & h(N_R, 2) & \cdots & h(N_R, N_T) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N_R \times N_T}$$

³⁰ **Hinweis:** Die Annahme eines flachen Kanals ist eine durch Systemdesign erreichbare Randbedingung, etwa indem OFDM verwendet wird.

³¹ Zur Erklärung der Eigenschaft „frequenzflach“ siehe Kapitel 2.

³² **Achtung:** Der erste Index beschreibt „wohin“ und der zweite Index „woher“.

■ Modell: (ctd.)

■ Empfangssignal:

- Empfänger addiert zirkulärsymmetrisches komplexes AWGN; es folgt

$$r_n = \sum_{m=1}^{N_T} h(n, m)s_m + w_n, \quad w_n \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2), \quad n = 1, \dots, N_R$$

- **Beachte:** An jeder Empfangsantenne überlagern sich alle Sendesignale

■ Zusammenfassen zu Vektoren liefert das MIMO-Tiefpassmodell:

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{w}$$

mit $\mathbf{r}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^{N_R}$, $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^{N_T}$ und $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N_R \times N_T}$.



■ Annahmen:

■ Kanal

- Kanalkoeffizienten sind unkorreliert
- Kanalkoeffizienten sind zirkulärsymmetrisch komplex gaußverteilt:

$$h(n, m) \sim \mathcal{CN}(0, 1)$$

⇒ $|h(n, m)|$ ist Rayleigh-verteilt; $|h(n, m)|^2$ ist exponentialverteilt³³ mit Erwartungswert 1

- **Diskussion:** Die Unkorreliertheit der Kanalkoeffizienten ist eine wichtige Voraussetzung. Dies kann beispielsweise erreicht werden, falls die Antennen zueinander mindestens den Abstand $\lambda/2$ besitzen. [Mol11]

³³**Hinweis:** Die Summe von Quadraten mittelwertfreier gaußverteilter Größen ist im Allgemeinen χ^2 -verteilt [PS08]. Für die Summe zweier Größen entspricht dies der Exponentialverteilung.

■ Annahmen: (ctd.)

■ Rauschen

- Rauschanteile der Empfangsantennen sind unkorreliert
- Rauschkoeffizienten sind zirkulärsymmetrisch komplex gaußverteilt:

$$w_n \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_w^2)$$

- Die Kovarianzmatrix des Rauschens lautet somit:³⁴

$$\mathbf{R}_{\mathbf{w}\mathbf{w}} = E((\mathbf{w} - E(\mathbf{w}))(\mathbf{w} - E(\mathbf{w}))^H) = E(\mathbf{w}\mathbf{w}^H) = \sigma_w^2 \mathbf{I}_{N_R}$$

- Das SNR pro Empfangsantenne folgt zu

$$\text{SNR} = \frac{N_T \sigma_s^2}{\sigma_w^2} = \frac{P_s}{\sigma_w^2}$$

³⁴ \mathbf{I}_{N_R} bezeichnet die Einheitsmatrix der Größe $N_R \times N_R$.



- **Frage:** Welche maximale Übertragungsrate ist mit MIMO möglich? \implies
MIMO-Kanalkapazität
- **Anschauung:** „Skaliert irgendwie“ mit N_T und N_R ?!?

■ Präludium:

- Betrachte SISO-Kanal mit Fading:

$$r = hs + w$$

- Beobachtung: Ist letztlich ein AWGN-Kanal mit Sendesignal $s' = hs \implies$ bei *bekanntem* h folgt die normierte Kanalkapazität³⁵

$$C_0 = \frac{C}{W} = \log_2(1 + \text{SNR}) = \log_2\left(1 + \frac{|h|^2 P_s}{\sigma_w^2}\right)$$

³⁵Einheit bit/s/Hz



Theorem ³⁶

Die auf die Bandbreite normierte Kanalkapazität eines frequenzflachen MIMO-Kanals lautet

$$C_0 = E \left(\log_2 \left(\frac{\det(\mathbf{R}_{ww} + \mathbf{H}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{H}^H)}{\det(\mathbf{R}_{ww})} \right) \right),$$

wobei für die Spur³⁷ der Sende-Korrelationsmatrix gilt:

$$\text{tr}(\mathbf{R}_{ss}) \leq P_s.$$

Sie wird erreicht, falls die Eingangssymbole komplex normalverteilt sind.

³⁶Nachweis siehe etwa [TV08] oder [PS08]

³⁷Die *Spur* (engl.: trace) einer Matrix ist die Summe der Diagonalelemente, $\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_i (\mathbf{A})_{ii}$.

- Sind die Eingangssymbole unabhängig und identisch verteilt, so folgt

$$\mathbf{R}_{ss} = \sigma_s^2 \mathbf{I}_{N_T}.$$

- Einsetzen der Unkorreliertheitsannahme für s und w liefert:

$$\begin{aligned} C_0 &= E \left(\log_2 \left(\frac{\det \left(\mathbf{R}_{ww} + \mathbf{H} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{H}^H \right)}{\det \left(\mathbf{R}_{ww} \right)} \right) \right) \\ &= E \left(\log_2 \left(\frac{\det \left(\sigma_w^2 \mathbf{I}_{N_R} + \mathbf{H} \sigma_s^2 \mathbf{I}_{N_T} \mathbf{H}^H \right)}{\det \left(\sigma_w^2 \mathbf{I}_{N_R} \right)} \right) \right) \\ &= E \left(\log_2 \left(\det \left(\mathbf{I}_{N_R} + \frac{\sigma_s^2}{\sigma_w^2} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right) \right) \right) \end{aligned}$$

Theorem

Die *log-det-Formel* für die Kanalkapazität eines MIMO-Kanals für unkorrelierte Eingangsgrößen und unkorreliertes Rauschen lautet:

$$\begin{aligned} C_0 &= E \left(\log_2 \left(\det \left(\mathbf{I}_{N_R} + \frac{\sigma_s^2}{\sigma_w^2} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right) \right) \right) \\ &= E \left(\log_2 \left(\det \left(\mathbf{I}_{N_R} + \frac{\text{SNR}}{N_T} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right) \right) \right) \end{aligned}$$



■ Beispiele:

- Keine Verbindung $\implies \mathbf{H} = \mathbf{0} \implies C_0 = ?$
- $N_T = N_R$ und $\mathbf{H} = \mathbf{I}_{N_R}$, dann ergibt sich $\mathbf{H}\mathbf{H}^H = \mathbf{I}_{N_R} \implies$

$$\begin{aligned}C_0 &= \log_2 \left(\det \left(\mathbf{I}_{N_R} + \frac{\text{SNR}}{N_R} \mathbf{H}\mathbf{H}^H \right) \right) \\&= \log_2 \left(\det \left(\mathbf{I}_{N_R} \left(1 + \frac{\text{SNR}}{N_R} \right) \right) \right) \\&= N_R \log_2 \left(1 + \frac{\text{SNR}}{N_R} \right)\end{aligned}$$

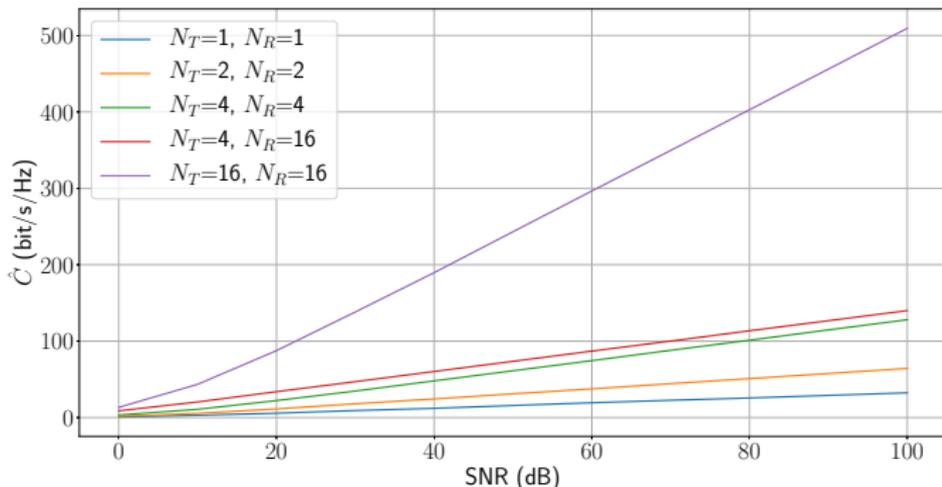
Ist SNR/N_R „klein“ (etwa N_R sehr groß), so folgt mit Taylorapprox.

$$C_0 \approx \frac{1}{\ln(2)} \text{SNR} = \log_2(e) \text{SNR}.$$

Die Kapazität kann in diesem Fall durch MIMO nicht beliebig gesteigert werden.



- **Beispiel:**³⁸ Schätzung³⁹ der Kapazität verschiedener MIMO-Systeme



³⁸ Datei: mimo.ipynb

³⁹ → Schwaches Gesetz großer Zahlen

- Erinnerung:

$$C_0 = E \left(\log_2 \left(\det \left(\mathbf{I}_{N_R} + \frac{\text{SNR}}{N_T} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right) \right) \right)$$

- Beobachtung: \mathbf{H} bzw. dessen Verteilung bestimmt die Kapazität C_0
- Frage: Von welchen Eigenschaften von \mathbf{H} hängt die tatsächliche Kapazität ab?



- **Singulärwertzerlegung (SWZ).**⁴⁰ Zu jeder Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ existieren unitäre⁴¹ Matrizen $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_R}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

mit reellen Werten⁴²

$$\sqrt{\lambda_1} \geq \sqrt{\lambda_2} \geq \dots \geq \sqrt{\lambda_R} > 0 = \sqrt{\lambda_{R+1}} = \dots, \quad R = \text{rk}(\mathbf{A})$$

und

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^H.$$

⁴⁰ ... entspricht letztlich einer Verallgemeinerung der Eigenwertzerlegung.

⁴¹ **Erinnerung:** Eine Matrix heißt *unitär*, falls $\mathbf{U}\mathbf{U}^H = \mathbf{I}$ bzw. $\mathbf{V}\mathbf{V}^H = \mathbf{I}$.

⁴² **Erinnerung:** Der Rang einer Matrix \mathbf{A} entspricht der Anzahl der unabhängigen Spalten/Zeilen der Matrix.

■ Beispiele:

- Was ist der maximale Rang R einer $N_R \times N_T$ -Matrix?
- Wie lautet die SWZ für $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{H} = \mathbf{I}_{N_R}$?
- Welche SWZ ergibt sich für

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und wie lautet R in diesem Fall?

■ Bemerkungen:

- Die Singulärwertzerlegung entspricht letztlich einer Verallgemeinerung der Eigenwertzerlegung.
- Die Singulärwerte sind die Wurzeln der Eigenwerte von $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ bzw. von $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$. Matrizen \mathbf{U} und \mathbf{V} ergeben sich als die entsprechenden Eigenvektoren.⁴³

■ Frage: Was hat das mit „unserem MIMO“ zu tun?

■ Antwort:

- Die Größe $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ taucht in der Kapazität auf
- Je mehr Singulärwerte ungleich Null sind, desto größer ist die Kapazität.

⁴³So kann man die SWZ „zu Fuß“ berechnen. Praktisch verwendet man den in fast allen Algebra-/Numerik-Frameworks vorhandenen Befehl „svd“.

- Anwendung der SWZ auf die Kanalmatrix H :

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^H\mathbf{s} + \mathbf{n}$$

- Kennt der Sender die Kanalmatrix⁴⁴, so sende $\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{V}\mathbf{s}$; es folgt

$$\mathbf{r} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^H\tilde{\mathbf{s}} + \mathbf{n} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^H\mathbf{V}\mathbf{s} + \mathbf{n} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{s} + \mathbf{n}$$

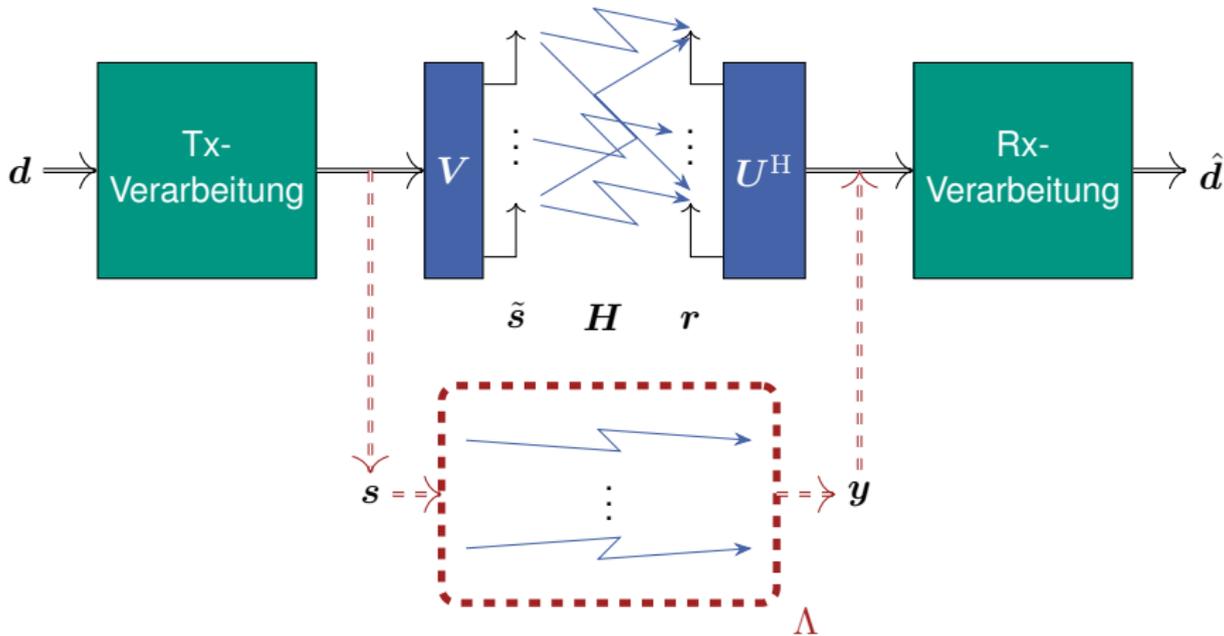
- Besitzt der Empfänger ebenfalls Kenntnis über den Kanal⁴⁵, so bilde:

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}^H\mathbf{r} = \mathbf{U}^H\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{s} + \mathbf{U}^H\mathbf{n} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{s} + \mathbf{U}^H\mathbf{n}$$

⁴⁴ Channel State Information (at the) transmitter, CSI-T.

⁴⁵ Channel State Information (at the) receiver, CSI-R.

- **Interpretation:** Sende- und Empfangssignalverarbeitung zerlegt den Kanal in R parallele (unabhängige) Kanäle, die *Eigenmoden* von H .



- **Frage:** Wie bilden sich die Singulärwerte auf die Kanalkapazität ab?
- **Antwort:** Rechnung⁴⁶ ergibt:

$$\begin{aligned}C_0 &= E \left(\log_2 \left(\det \left(\mathbf{I}_{N_R} + \frac{\text{SNR}}{N_T} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^H \right) \right) \right) \\ &\stackrel{(a)}{=} E \left(\log_2 \left(\det \left(\mathbf{I}_{N_R} + \frac{\text{SNR}}{N_T} \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^H \cdot (\mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^H)^H \right) \right) \right) \\ &= E \left(\log_2 \left(\det \left(\mathbf{I}_{N_R} + \frac{\text{SNR}}{N_T} \mathbf{\Lambda}^2 \right) \right) \right) \\ &\stackrel{(b)}{=} \sum_{i=1}^R E \left(\log_2 \left(1 + \frac{\text{SNR}}{N_T} \lambda_i \right) \right),\end{aligned}$$

$\implies R$ parallele Kanäle, deren Einzelkapazitäten addiert werden.

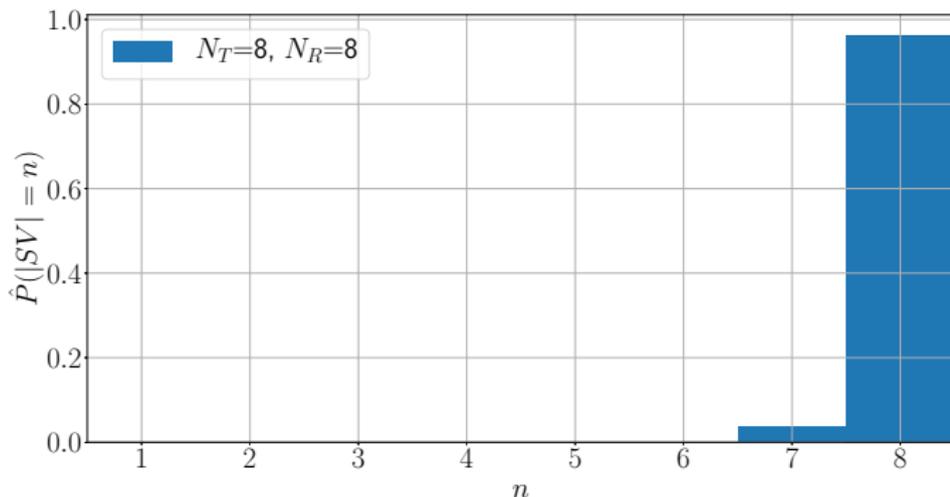
⁴⁶(a) ist SWZ und (b) nutzt aus, dass in $\det(\cdot)$ eine Diagonalmatrix steht.

■ Bemerkungen:

- Kanalkennntnis wird in der nachrichtentechnischen Literatur meist unter der englischen Bezeichnung *channel state information*, *CSI* notiert. Dementsprechend versteht sich CSI-T/CSI-Tx und CSI-R/CSI-Rx
- Die Anzahl der Singulärwerte bzw. der Rang hängt von der Realisierung der Kanalmatrix \mathbf{H} ab.

- **Frage:** Wie groß ist die Anzahl der Singulärwerte ungleich null nun eigentlich?

- **Beispiel:**⁴⁷ Histogramm der Singulärwertanzahl von \mathbf{H} für $N_T = N_R = 8$ bei 10^3 Realisierungen bei $h_{ij} \sim \mathcal{CN}(0, 1)$. Ein Wert mit Betrag kleiner 0.25 wurde als null gewertet.⁴⁸



⁴⁷ **Datei:** mimo.ipynb

⁴⁸ **Hinweis:** Tatsächlich ist die Wahrscheinlichkeit vollen Rang zu beobachten somit sogar noch größer.

Übung/Frage: Können Sie das Ergebnis anschaulich mit „Bordmitteln“ aus HM und WT erklären?



■ Szenario:

- Bisher war die Eingangsleistung auf den Sendeantennen gleichverteilt; wie verteilen wir sie aber auf die Eigenmoden?
- **Modell:** Gegeben sind R parallele AWGN-Kanäle⁴⁹

$$r_i = x_i + n_i, \quad n_i \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_i^2), \quad i = 1, \dots, R$$

⁴⁹Beispielsweise die vorher hergeleiteten Eigenmoden. Dort ist das Rauschen von i unabhängig und das Signal wird mit $\sqrt{\lambda_i}$ multipliziert. Die nun gewählte Darstellung über unterschiedliches Rauschen mit identischem Signal-Vorfaktor ist leichter handhabbar.



- **Frage:** Wie soll die zur Verfügung stehende Sendeleistung P_s auf die Kanäle verteilt werden?

$$P_s \mapsto (P_1, \dots, P_R) \text{ mit } \sum_{i=1}^R P_i = P_s$$

- **Optionen:**

- Alle Leistung auf die guten Kanäle, da diese mehr „hergeben“
- Schwache Kanäle erhalten mehr Leistung, damit alle ähnlich gut sind



Theorem ⁵⁰

Für parallele AWGN-Kanäle wird die Gesamtkapazität durch *Waterfilling* maximiert, indem die Sendeleistung gemäß

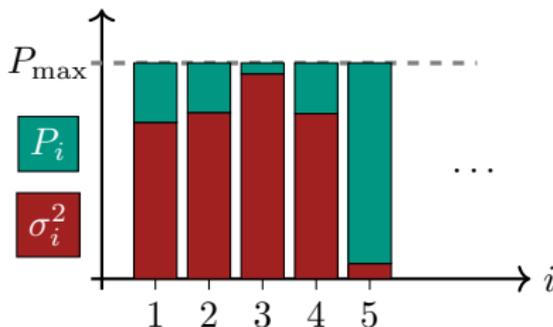
$$P_i = \begin{cases} P_{\max} - \sigma_i^2, & \sigma_i^2 < P_{\max} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, R$$

aufgeteilt wird. Insgesamt muss $\sum_{i=1}^R P_i = P_s$ gelten, wodurch sich P_{\max} ergibt.

⁵⁰Nachweis: Siehe [CT06]



■ Illustration: (Waterfilling)



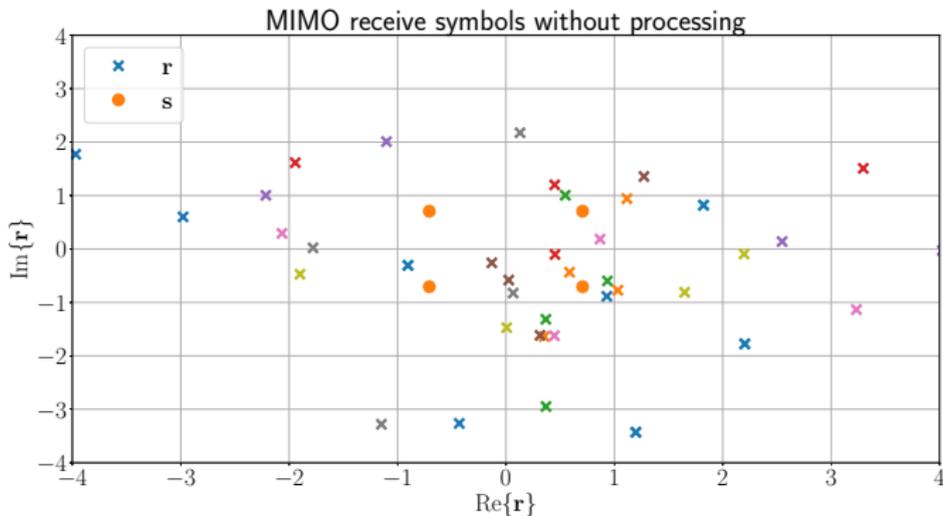
■ Erinnerung:

$$r = Hs + n$$

Somit überlagern sich alle Sendesignale auf allen Empfangsantennen. →
Eigeninterferenz



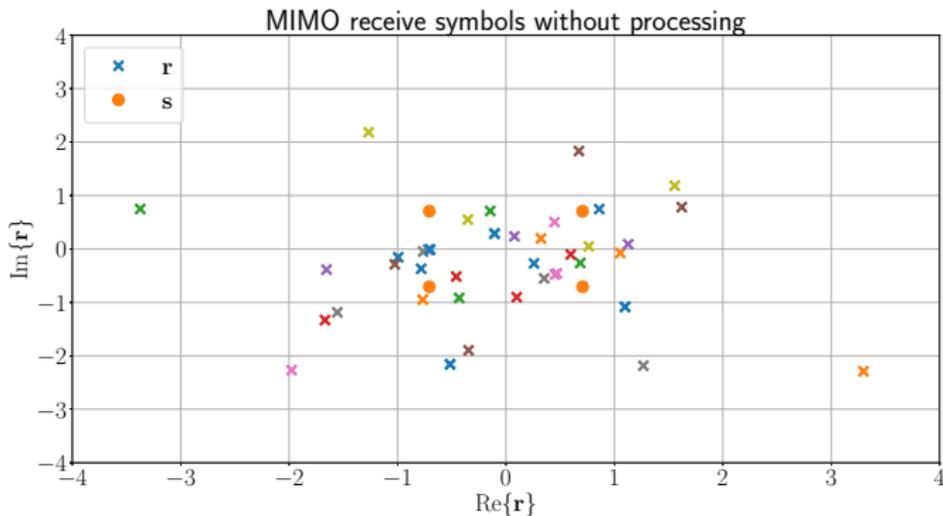
- **Beispiel:** ⁵¹ ⁵² Empfangssymbole eines (4, 4)-MIMO-Kanals bei einem SNR von 10 dB



⁵¹ **Datei:** mimo.ipynb

⁵² Die Symbole aller Antennen sind gemeinsam dargestellt.

- **Beispiel:** ⁵³ ⁵⁴ Empfangssymbole eines (4, 4)-MIMO-Kanals bei einem SNR von 100 dB



⁵³ **Datei:** mimo.ipynb

⁵⁴ Die Symbole aller Antennen sind gemeinsam dargestellt.

- **Frage:** Wie können die Symbole wiedergewonnen werden?
- **Antwort:** Sind die Symbole gleichwahrscheinlich, so ist der ML-Schätzer optimal.⁵⁵

$$\hat{\mathbf{s}}_{\text{ML}} = \arg \max_{\ell} f(\mathbf{r}|\mathbf{s}_{\ell}) \stackrel{(a)}{=} \arg \min_{\ell} \|\mathbf{r} - \mathbf{H}\mathbf{s}_{\ell}\|^2$$

⇒ Wir sind „glücklich“?!?

⁵⁵Schritt (a) gilt, falls das Rauschen AWGN ist.



- **Beobachtung:** ML muss M^{N_T} Werte bei der Minimierung berechnen, wobei M die Mächtigkeit des Modulationsalphabets bezeichnet.
- **Aufwandsgünstiger:**
 - Verwendung des Viterbi-Algorithmus
 - Lineare Detektoren der Form

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{L}r$$

■ *Lineare Detektoren:*

- Erste Idee: Setze $\mathbf{L} = \mathbf{H}^{-1}$; dazu muss die Kanalmatrix quadratisch und invertierbar sein.

■ *Zero-Forcing (ZF) Detektor :*

- Angelehnt an die Invertierung: Verwendung der (*Moore-Penrose*)*Pseudoinversen*⁵⁶

$$\mathbf{L}_{ZF} = \mathbf{H}^\dagger = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H$$

- Es folgt

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{L}_{ZF} \mathbf{r} = \mathbf{s} + (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{n}$$

- **Beobachtung:** Kenntnis der Kanalmatrix \mathbf{H} im Empfänger notwendig (CSI-R)
- **Problem:** Das Rauschen kann durch diese Operation verstärkt werden.⁵⁷

⁵⁶ Ist die Kanalmatrix invertierbar, so ist $\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}^{-1}$.

⁵⁷ **Übung:** Überlegen Sie sich das für den skalaren Fall $N_T = N_R = 1$.



■ Lineare Detektoren: (ctd.)

■ Minimum-Mean-Square-Error (MMSE) Detektor:

- Ziel: Finde Matrix \mathbf{L}_{MMSE} , die die Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers erreicht:

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min_k E (\|\mathbf{L}_{\text{MMSE}} \mathbf{r} - \mathbf{s}_k\|^2)$$

- Es folgt:⁵⁸

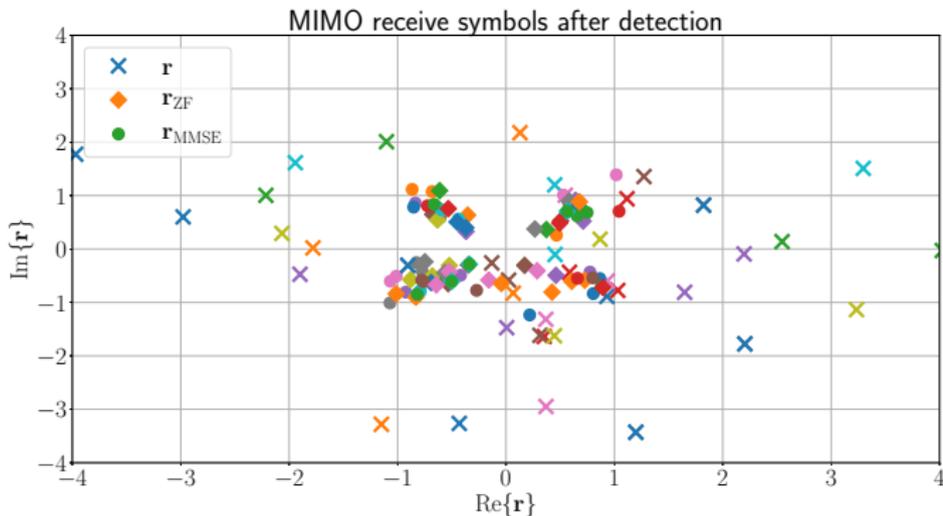
$$\mathbf{L}_{\text{MMSE}} = \left(\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \frac{N_T}{\text{SNR}} \mathbf{I}_{N_T} \right)^{-1} \mathbf{H}^H$$

- Für hohes SNR konvergiert der MMSE-Detektor gegen den ZF-Detektor. Für kleines SNR sucht MMSE einen Kompromiss zwischen Rauschverstärkung und Symbolentscheidung.
- **Beobachtung:** Kenntnis der Kanalmatrix \mathbf{H} und des SNR im Empfänger notwendig (CSI-R)

⁵⁸ **Nachweis:** Siehe [Mol11] oder [PS08]



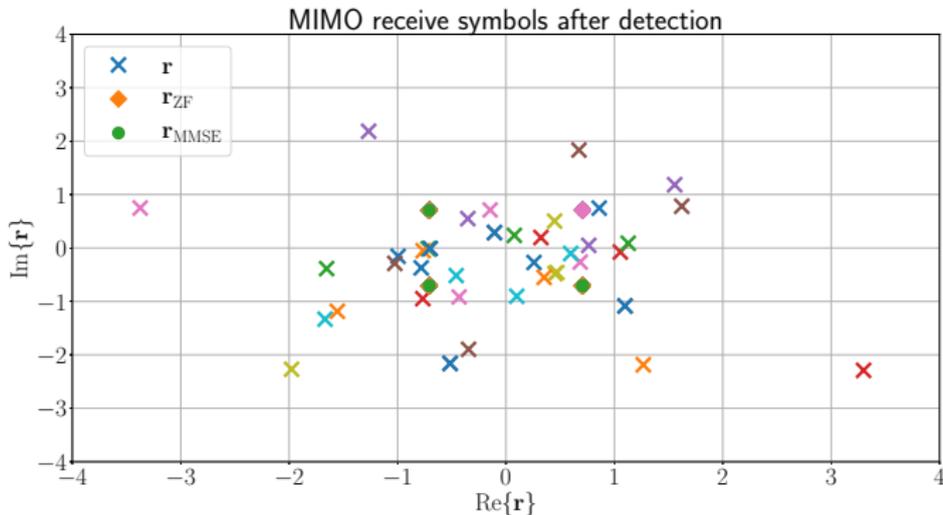
- **Beispiel:** ⁵⁹ ⁶⁰ Empfangssymbole eines (4, 4)-MIMO-Kanals nach Zero-Forcing und MMSE bei einem SNR von 10 dB



⁵⁹ **Datei:** mimo.ipynb

⁶⁰ Die Symbole aller Antennen sind gemeinsam dargestellt.

- **Beispiel:** ⁶¹ ⁶² Empfangssymbole eines (4, 4)-MIMO-Kanals nach Zero-Forcing und MMSE bei einem SNR von 100 dB



⁶¹ **Datei:** mimo.ipynb

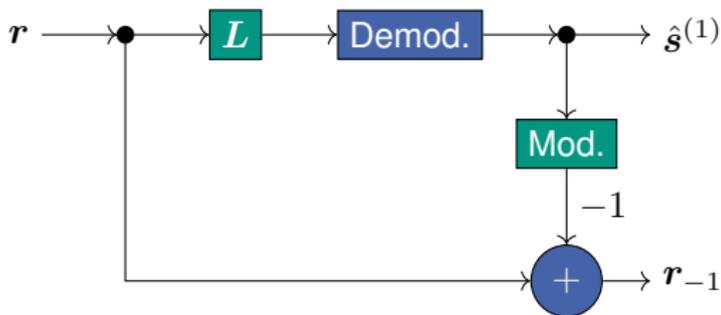
⁶² Die Symbole aller Antennen sind gemeinsam dargestellt.

- *Successive Interference Cancellation, SIC:*
 - Problem bei der Detektion ist die Eigeninterferenz, die aber für verschiedene Ausbreitungen unterschiedlich stark sein kann
 - **Idee:** Schätze das Symbol, welches „man gut schätzen kann“ und subtrahiere dessen Einfluss; wähle nun das zweitbeste etc.
 - **Darstellung:** Siehe nächste Folie
 - **Gefahr:** Fehlerfortpflanzung



- *Successive Interference Cancellation, SIC:*

- **Illustration:**⁶³



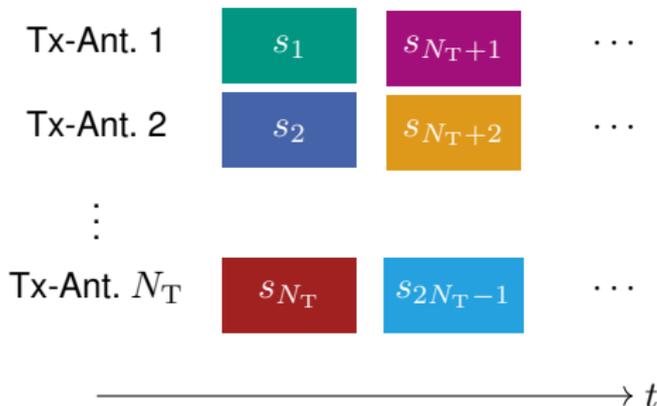
⁶³ $\hat{s}^{(1)}$ bezeichnet die Schätzung für das stärkste Signal; weiter ist $r_{-1} = r - \hat{s}^{(1)}$

- **V-BLAST**.⁶⁴
 - Sender überträgt auf allen N_T Antennen gleichzeitig unterschiedliche Symbole
⇒ Erhöhung der Datenrate um (bis zu) Faktor N_T
 - Empfänger...
 - empfängt auf jeder der N_R Antennen ein Gemisch aus allen Sendesymbolen
 - verwendet SIC zur sukzessiven Detektion der Sendesymbole
- **Bemerkung:** Das mehrfache Auftreten eines Sendesymbols im Empfänger erzeugt *Diversität*, die zur Verbesserung der Empfangsgüte verwendet werden kann. ⇒ Evtl. höherwertige Modulationsverfahren einsetzbar.

⁶⁴Vertical Bell Labs Layered Space Time Architecture

- *V-BLAST*.⁶⁵

- Illustration:

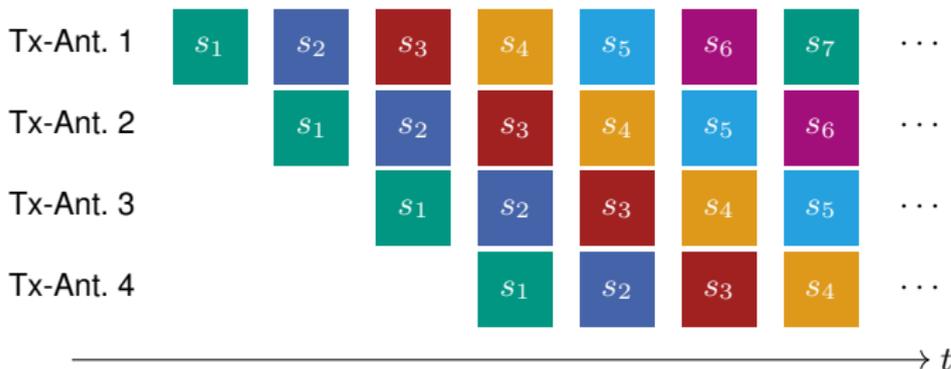


⁶⁵Vertical Bell Labs Layered Space Time Architecture

■ *D-BLAST*.⁶⁶

■ Sender:

- „Diagonales“ Schieben der Symbole über die Antennen \implies jedes Symbol wird von jeder Antenne gesendet
- „Eingeschwungen“ $\implies N_T$ Symbole gleichzeitig; nur 1 Symbol pro Takt „neu“
- Erzeugen von Sende- und Empfangsdiversität \implies Vergleiche V-BLAST

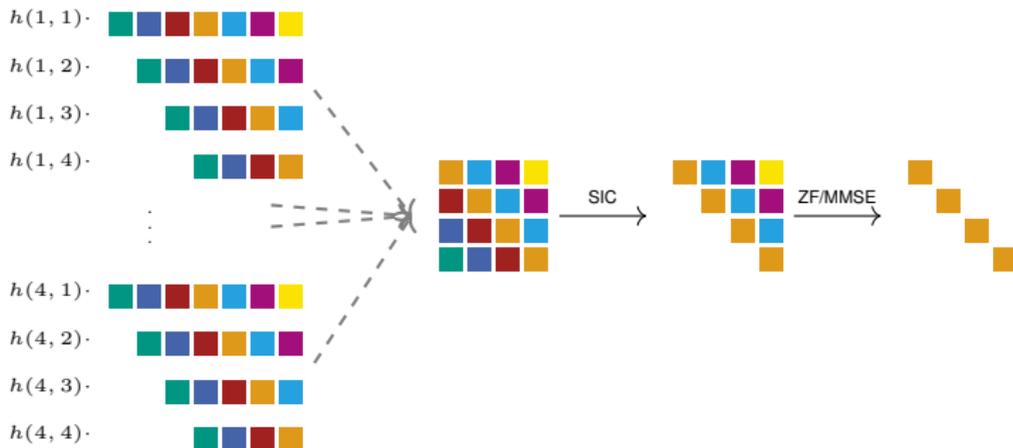


⁶⁶Diagonal Bell Labs Layered Space Time Architecture; hier dargestellt für $N_T = 4$.

■ D-BLAST:

■ Empfänger

■ Ann.: ■ zu entscheiden; ■ ■ ■ bekannt



■ *Space-Time-Block-Codes, STBC*

- **Idee:** Wie bei V-BLAST und D-BLAST verteilen von Symbolen in „Space“ (Antennen) und „Time“ (Zeit)
- Meist beschrieben durch Matrizen aus Symbolen mit⁶⁷
 - N_T Spalten für die Antennen
 - n Zeilen für die Zeitpunkte
 - k der N_T Symbole pro Zeitpunkt sind verschieden
- Pro Zeitpunkt wird eine Spalte über die N_T Antennen gesendet.
- Je nach Wiederholhäufigkeit von Symbolen wird durch STBC die Netto-Datenrate um k/n reduziert.

⁶⁷ **Hinweis:** In [Jon11] sind in der Beschreibung im Text die Zeilen und Spalten vertauscht.



■ STBC: Alamouti-Code

- Für den Alamouti-Code gilt $k = n = N_T = 2$ und $N_R = 1$ (Bild: Tafel)
- Verwendet die Matrix

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ -s_2^* & s_1^* \end{pmatrix}$$

- Für das Empfangssignal gilt⁶⁸

$$\begin{pmatrix} r[1] \\ r[2] \end{pmatrix} = \mathbf{G} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w[1] \\ w[2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 s_1 + h_2 s_2 \\ -s_2^* h_1 + h_2 s_1^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w[1] \\ w[2] \end{pmatrix}$$

⁶⁸**Hinweis:** Schreibweise $r[i]$, um deutlich zu machen, dass es sich bei $r[\cdot]$ um Zeitpunkte handelt. Gleiches gilt entsprechend für das Rauschen.



- *STBC: Alamouti-Code* (ctd.)

- Der Empfänger bildet die Entscheidungsgrößen⁶⁹

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} h_1^* & h_2 \\ h_2^* & -h_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r[1] \\ r^*[2] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (|h_1|^2 + |h_2|^2) \cdot s_1 + h_1^* w_1 + h_2 w_2^* \\ (|h_1|^2 + |h_2|^2) \cdot s_2 + h_2^* w_1 - h_1 w_2^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- **Frage:** Was fällt Ihnen auf? Wofür ist das nützlich?
- **Bemerkung:**⁷⁰ Einsatz von Alamouti ist durch Nachrüstung möglich, indem „lediglich“ Basisstation zwei Antennen und Basisstation sowie Mobilteil ein Softwareupdate benötigen.

⁶⁹**Hinweis:** In [Jon11] fehlt ein Minuszeichen.

⁷⁰Nach [Jon11]

■ Bemerkungen:

- Neben den beschriebenen Verfahren gibt es einige weitere Methoden, die aber über NT I hinausgehen. Genannt seien z.B. Space-Time-Trellis-Codes, die bei Interesse in [Jon11] und der dort aufgeführten Literatur nachgelesen werden können.

- 7 Systemkonzepte
 - Spreizverfahren
 - Mehrträgerübertragung
 - MIMO-Systeme
 - **Lernziele**
 - Literatur



- Die folgende Aufstellung fasst die zentralen Punkte zusammen.
- Es wird aufgezeigt, welche Punkte nach Bearbeitung des Kapitels klar sein sollten.
- **Hinweise:**
 - Die Auflistung ist nicht vollständig, sondern führt die wichtigsten Aussagen auf; nicht erwähnte Inhalte sind dennoch bedeutsam.
 - Oft enthalten die Nachweise wichtige Ideen; diese also nicht vernachlässigen.
 - Stets versuchen, Gleichungen in Verbindung mit Interpretationen und Anwendungen zu sehen
 - Des weiteren sollten alle kleinen nützlichen Ergänzungen verstanden sein.
 - Es ist immer eine gute Idee, etwas Gelerntes im Rechner umzusetzen. Dies hilft beim Verständnis und schärft das Bewusstsein für mögliche Probleme.

Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- CDMA
 - Motivation für die Spreizung
 - DSSS-Signale im Zeit- und Frequenzbereich
 - Prinzip von DSSS, Signaturen, Nutzertrennung
- Mehrträgerverfahren, OFDM
 - Motivation, ISI
 - Realisierung durch (I)FFT
 - ICI: Guard-Intervall, Cyclic Prefix
 - Systemaufbau
 - Matrixdarstellung
 - PAPR und Grundidee der Einträgerübertragung



Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

■ MIMO

- Motivation von MIMO und dessen Potenzial
- Signal- und Kanalmodell (insbes. flacher Kanal und stochastische Modellierung der Koeffizienten)
- Kanalkapazität und Vereinfachung für den unkorrelierten Fall
- SWZ, deren Anwendung und (anschauliche) Bedeutung
- Tx- und RX-Processing zur Verarbeitung; CSI
- Idee von Waterfilling
- Detektion: Optimal, linear (ZF, MMSE, SIC)
- Verfahren: V-BLAST, D-BLAST, STBC (insbes. Alamouti)

- 7 Systemkonzepte
 - Spreizverfahren
 - Mehrträgerübertragung
 - MIMO-Systeme
 - Lernziele
 - Literatur



- [Jon11] F. Jondral, *Nachrichtenübertragung*, Schlembach, 4. Auflage, 2011
- [PS08] J. Proakis, M. Salehi, *Digital Communications*, McGraw-Hill, 2008
- [Kam04] K.-D. Kammeyer, *Nachrichtenübertragung*, Teubner, 2004
- [Hoe13] P. A. Höher, *Grundlagen der digitalen Informationsübertragung*, Springer, 2013
- [BV06] J. Björqvist, S. Virtanen, *Convergence of Hardware and Software in Platforms for Radio Technologies*, IEEE Communications Magazine, November 2006
- [Ben10] N. Benvenuto et al., *Single Carrier Modulation With Nonlinear Frequency Domain Equalization: An Idea Whose Time Has Come – Again*. Proceedings of the IEEE, Vol. 98, 2010
- [Gol05] A. Goldsmith, *Wireless Communications*, Cambridge University Press, 2005
- [Mol11] A. Molisch, *Wireless Communications*, Wiley, 2011

[TV08] D. Tse, P. Viswanath, *Fundamentals of Wireless Communication*,
Cambridge University Press, 2008

[CT06] T. Cover, J. Thomas, *Elements of Information Theory*, Wiley, 2006

Nachrichtentechnik I – Kommunikationsnetze

Holger Jäkel

Communications Engineering Lab (CEL)



- 8 Kommunikationsnetze
 - Vielfachzugriff
 - Netze
 - Lernziele
 - Literatur

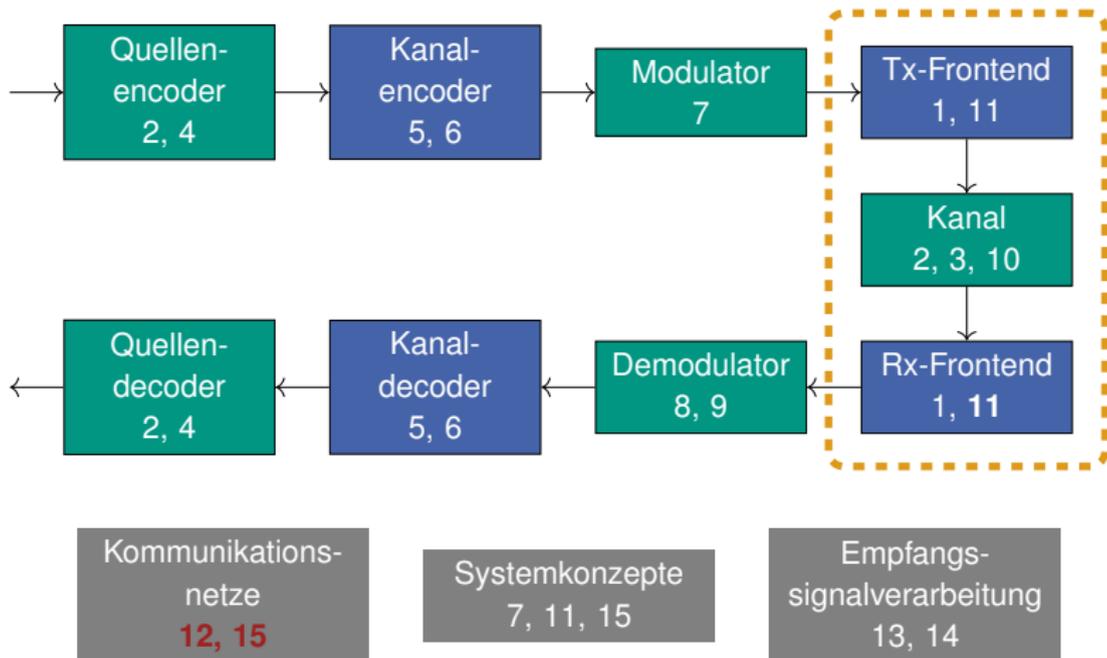


- Folgende Diskussionen erfolgen gemäß¹

[Jon11]: F. Jondral, *Nachrichtenübertragung*, Schlembach, 4. Auflage, 2011

¹Von dort entstammt die Struktur der Folien, die Formeln und die meisten Bilder.

Einordnung der Kapitel von [Jon11]



8 Kommunikationsnetze

- Vielfachzugriff
 - Grundlegende Betrachtungen
 - SDMA
 - FDMA
 - TDMA
 - CDMA
- Netze
- Lernziele
- Literatur



- **Ausgangspunkt:** Frequenzen für die Mobilkommunikation sind begrenzt
- **Konsequenz:** Effiziente Nutzung erforderlich \implies
 - Möglichst viele Nutzer pro Ressource unterbringen
 - Ressourcen möglichst gut ausnutzen (z.B. durch hohen Grad an Wiederverwendung)

- **Frage:** Wie kann das erreicht werden?

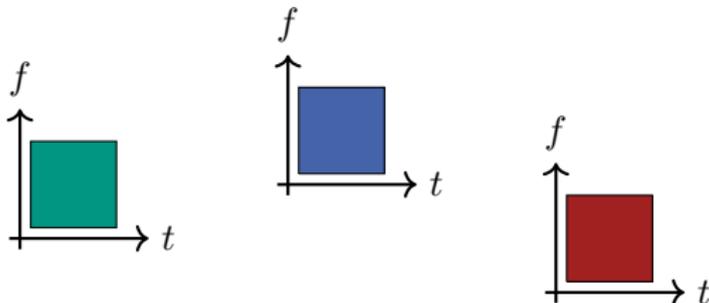
- **Antwort:**² Durch *Mehrfachverwendung* bzw. *Nutzertrennung* in
 - Raum → *Space Division Multiple Access, SDMA*
 - Frequenz → *Frequency Division Multiple Access, FDMA*
 - Zeit → *Time Division Multiple Access, TDMA*
 - Code → *Code Division Multiple Access, CDMA*

²Zu den folgenden Aspekten in größerer Ausführlichkeit siehe auch [Ste01], [Sta04], [Ber91].

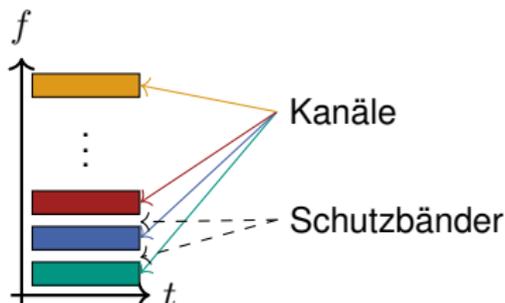
- **Bemerkung:** In größeren Systemen erfolgt Netz-Organisation durch Kombination der Verfahren; etwa:
 - GSM
 - SDMA durch Zellbildung und Sektorisierung
 - FDMA zur Verwendung mehrerer Frequenzen pro Zelle und verschiedenen Frequenzen in benachbarten Zellen
 - TDMA zur Trennung von Nutzern auf derselben Frequenz
 - UMTS
 - SDMA durch Zellbildung und Sektorisierung
 - CDMA zur Trennung von Nutzern in derselben Zelle und Charakterisierung von Zellen durch zellspezifische Signaturen

■ *Space Division Multiple Access, SDMA*

- Unterscheidung der Nutzer mittels räumlicher Trennung
- Eigene Übertragungsstrecke für jeden Teilnehmer bzw. Gruppe von Teilnehmern
- **Beispiel:**
 - Verschiedene Kabel
 - Richtfunkstrecken
 - Zellstruktur der Mobilfunknetze



- *Frequency Division Multiple Access, FDMA*
 - Trennung der Teilnehmer durch verschiedene Frequenzen
 - **Beispiel:**
 - Zellstruktur der Mobilfunknetze
 - Rundfunkübertragung, Kabelfernsehen



■ Vorteile:

- Relativ kostengünstig
- Verhältnismäßig geringer Aufwand bei der Synchronisation

■ Nachteile:

- Nicht-ideale Bauteile (Oszillatoren, Filter) erfordern *Schutzbänder*
⇒ „Ressourcenverschwendung“
- Unter Umständen Probleme durch *Intermodulationsprodukte*, falls Verstärker im nicht-linearen Bereich betrieben werden



■ Intermodulationsprodukte

- **Ansatz:** In den Verstärker eingehendes Signal möge mehrere Frequenzen f_1, \dots, f_N enthalten
- Dann ist

$$f_i^{(\ell)} = k_1 f_1 + k_2 f_2 + \dots + k_N f_N, \quad \ell = \sum_{n=1}^N |k_n|$$

ein *Intermodulationsprodukt der Ordnung ℓ* .

■ Bemerkungen:

- Nur Intermodulationsprodukte ungerader Ordnung fallen in das relevante Frequenzband.
- Die Leistung der Intermodulationsprodukte fällt mit der Ordnung relativ schnell ab.

⇒ Ordnung 3 und 5 sind störend

■ Intermodulationsprodukte (ctd.)

■ Beispiel:

- Kennlinie des Verstärkers sei approximierbar durch $h(x) = a_1x + a_3x^3$
- Mit $\Delta f \ll f_T$ sei das Eingangssignal:

$$x(t) = A \cos \left(2\pi \left(f_T - \frac{\Delta f}{2} \right) t \right) + B \cos \left(2\pi \left(f_T + \frac{\Delta f}{2} \right) t \right)$$

- Für das Ausgangssignal nach Bandpassfilterung folgt:³

$$\begin{aligned} y(t) &= h(x(t)) \\ &= \alpha \cos \left(2\pi \left(f_T - \frac{\Delta f}{2} \right) t \right) + \beta \cos \left(2\pi \left(f_T + \frac{\Delta f}{2} \right) t \right) \\ &\quad + \gamma \cos \left(2\pi \left(f_T - \frac{3}{2} \Delta f \right) t \right) + \delta \cos \left(2\pi \left(f_T + \frac{3}{2} \Delta f \right) t \right) \end{aligned}$$

als Signal mit den ursprünglichen Frequenzen und den Intermodulationsprodukten dritter Ordnung.

³Für die exakten Werte der Faktoren α, \dots, δ in Abhängigkeit von a_1, a_3, A, B siehe [Jon11].

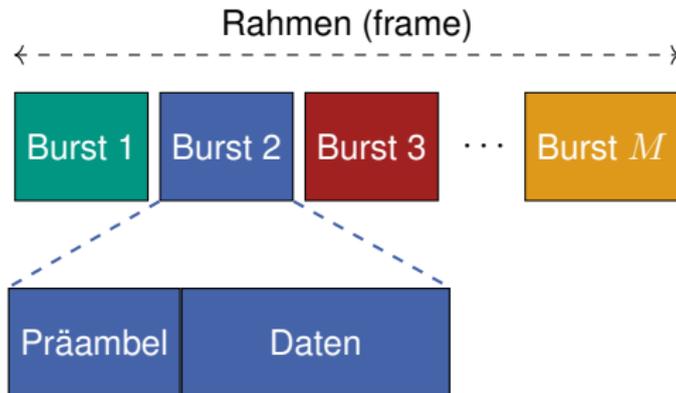
■ *Bursts:*

- Burst besteht aus
 - *Präambel* zur Synchronisation und Kanalentzerrung
 - den eigentlichen Nutzdaten
- Symbolrate im Burst mit M Nutzern größer als M -fache Einzelrate \implies Unter der Annahme $B_s < B_c < MB_s$ entsteht Inter-Symbol-Interferenz (ISI) \implies Kanalentzerrer notwendig
- TDMA-Systeme beinhalten oft Datenkompression, Zwischenspeicherung etc. \implies viel digitale Signalverarbeitung



- *Bursts*: (ctd.)

- **Illustration:**

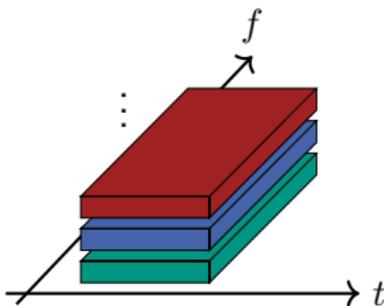


■ Bemerkungen:⁴

- Zeit zwischen zwei Bursts im Handy für Feldstärkenmessung verwendet; etwa zur Einleitung eines Zellwechsels (*Handover*)
- Synchronisation in TDMA-Systemen sehr wichtig; Überlappung von Bursts führt zu Informationsverlust durch Interferenz \implies Systemsteuerung muss Abstand zwischen Basisstation und Mobilgerät kennen \implies aus Laufzeit (und zusätzlicher Information) bestimmt das Handy seinen Sendezeitpunkt; Restunsicherheit durch Schutzzeiten erledigt

⁴Nach [Jon11]

- *Code Division Multiple Access, CDMA*
 - Alle Nutzer verwenden die gesamte Bandbreite während der gesamten Zeit
 - Nutzer werden durch Codesequenzen getrennt \implies Bandbreite „größer als für die Information notwendig“
 - Detektion mittels Korrelation



- *DSSS-System*: (siehe Kapitel 7)
 - Verwendung eines „Fingerabdrucks“ pro Nutzer
 - Pro Nutzer: Daten werden moduliert und gespreizt
 - Im Empfänger überlagern sich mehrere CDMA-Signale verschiedener Nutzer⁵

$$r(t) = \sum_{i=1}^N x_i(t)g_i(t)$$

- Sind die Signaturen/Signale orthogonal, so ergibt sich das Signal des i -ten Nutzers durch Korrelation mit der i -ten Signatur
- **Beispiel**: Prinzip von UMTS

⁵**Annahme**: Synchrone Überlagerung



- *FHSS-System:*
 - Verwendung eines „Sprungmusters“ pro Nutzer
 - Pro Nutzer: Daten werden moduliert und entsprechend dem Sprungmuster auf unterschiedliche Trägerfrequenzen gemischt
 - Trennung der Signale durch „Nachschauen an der richtigen Frequenz“
 - **Beispiel:** Prinzip von Bluetooth

8 Kommunikationsnetze

- Vielfachzugriff
- Netze
 - Grundlegende Betrachtungen
 - Netze und Dienste
 - Das OSI-Modell
 - LAN-Topologien
- Lernziele
- Literatur



■ **Feststellung:**

- Alle bisherigen Kapitel hatten die *Punkt-zu-Punkt-Verbindung* zwischen Teilnehmern, Stationen o.ä. zum Gegenstand
- Praktisch: Kommunikation ist meist in Netzen organisiert

■ **Folgerung:** Betrachte⁶ die Vorgänge in Kommunikationsnetzen

⁶Hier nur Grundlagen. Details siehe etwa [Ste01], [Ber91] oder [Sta04]-



- Bestandteile von Kommunikationsnetzen sind:
 - Endgeräte
 - Übertragungswege
 - Übertragungseinrichtungen
 - Vermittlungseinrichtungen

- *Verbindungsorientierte Kommunikation* besteht aus:
 - Verbindungsaufbau
 - Übertragung
 - Verbindungsabbau

- Eigenschaften/Charakteristika von Kommunikationsnetzen sind:
 - Physikalischer Kanal; Bandbreite
 - Netztopologie
 - Kommunikationsrichtung (unidirektional vs. bidirektional)
 - Vermittlungstechnik
 - Dienstintegration
 - Versorgungsgebiet
 - u.v.a.m.

- Kommunikationsdienste beinhalten:
 - Grundmerkmale
 - Zusatzmerkmale
 - Ablaufprotokolle
 - Dienstgüte, Quality of Service, QoS

- Kommunikationsdienste erfordern:
 - Mindestdatenrate⁷
 - Maximale Verzögerung
 - ...

⁷**Hinweis:** Nochmal sei darauf hingewiesen, dass Bandbreite und Datenrate nicht äquivalent sind, sondern dass deren Zusammenhang u.a. durch das Modulationsverfahren, die Pulsformung etc. bestimmt wird.



- **Frage:** Was ist überhaupt ein Dienst?
- **Antwort:** Ein Dienst ist eine erbrachte Leistung. Aber von wem an wen?

⇒ Kommunikationsvorgang wird in Einzelaufgaben aufgeteilt

- Modell zur Beschreibung einer Kommunikationsverbindung
- Verwendung einer modularen Beschreibung mit definierten Schnittstellen
- Definiert in ITU X.200, 1983: Open⁸ Systems Interconnection – Basic Reference Model; entsprechend ISO 7498, ISO 8509

⁸„open“: Jeder kann an der Kommunikation teilnehmen.



- Struktur der Schichten (layer)
 - Schicht 7: Anwendung (Application)
 - Schicht 6: Darstellung (Presentation)
 - Schicht 5: Sitzung (Session)
 - Schicht 4: Transport (Transport)
 - Schicht 3: Vermittlung (Network)
 - Schicht 2: Sicherung (Data link)
 - Schicht 1: Bitübertragung (Physical)

7: Anwendung

6: Darstellung

5: Sitzung

4: Transport

3: Vermittlung

2: Sicherung

1: Bitübertragung

- Die Schichten sind rein funktional und logisch beschrieben \implies unabhängig von der technischen Realisierung
- Jede Schicht erfüllt ihre Funktion unabhängig von den anderen Schichten \implies Austauschbarkeit von Algorithmen \implies Adaption möglich
- **Bemerkung:** ISO/OSI ist ein theoretisches Modell, das so in der Praxis nicht zu finden ist; jedoch erfolgt oft (insbesondere in der Terminologie) eine grundsätzliche Orientierung an diesem Modell

- Bitübertragungsschicht:
 - Physikalische Verbindung zwischen zwei Punkten
 - Methoden der Nachrichtentechnik
 - Charakterisiert durch Parameter: BER, Verzögerung, SNR, ...
 - Anpassung der Bitinformation an den Kanal
 - Methoden
 - Modulation/Demodulation
 - Pulsformung
 - MIMO, OFDM
 - Kanalcodierung → Diskussion
 - Schätzung von Trägerphase und Frequenz; Synchronisation
 - Entzerrung
 - Medien: Kabel, Funk, Lichtwellenleiter, Infrarot, Schall, ...

7: Anwendung

6: Darstellung

5: Sitzung

4: Transport

3: Vermittlung

2: Sicherung

1: Bitübertragung



■ Sicherungsschicht:

- Baut eine Punkt-zu-Punkt Verbindung auf und ab
- Paketbildung; evtl. Retransmission beschädigter Daten
- Sichert den Dienst der Bitübertragungsschicht ab
- Flusskontrolle
- Kanalcodierung → Diskussion

⇒ Bietet eine (nahezu) fehlerfreie
Punkt-zu-Punkt Übertragung

7: Anwendung

6: Darstellung

5: Sitzung

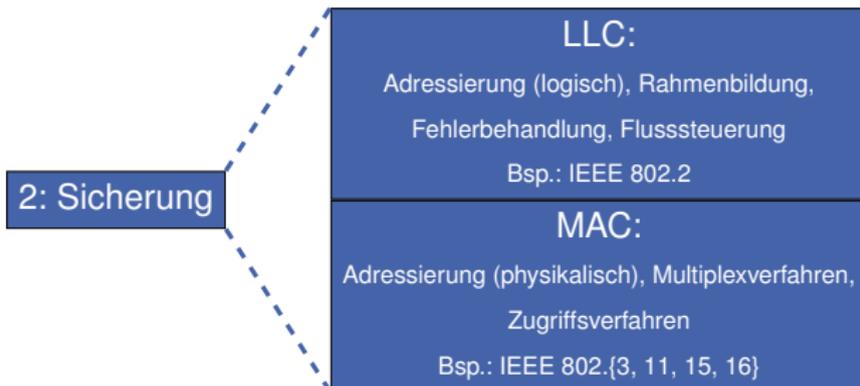
4: Transport

3: Vermittlung

2: Sicherung

1: Bitübertragung

- Perspektiven: Schicht 2 ...
 - ... führt logische Aufgaben aus
 - ... hat Kontakt zum physikalischen Medium
- Unterteilung: (Vorgehensweise der Standards nach IEEE)
 - *Logical Link Control, LLC*: logisch orientiert
 - *Medium Access Control, MAC*: physikalisch orientiert



■ Transportschicht:

- Ende-zu-Ende Transport der Nachrichten
- Verwaltet den logischen Gesamtkanal zwischen Teilnehmern ohne Berücksichtigung der Teilkanäle
- Sichert die Ende-zu-Ende Verbindung ab
- Komplexität des Protokolls abhängig von der Dienstgüte der unteren Schichten

7: Anwendung

6: Darstellung

5: Sitzung

4: Transport

3: Vermittlung

2: Sicherung

1: Bitübertragung

■ Vermittlungsschicht:

- Führt eine Nachricht durch das Netz
- „Routing“ beschreibt Wegewahl einer Nachricht
- Segmentierung, Multiplexen und Puffern
- Verknüpfen von Teilnetzen, „internet-working“

■ Anwendungsschicht:

- Bietet dem Nutzer die Dienste des Kommunikationsnetzes als Gesamtheit
- Nutzer definiert Rahmenbedingungen
- Aus Netzsicht die „Daten produzierende Quelle“

7: Anwendung

6: Darstellung

5: Sitzung

4: Transport

3: Vermittlung

2: Sicherung

1: Bitübertragung

■ Darstellungsschicht:

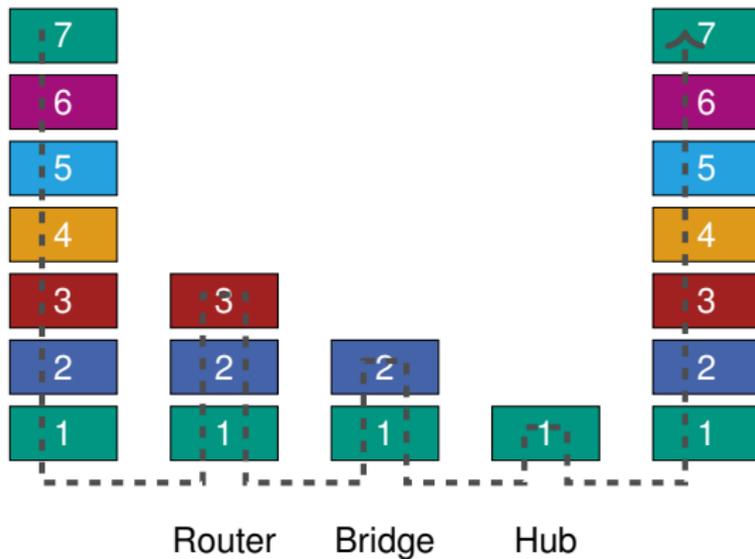
- Darstellung der Daten für den Nutzer, „nach oben“
- Konvertieren der Daten für das Netz, „nach unten“

■ Sitzungsschicht:

- Regelt den zeitlichen Ablauf der Verbindung
- Betrachtet Kommunikationsvorgang als Einheit
- Überwacht die Kommunikation



■ Ablauf der Kommunikation

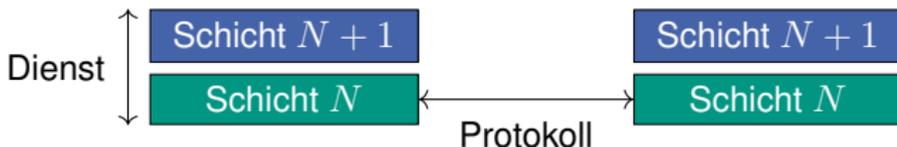


■ Dienst:

- Vertikale Kommunikation zwischen Schichten
- „Untere Schicht bringt Dienst für obere Schicht“
- Beschrieben durch Dienstgüte, Quality of Service, QoS

■ Protokoll:

- Horizontale Verständigung zwischen gleichen Schichten verschiedener Teilnehmer
- Grundlagen, damit sich zwei Partnerschichten „verstehen“



■ Dienstgüte, QoS:

■ Maß zur Qualität einer Übertragung

- Datenrate
- Bitfehlerrate, Bit Error Rate, BER
- Paketfehlerrate, Packet Error Rate, PER
- Verzögerung
- Ausfallsicherheit

■ Relevanz abhängig von Anwendung

- Sprache toleriert hohe BER, aber geringe Verzögerung
- Datenübertragung toleriert – je nach Anwendung – Verzögerungen, aber keine oder nur geringe Fehlerraten



- Aufteilung einer Kommunikation in Dienste führt dazu,
 - dass die Dienste nach unten elementarer bzw. die erfüllte Aufgabe nach oben immer komplexer wird.
 - dass durch geeignetes Zusammenfassen die Kommunikation zwischen Schichten kleinstmöglich bleibt.
 - dass einzelne Schichten bei Beibehalten der Schnittstelle ausgetauscht werden können.

- Protokolle ermöglichen es,
 - dass Partner die Kommunikation nach denselben Regeln abwickeln.
 - dass die Partner kommunizieren können, da sie *Syntax* und *Semantik* des Partners „verstehen“.



- Die Koordination der Schichten erfolgt über ein *Netzmanagementsystem*, das den Leistungsumfang und Betriebszustand aller Schichten zusammenfasst und koordiniert.

- Aufgaben der Netzverwaltung:
 - Kenntnis der Betriebsmittel („Was habe ich zur Verfügung?“)
 - Zustand der Betriebsmittel („Was tun/können die Betriebsmittel gerade?“)
 - Signalisierung, um Diensten ihre Aufgabe oder Parameteränderungen anzuzeigen
 - Störungsbehebung
 - Abrechnung etc.



■ Hinweis:

- Die Besprechung von möglichen Topologien von Kommunikationssystemen wird an dieser Stelle nicht durchgeführt, da das Thema in Kürze kaum sinnvoll behandelt werden kann.
- Hier sei bei Interesse auf weiterführende (Spezial-)Vorlesungen und/oder auf [Ste01], [Sta04] verwiesen.

8 Kommunikationsnetze

- Vielfachzugriff
- Netze
- Lernziele
- Literatur



- Die folgende Aufstellung fasst die zentralen Punkte der behandelten Kapitel zusammen.
- Es wird aufgezeigt, welche Punkte nach Bearbeitung der Kapitel klar sein sollten.
- **Hinweise:**
 - Die Auflistung ist nicht vollständig, sondern führt die wichtigsten Aussagen auf; nicht erwähnte Inhalte sind dennoch bedeutsam.
 - Oft enthalten die Nachweise wichtige Ideen; diese also nicht vernachlässigen.
 - Stets versuchen, Gleichungen in Verbindung mit Interpretationen und Anwendungen zu sehen
 - Des weiteren sollten alle kleinen nützlichen Ergänzungen verstanden sein.
 - Es ist immer eine gute Idee, etwas Gelerntes im Rechner umzusetzen. Dies hilft beim Verständnis und schärft das Bewusstsein für mögliche Probleme.



Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- Motivation für den Vielfachzugriff
- Grundidee von SDMA, FDMA, TDMA, CDMA
- Notwendigkeit für Schutzintervalle in Zeit- und Frequenzrichtung
- FDMA: Intermodulationsprodukte und Konsequenzen
- TDMA: Frame, Burst, Präambel
- CDMA: Prinzip von DSSS, Signaturen, Nutzertrennung

Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- Sinn von Kommunikationsnetzen und deren Aufgabe
- Aufbau und Charakteristika von Kommunikationsnetzen
- Struktur des OSI-Modells; Aufgabe der einzelnen Schichten
- Protokolle, Dienste und Dienstgüte (QoS)



8 Kommunikationsnetze

- Vielfachzugriff
- Netze
- Lernziele
- Literatur



- [Jon11] F. Jondral, *Nachrichtenübertragung*, Schlembach, 4. Auflage, 2011
- [Ste01] W. Stehle, *Digitale Netze und ATM*, Schlembach, 2001
- [Sta04] W. Stallings, *Data and Computer Communications*, Prentice Hall, 2004
- [Ber91] D. Bertsekas, R. Gallager, *Data Networks*, Prentice Hall, 1991; online verfügbar unter <http://web.mit.edu/dimitrib/www/datanets.html>
- [Mol11] A. Molisch, *Wireless Communications*, Wiley, 2011
- [Gol05] A. Goldsmith, *Wireless Communications*, Cambridge University Press, 2005

Nachrichtentechnik I – Systembeispiele

Holger Jäkel

Communications Engineering Lab (CEL)



9 Systembeispiele

- GSM
- UMTS
- LTE
- Historie 3GPP Releases
- Wie geht es weiter?
- Lernziele
- Literatur



- Folgende Diskussionen erfolgen gemäß¹

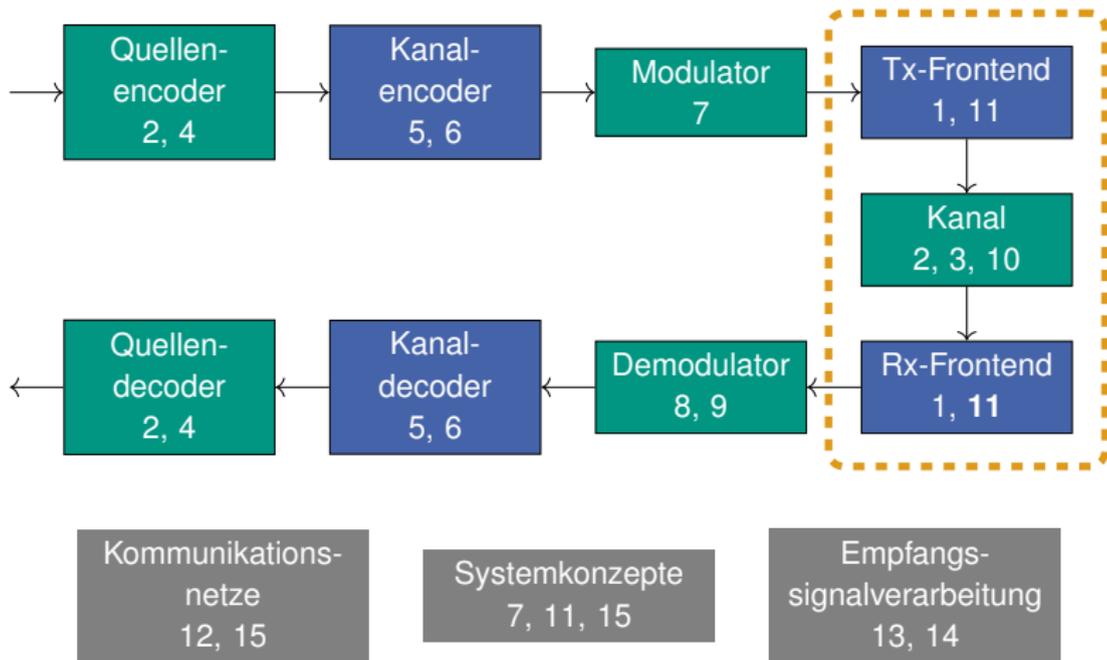
[Jon11]: F. Jondral, *Nachrichtenübertragung*, Schlembach, 4. Auflage, 2011

[Saut15]: M. Sauter, *Grundkurs Mobile Kommunikationssysteme*, Springer, 6. Auflage, 2015

[Mol11]: A. Molisch, *Wireless Communications*, Wiley, 2011

¹Von dort entstammt die Struktur der Folien, die Formeln und die meisten Bilder.

Einordnung der Kapitel von [Jon11]



■ Hinweise:

- Die folgenden Folien geben einen kurzen Überblick darüber, wie die bisher gelernten Methoden in der „realen Welt“ verwendet werden. Sie decken nur einen Teil aus [Jon11], [Saut15] und [Mol11] ab, worin bei Interesse weitere Details nachgelesen werden können.
- Die Darstellungen beschränken sich meist auf die physikalische Schicht (PHY-Layer → Kap. 8). Insbesondere das Organisatorische mit unzähligen logischen Kanälen, Fragen zu Verbindungsaufbau und -abbau, Signalisierung etc. etc. ist sehr komplex.

9 Systembeispiele

- GSM
- UMTS
- LTE
- Historie 3GPP Releases
- Wie geht es weiter?
- Lernziele
- Literatur



- GSM (Global System for Mobile Communications)²
 - ist der Standard für die Mobilfunksysteme der zweiten Generation³
 - wurde 1992 eingeführt und ist weltweit am meisten verbreitet



■ Begrifflichkeiten:

- *Uplink*: Von der *Mobilstation, MS*, zur *Base Transceiver Station, BTS*
- *Downlink*: Von der *BTS* zur *MS*

²Quelle des Logos: https://de.wikipedia.org/wiki/Global_System_for_Mobile_Communications

³... und der erste digitale Mobilfunkstandard; Nachfolger der analogen A-, B- und C-Netze

- Duplexverfahren: *Frequency Division Duplex, FDD*
 - Unterschiedliche Frequenzen für UL und DL
 - Vollduplex-Betrieb: „Geht in beide Richtungen (UL und DL) gleichzeitig“
 - Frequenzen in MHz

	UL	DL
GSM 900 (D-Netze) ⁴	890 – 915	935 – 960
GSM 1800 (E-Netze)	1710 – 1785	1805 – 1880
GSM 1900 (USA)	1850 – 1910	1930 – 1990

⁴Erweiterungsband „kurz darunter“ enthält 10 MHz für e-plus und O2; darunter findet sich GSM-R der DB

- Kanalzugriffsverfahren: Kombination aus FDMA und TDMA
 - „Grundsätzlich“ FDMA
 - Kanalabstand: 200 kHz \implies 124 Kanäle im 900 MHz-Band; aufgeteilt in T-Mobile und Vodafone
 - Weitere Kanäle im Erweiterungsband
 - Zuweisung der Kanäle zu den Zellen unter Berücksichtigung der Interferenz; 3 Frequenzen pro Zelle
 - „Pro Frequenz“ TDMA
 - Bis zu 8 (16) Nutzer pro Trägerfrequenz im TDMA
 - Burstdauer 0.577 ms, 156.25 Bits pro Burst
 - 8 Bursts pro Frame; Framedauer 4.615 ms
 - 26 Frames: Multiframe; 51 Multiframe: Superframe; 2 048 Superframes: Hyperframe

- Sektorisierung⁵
 - Aufteilung einer Zelle in 2-3 Teilzellen (etwa durch gerichtete Antennen)
 - Entspricht letztlich größerer Zellanzahl \implies Erhöhung der Anzahl versorgter Teilnehmer

- **Beispiel:**⁶
 - 3 Sektoren/ Zelle, 8 Timeslots \implies 24 Timeslots pro BS \implies abzüglich Signalisierung: 18 Timeslots pro Zelle
 - 3 Freq./Zelle \implies 54 Timeslots pro Zelle
 - Aktivitätszeit eines Nutzer: ca. 3 Min/h \implies 1080 MS pro BS
 - Teilen der Kundenzahl durch 1080 ergibt ca. die Anzahl benötigter Basisstationen

⁵Siehe [Saut15]

⁶Zahlen und Rechnungen aus [Saut15]

■ Sprachcodierung⁷

- 8 bit/Sample bei 8000 Samples pro Sekunde \implies 64 kbit/s
 - Kompression
 - Grundprinzip: Beschreibung eines Sprachsignals als durch Filterprozess erzeugt
 - LTI-Annahme über 20 ms
 - Kompressionsergebnis: Filterkoeffizienten (2x36 bit), Restsignal 188 bit
- \implies 260 bit / 20 ms = 13 kbit/s
- Niedrige Rate zur MS; hohe Rate im Backbone

⁷Erfolgt in der *Transcoding and Rate Adaptation Unit, TRAU*

■ Fehlercodierung

- Faltungscodierung⁸ (FC) mit Rate $r = 1/2$ bei Gedächtnislänge 4
- Einteilung der Bit in Wichtigkeitsklassen: Class Ia mit Fehlererkennung und FC, class Ib mit FC, class II ohne alles
- Letztlich entstehen 456 Bit (aus 260), was genau 4 Bursts zu 114 Bit entspricht
⇒ notwendige Datenrate $456 / 20 \text{ ms} = 22.8 \text{ kbit/s}$
- FC besser für Einzelfehler geeignet ⇒ Interleaver verteilt 456 Bit über 8 Bursts

■ Verschlüsselung

- Geheimer Schlüssel + Zufallszahl⁹ erzeugen aus Algorithmus A8 einen Cipherkey
- Cipherkey + Framenummer erzeugen aus Algorithmus A5/x einen 114 Bit langen Schlüsselframe
- XOR-ren des Schlüsselframe und der Nutzbit eines Bursts

⁸ $g_1(x) = 1 + x + x^3 + x^4$, $g_2(x) = 1 + x^3 + x^4$, vgl. [Mol11]

⁹Letztlich eine PN-Folge/m-Sequenz der Dauer eines Hyperframes (3.5 Stunden)

■ Modulation und Datenrate

- Modulation: GMSK¹⁰
- 270.833 kbit/s pro Kanal¹¹ \implies spektrale Effizienz: 1.3 Bit/s/Hz
- Pulsformer: Gauß-förmig

■ Ergänzungen

- Max. Zellgröße: 35 km
- Adaptive Entzerrung von Mehrwegen bis 16 μ s Verzögerung
- Sendeleistung unterteilt in Leistungsklassen von 1 bzw. 2 W bis zu 3.2 mW bzw 1.0 mW (GSM-900 bzw. GSM-1800)

¹⁰ ... \implies konstante Einhüllende \implies günstige nichtlineare Verstärker

¹¹ Dies ist mehr als $8 \cdot 22.8$ kbit/s. Dies entsteht durch zu übertragende Zusatzinformation.

■ Sonstiges

- Digitale Übertragung von Sprache, Daten und Signalisierung
- Optimiert auf Sprachübertragung; durch Erweiterungen (GPRS, EDGE) Datenübertragung möglich
- Voice Activity Detection/Discontinuous Transmission (VAD/DTX) im Handy; Sleep Mode
- Handover beim Übergang zwischen Funkzellen



- *Signalisierungskanäle:*
 - Dienen der Synchronisierung und Kanalvermessung, dem Verbindungsaufbau sowie der Kanalzuteilung
 - Broadcast Control Channel (BCCH), nur DL:
 - BTS überträgt die Grundinformation, die von der MS zur Kommunikation mit der BTS benötigt wird: Einbuchen, Netzinformation, Optionen
 - Frequency Control Channel (FCCH) zur Frequenzsynchronisation der MS
 - Synchronization Channel (SCH) zur Bit-Synchronisation der MS (Time Alignment)
 - Einige weitere Kontrollkanäle mit speziellen Aufgaben¹²

- *Verkehrskanäle:* Übertragen die Nutzdaten

¹²Details siehe [Jon11]

- Ein GSM-Netz besteht aus
 - MS: den Mobileinheiten
 - Base Station Subsystem, BSS: den Basisstationen
 - Base Transceiver Station, BTS
 - Base Station Controllers, BSC
 - Network and Switching, NSS
 - Operation and Maintenance Subsystem, OMSS



- MS beinhalten (neben dem „physischen“ Handy):
 - Subscriber Identity Module (SIM)
 - Teilnehmerkennung: International Mobile Subscriber Identity (IMSI); gespeichert auf der SIM
 - Rufnummer: Mobile Station ISDN Number (MSISDN); gespeichert auf der SIM
 - Geräteerkennung: International Mobile Equipment Identity (IMEI)

- **Hinweis:** Über die genannten Komponenten hinaus gibt es viele weitere wichtige Bestandteile wie z.B.
 - HLR (Home Location Register):
 - Registrierung der Netzteilnehmer und ihrer MSISDN
 - Speicherung der permanenten und der temporären Teilnehmerdaten (abonnierte Dienste, Berechtigungen, Aufenthaltsort der MS)
 - VLR (Visitor Location Register):
 - Speicherung der Daten aller MSs im Verwaltungsgebiet des MSCs
 - Roaming im eigenen Netz
 - Roaming zwischen den Netzen
 - Übergabe von Lokalisierungsdaten an das für eine MS zuständige HLR
 - u.v.a.m.

Details zu diesen und weiteren finden Sie bei Interesse in [Jon11] oder [Saut15].

- General Packet Radio Service (GPRS)
 - Einpassen einer paketvermittelnden Datenübertragung in „alte“ Basisstationen
 - Nach wie vor Verwendung von GMSK (1 bit/Symbol)
 - Bündelung von Timeslots
 - Verwendung von Coding Schemes (CS) je nach Signalqualität (→ Punktierung)
 - Theoretische Datenrate: 170 kbit/s; praktisch \approx 80 kbit/s

- Enhanced Data Rates for GSM Evolution (EDGE)
 - Paketübertragung basierend auf GSM-Infrastruktur
 - Zusätzlich 8-PSK möglich (3 bit/Symbol) \implies mehr *Modulation and Coding Schemes (MCS)*
 - Theoretische Datenrate: 60 kbit/s/Timeslots; praktisch \approx 270 kbit/s
 - *Incremental Redundancy*: Bei Fehlern wird nicht der Frame neu übertragen, sondern vorher punktierte Bit „nachgereicht“
 - *Re-Segmentation*: Bei Fehler wird ein Frame mit hohem MCS in zwei Frames mit niedrigem MCS neu übertragen

9 Systembeispiele

- GSM
- UMTS
- LTE
- Historie 3GPP Releases
- Wie geht es weiter?
- Lernziele
- Literatur



■ Ziele:

- Multimedia
- Quality of service (QoS)
- Fokus ist nicht mehr (symmetrischer) Sprachverkehr, sondern asymmetrische Dienste wie Software Download, Internet, Infotainment ...
- Oberbegriff: International Mobile Telecommunication at 2000 MHz: IMT 2000

■ Begriffe:

- IMT-2000 (International Mobile Telecommunications): Begriff der ITU für 3G
- UMTS (Universal Mobile Telecommunications System): Europäische Variante von IMT-2000
- 3GPP (Third Generation Partnership Project): Interessensgemeinschaft zur Realisierung von 3G; Standardisierungsgremien und Mobilfunkbetreiber/-hersteller

¹³3G: Dritte Generation der Mobilfunksysteme

- *Universal Mobile Telecommunication System, UMTS*: Europäische Variante von IMT 2000
 - Luftschnittstelle von UMTS: *UMTS Terrestrial Radio Access, UTRA*
 - UTRA-FDD: Gepaarte UMTS-Frequenzbänder; verschiedene Modulatorstrukturen für UL und DL; für Macro- und Microcells
 - UTRA-TDD: Nicht gepaarte UMTS-Frequenzbänder; identische Modulatorstrukturen für UL und DL; für Picocells
 - Base Station, GSM → NodeB, UMTS
 - Mobile Station, GSM → User Equipment (UE), UMTS

¹⁴Folgende Betrachtungen nach [Mol11]

■ Packetizing¹⁵

- Bearbeitung von Blöcken der Zeitdauer 10, 20, 40, 80 ms
- Cyclic Redundancy Check (CRC) mit 8, 12, 16, 24 Bit zur Fehlererkennung
- Mapping auf Blockgröße, die zur Kanalcodierung geeignet ist (Concatenation oder Segmentation)
- Kanalcodierung
- Mapping auf 10 ms Radio Frame Size
- Interleaving and Rate Matching

■ Interleaving

- Inter-Frame Interleaving: Verteilung von Bit über mehrere Radio Frames
- Intra-Frame Interleaving: Verteilung der Bit innerhalb eines Radio Frames

¹⁵Übersicht aus [Mol11]



■ Kanalcodierung

- Faltungscodierung bis 32 kbit/s; Rate 1/2-Code für allg. Kanäle, Rate 1/3 für „Dedicated Channels“; Einflusslänge 8
- Turbo-Codes ab 32 kbit/s; Rate 1/3-Code; rekursive lineare Schieberegister der Einflusslänge 3

■ Modulation und Pulsformung

- QPSK
- RRC mit Roll-Off-Faktor $r = 0.22$
- Tatsächliche Bandbreite von ca. 4.7 MHz

- Kanalzugriff: CDMA
 - Chiprate: 3.84 MChip/s
 - Frames der Länge 10 ms besitzen 15 Slots der Dauer 0.667 ms (2560 Chips)
 - „Channelization Codes“: Trennung der Nutzer; „Standard-CDMA“ aus Kap. 7
 - „Scrambling Codes“: Trennung von Zellen und/oder Nutzer; Vermeidung nicht-idealer Channelization Codes

- Kanalzugriff: CDMA (ctd.)
 - Uplink (UL)
 - Datenkanäle auf I-, Kontrollkanäle auf Q-Zweig^{16 17}
 - OVSF-Codes, Spreizfaktoren: 4-256 für Datenkanäle, 256 für Kontrollkanäle
 - Downlink (DL)
 - Daten- und Kontrollkanäle werden zeitmultiplexed
 - OVSF-Codes für Channelization; Gold-Codes for Scrambling

 - Datenratenerhöhung durch
 - Verringerung des Spreizfaktors
 - Zuweisung paralleler Kanäle in Form mehrerer Spreizfolgen

¹⁶Ziel: Durch ständig sendende Kontrollkanäle geringerer Crest-Faktor.

¹⁷Bis zu 5 Datenkanäle möglich; dann teilweise auch auf Q-Zweig. Kanäle durch verschiedene Spreizfolgen charakterisiert.



■ Leistungskontrolle

■ UL

- Transmit Power¹⁸ class 1-4: Max. 33, 27, 24, 21 dBm
- Receiver Sensitivity: Bei -117 dBm über 3.84 MHz soll bei 12.2 kbit/s eine BER von 10^{-3} erreicht werden
- Leistungsanpassung in jedem Timeslot (0.667 ms), da kritisch für Systemperformance
- Schrittweiten von ± 1 dB, 2 dB bis P_{\max} je nach Leistungsklasse, $P_{\min} = -44$ dBm

■ DL

- Transmit Power: 10-40 W
- Receiver Sensitivity: Bei -121 dBm über 3.84 MHz soll bei 12.2 kbit/s eine BER von 10^{-3} erreicht werden
- Weniger kritisch, da Orthogonalität (bis auf Mehrwege im DL gesichert)
- Fast nur Ausgleich der Dämpfung

¹⁸Gemessen vor der Antenne

■ Ergänzungen

- Core-Network: verbesserte Version von GSM (basierende auf E1-Verbindungen) oder IP-basiert
- In UMTS: Interferenzplanung statt Frequenzplanung wie bei GSM
- Leistungsanpassung deutlich zeitkritischer (UMTS: 1500 1/s statt GSM: ca. 1/s)
- Leistungskontrolle kann zu *Zellatmung* führen
- Alamouti-Code zur Erzeugung von Diversity

9 Systembeispiele

- GSM
- UMTS
- **LTE**
- Historie 3GPP Releases
- Wie geht es weiter?
- Lernziele
- Literatur



- Vierte Generation: *Long-Term Evolution, LTE, System Architecture Evolution, SAE*^{19 20}



- Niedrigere Kosten pro übertragenem Bit
- Mehr Niedrigpreis-Angebote bei verbesserter Leistung für den Teilnehmer
- Flexible Nutzung neuer und vorhandener Frequenzbänder
- Einfacheres kostengünstigeres Netz mit offenen Schnittstellen
- Geringere Komplexität der Endgeräte bei zumutbarem Leistungsverbrauch

Konsequenz: OFDM als neue Luftschnittstelle; keine Evolution von CDMA

¹⁹ ... Ziele vom Nov. 2004

²⁰ Quelle des Logos: https://de.wikipedia.org/wiki/Long_Term_Evolution

■ LTE-Grundsätzliches²¹

- Duplex: FDD und TDD
- Modulation: 4-, 16-, 64-QAM
- Übertragungsverfahren: OFDM
- Verwendung von Mehrantennen (MIMO): SISO, 2x2 MIMO, 4x4 MIMO
- Bandbreiten: 1.4-20 MHz
- Datenraten (max.): DL 300 MBit/s, UL 75 MBit/s
- Latenz: ≈ 5 ms für kleine Pakete

²¹Folgendes nach [Mol11]; dort ist LTE nach Rel. 8 beschrieben. Damit ist mit den neueren Releases „mehr möglich“.

■ Signalerzeugung²²

- Bearbeitung von Blöcken der Zeitdauer 10 ms
- Cyclic Redundancy Check (CRC) mit 8, 12, 16, 24 Bit zur Fehlererkennung
- Kanalcodierung
- Scrambling
- Modulation
- Zuweisung der Symbole an *Layer*
- Erzeugung des OFDM-Signals

²²Übersicht aus [Mol11]

- Kanalcodierung
 - Faltungscodierung für Kontrollkanäle, Rate $1/3$, Einflusslänge 7
 - Turbo-Codes für Datenkanäle, Rate $1/3$, rekursive lineare Schieberegister mit Einflusslänge 3
 - Hybrid ARQ, HARQ

- Modulation: 4-, 16-, 64-QAM

- Scrambling: Bit-weise Multiplikation mit Gold-Folge

■ Übertragung: OFDM

- Trägerabstand: $\Delta f = 15 \text{ kHz}$
- Dauer OFDM-Symbol: $1/15 \text{ kHz} \approx 67 \mu\text{s}$

■ DL

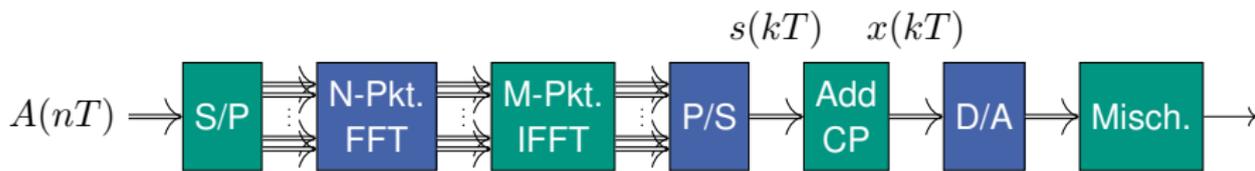
- OFDM wie in Kap. 7 gelernt
- Multiplexen verschiedener Teilnehmer auf verschiedene Unterträger²³ \implies Aufteilung unter Nutzer „innerhalb OFDM“; *Orthogonal Frequency Division Multiple Access, OFDMA*

■ UL

- Pre-coded OFDM: Verwende (kürzere) DFT als Eingangssignal für „normale OFDM-IFFT“ \implies Single-Carrier mit CP
- Bandbreite abhängig von Anzahl der in die DFT eingehenden Unterträger

²³Beachte: Erzeugung in BS \implies „alles synchron“

■ Illustration: SC-FDMA²⁴



²⁴Auch als *pre-coded OFDM* oder *DFT-spread-OFDM* bezeichnet. [GeB11]

- Aufbau in Zeit und Frequenz
 - Frames: Dauer 10 ms, entsprechend 307 200 Samples²⁵
 - Subframe: 10 pro Frame; Dauer 1 ms, entsprechend 30 720 Samples
 - Slot: 2 pro Subframe; Dauer 0.5 ms, entsprechend 15 360 Samples

 - Slot enthält, abhängig von den Ausbreitungsbedingungen:
 - 7 OFDM-Symbole à 2048 Samples mit CP von 160 bzw. 144 Samples
 - 6 OFDM-Symbole à 2048 Samples mit CP von 512 Samples

²⁵Gerechnet auf eine virtuelle Abtastzeit von $t_S = 32.55$ ns. Dies muss nicht notwendig im System verwendet werden.

- Aufbau in Zeit und Frequenz (ctd.)
 - *Resource Element*: 1 Träger für die Dauer von 1 OFDM-Symbol
 - *Resource Block, RB*
 - 12 Unterträger, entsprechend 180 kHz, für einen Slot à 0.5 ms [GeB11]
 - Zur Übertragung werden nur Vielfache²⁶ eines RB zugewiesen

- Pilotsignale
 - Pro RB werden 4 Piloten zur Kanalschätzung gesendet²⁷
 - DL: Zellspezifische (komplexwertige) Symbole
 - UL: Zadoff-Chu-Sequenzen²⁸ definiert als $X^{(u)}(k) = e^{j\pi uk(k+1)/M_{ZC}}$

²⁶Genauer: „[...] Furthermore, the number of resource blocks has to be decomposable into factors of 2, 3 and 5; [...]“ [Mol11]

²⁷Bei 1 Sende-Antenne; bei mehreren Antennen wird das Schema komplexer.

²⁸Zitat [Mol11]: „[...] Zadoff-Chu sequences have the remarkable property that they have constant amplitude in the time domain (important for the power amplifiers) and the frequency domain (so that the transmit SNR at all measured frequencies is the same); [...]“

■ MIMO-Techniken

- Layer: Logisch/physikalisch unterscheidbare Einheiten; etwa durch Space-Time-Coding oder ähnlich der durch SWZ entstehenden parallelen Streams (vgl. Kap. 7: MIMO)
- Transmit Diversity: Verteilen der Sendesymbole über mehrere Layer zur Verbesserung der Übertragungsgüte
- Spatial Multiplexing: Verteilung der Sendesymbole in räumlicher Richtung

■ Bemerkungen:

- Obige Beschreibung betrachtet LTE im Release 8 des 3GPP, wobei es sich eher um 3.5G handelt. Bei rel. 9 bzw. rel. 10, LTE-Advanced, dem „richtigen“ 4G, kommen weitere Verbesserungen hinzu, wie z.B.: ([Geß11])
 - Home eNodeB²⁹, Femto cells
 - Self-organizing networks (SON)
 - Band aggregation
 - Enhanced MIMO (BTS: 8, MS: 4)
 - Coordinated multi-point (CoMP)
 - Relaying

²⁹ Enhanced NodeB, eNodeB bezeichnet die Verbesserung des NodeB aus UMTS.

9 Systembeispiele

- GSM
- UMTS
- LTE
- **Historie 3GPP Releases**
- Wie geht es weiter?
- Lernziele
- Literatur



- Rel. 99: Ursprüngliches UMTS; Datenraten 384 kbit/s DL, 64-128 kbit/s UL
- Rel. 4: Core Network (CN) wird IP; einige Änderungen im CN
- Rel. 5: IP Multimedia System (IMS); High Speed Downlink Packet Access (HSDPA): bis zu 14 Mbit/s im DL
- Rel. 6: High Speed Uplink Packet Access (HSUPA): bis zu 3 Mbit/s im UL; mehr Nutzer pro Zelle
- Rel. 7: HSPA+: Continuous Packet Activity zur Reduzierung des Stromverbrauchs im UE; MIMO; 64-QAM (DL) und 16-QAM (UL); theoretische Datenraten: 28 Mbit/s im DL, 11.5 Mbit/s im UL

³⁰Nach [Saut15]



- Rel. 8
 - UMTS-Teil: Kanalbündelung („Dual Carrier“) im DL; Femtozellen („Home NodeB“)
 - LTE-Teil: Einführung von LTE; Self Organizing Network (SON) Funktionalität

- Rel. 9
 - UMTS-Teil: Dual Carrier im UL, Kombination mit MIMO; neuer Ciphering-Algorithmus A5/4, Verdopplung des Cipherkey auf 128 Bit
 - LTE-Teil: „Maintenance Release“

- Rel. 10: LTE-Advanced; Carrier Aggregation (CA); 4x4 und 8x8 MIMO an NodeB, 2x2 an UE; Heterogenous Networks (HetNets)

³¹Nach [Saut15]

- Rel. 11: Enhanced CA; enhanced MIMO; Relay Nodes; neue Frequenzbänder; Cooperative Multipoint (CoMP)
- Rel. 12: Inter-site CA; improved HetNets; Zusammenspiel von LTE, WiFi und HSDPA; massive MIMO, Device to Device (D2D) Communications
- Rel. 13: LTE for Machine-type communication; LTE in Unlicensed Spectrum (LTE-U); LTE Advanced Pro (LTE-A Pro), LTE IoT

- Zitat aus [Mol11]:

„The most authoritative source for UMTS is, of course, the standard itself, whose most recent version can be found at www.3gpp.org. However, this material is exceedingly difficult to read. [...]“

9 Systembeispiele

- GSM
- UMTS
- LTE
- Historie 3GPP Releases
- **Wie geht es weiter?**
- Lernziele
- Literatur



■ Szenario:

- Extrem wachsende Teilnehmerzahlen; Milliarden von Endgeräten
- Differenziertes Datenaufkommen (Smart Metering bis High Speed Streaming)
- Deutlich höhere Datenraten (Video-Streaming, online gaming)
- Sehr geringe Latenzen notwendig
- Industrie 4.0
- Machine-to-Machine (M2M) Communications
- Automotive (Car-to-Car, Car-to-X)
- Internet of Things, Internet of Everything
- Tactile internet

- **Techniken:** ([Boc14], [And14])
 - Device Centric Architecture
 - mmWave
 - Massive MIMO
 - Smarter Devices: Interference rejection, local caching
 - Extreme densification („small cells“) and offloading
 - Cloud-based networks; virtual networks
 - Increased energy efficiency
 - Improved signaling

9 Systembeispiele

- GSM
- UMTS
- LTE
- Historie 3GPP Releases
- Wie geht es weiter?
- **Lernziele**
- Literatur



- Die folgende Aufstellung fasst die zentralen Punkte der behandelten Kapitel zusammen.
- Es wird aufgezeigt, welche Punkte nach Bearbeitung der Kapitel klar sein sollten.
- **Hinweise:**
 - Die Auflistung ist nicht vollständig, sondern führt die wichtigsten Aussagen auf; nicht erwähnte Inhalte sind dennoch bedeutsam.
 - Oft enthalten die Nachweise wichtige Ideen; diese also nicht vernachlässigen.
 - Stets versuchen, Gleichungen in Verbindung mit Interpretationen und Anwendungen zu sehen
 - Des weiteren sollten alle kleinen nützlichen Ergänzungen verstanden sein.
 - Es ist immer eine gute Idee, etwas Gelerntes im Rechner umzusetzen. Dies hilft beim Verständnis und schärft das Bewusstsein für mögliche Probleme.

Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- Bewusstsein, dass und wie die gelernten Methoden in realen Systemen eingesetzt werden
- Ungefähres Gefühl für „mögliche Zahlen“ bzgl. Datenrate etc.

9 Systembeispiele

- GSM
- UMTS
- LTE
- Historie 3GPP Releases
- Wie geht es weiter?
- Lernziele
- **Literatur**



- [Jon11] F. Jondral, *Nachrichtenübertragung*, Schlembach, 4. Auflage, 2011
- [Saut15] M. Sauter, *Grundkurs Mobile Kommunikationssysteme*, Springer, 6. Auflage, 2015
- [Mol11] A. Molisch, *Wireless Communications*, Wiley, 2011
- [Geß11] C. Geßner, *Long Term Evolution – A concise introduction to LTE and its measurement requirements*, Rohde & Schwarz, 2011
- [Boc14] F. Boccardi et. al., *Five Disruptive Technology Directions for 5G*, IEEE Communications Magazine, February 2014
- [And14] J. Andrews et. al., *What Will 5G Be?*, IEEE JSAC Special Issue on 5G Wireless Communication Systems, 2014

