

Schriftliche Prüfung im Kernfach Nachrichtentechnik I

29.09.2017

Musterlösung

Hinweise

Die Prüfungsdauer beträgt **drei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **zehn** gleichgewichteten Aufgaben zu bearbeiten. Benutzen Sie nur die vordruckten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an.

Verwenden Sie zur Bearbeitung einen **dokumentenechten Stift** und keine rote Farbe. Schreiben Sie leserlich und vermeiden Sie, das vordruckte Doppelblatt zu beschriften. Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der **Lösungsweg** und die **gültige Lösung eindeutig erkennbar** sein, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann.

Abzugeben sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten und nach Aufgabennummer sortierten Ausarbeitungen. Nicht abzugeben sind die Aufgabenblätter sowie Ihr Konzeptpapier.

Zugelassene Hilfsmittel

Erlaubt sind **ein** beidseitig von eigener Hand mit Bleistift, Kugelschreiber, Füller o. Ä. beschriebenes **A4-Blatt** (Original, keine Kopie) sowie ein **nicht-programmierbarer** Taschenrechner.

Nach der Prüfung

Das **Ergebnis** Ihrer Prüfung erfahren Sie ab dem **07.11.2017** durch Aushang im Schaukasten des Instituts (Geb. 30.34, Lichttechnisches Institut, EG). Die **Klausureinsicht** ist am Dienstag, den **14.11.2017** im Seminarraum des Instituts (Geb. 05.01, Kreuzstr. 11, 3. OG) Es wird nach der letzten Ziffer der Matrikelnummer unterteilt: **0, 1, 2, 3** von **12:00 bis 14:00 Uhr**; **4, 5, 6** von **14:00 bis 15:30 Uhr** und **7, 8, 9** von **15:30 bis 17:00 Uhr**. Die **mündliche Nachprüfung** findet am **23.11.2017** statt.

Aufgabe 1

Gegeben ist die Generatormatrix eines linearen (n, k) Blockcodes:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Bestimmen Sie die Coderate.
- Bringen Sie \mathbf{G} auf systematische Form.
- Wird durch \mathbf{G} ein zyklischer Blockcode erzeugt? Begründung!

Rechnen Sie im Folgenden mit der systematischen Generatormatrix weiter.

- Bestimmen Sie die minimale Hammingdistanz und geben Sie die Korrekturfähigkeit des Codes an.
- Sie empfangen das Wort $\mathbf{r} = (1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$. Decodieren Sie es mit dem Verfahren der Syndromdecodierung und geben Sie das am wahrscheinlichsten gesendete Infowort an. Bestimmen Sie zunächst die Paritycheckmatrix \mathbf{H} .

Lösung

- $r = k/n = 3/6 = 1/2$
- $(G_{\text{sys}})_{1,i} = (G)_{1,i} + (G)_{2,i} + (G)_{3,i} = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1)$
 $(G_{\text{sys}})_{2,i} = (G)_{1,i} + (G)_{2,i} = (0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1)$
 $(G_{\text{sys}})_{3,i} = (G)_{2,i} = (0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1)$

$$\Rightarrow \mathbf{G}_{\text{sys}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Aus der letzten Zeile von \mathbf{G} lässt sich das Generatorpolynom zu $g(x) = x^3 + x^2 + 1$ ablesen. Dies ist von der Gestalt $x^{n-k} + \dots + 1$. Damit es einen zyklischen Blockcode erzeugt muss es zudem Teiler von $x^n + 1$ sein. Durch Überprüfung mittels Polynomdivision ergibt sich jedoch ein Rest:

$$x^6 + 1 \div (x^3 + x^2 + 1) = x^3 + x^2 + x \text{ Rest } x^2 + x + 1$$

Daher erzeugt \mathbf{G} keinen zyklischen Blockcode.

- Anhand der Generatormatrix erkennt man, dass es keine Linearkombinationen der Zeilen gibt, die zu einem Codewort mit weniger als drei Einsen führen. Da das Nullwort immer Teil eines linearen Blockcodes ist, gilt:

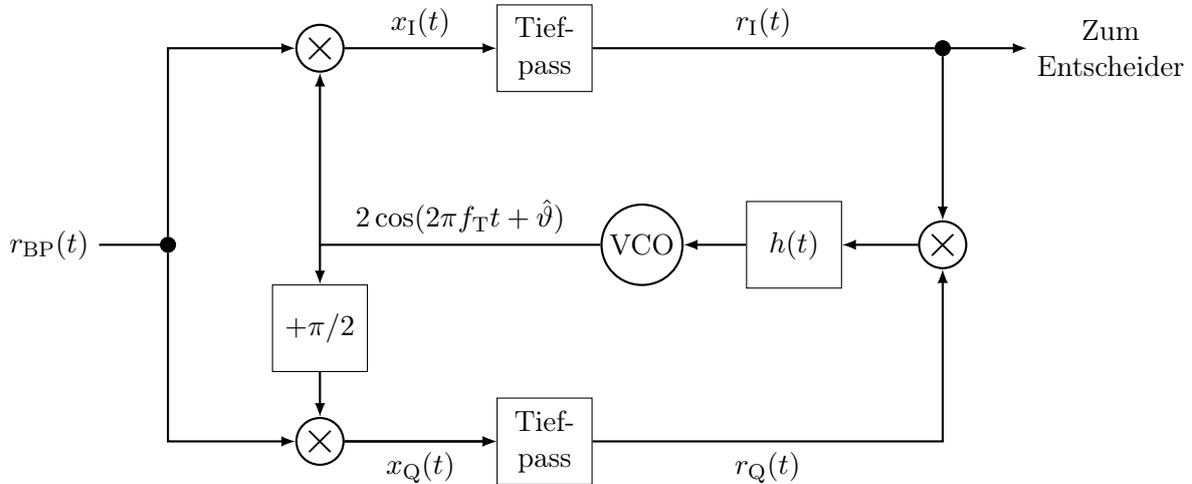
$$d_{\min} = 3 \Rightarrow n_{\text{kor.}} = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor = 1 \text{ Bit korrigierbar}$$

- $\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{I}_{n-k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{s}^T = \mathbf{r}^T \mathbf{H}^T = (1 \ 0 \ 0)$ Da das Syndrom der 4. Spalte

der Matrix \mathbf{H} entspricht ist am wahrscheinlichsten das 4. Bit gekippt. Das am wahrscheinlichsten übertragene Codewort ist folglich: $\hat{\mathbf{r}}^T = (1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)$.

Aufgabe 2

Es soll die Trägersynchronisation eines BPSK-modulierten Signals mittels einer *Costas-Loop* untersucht werden. Das Blockschaltbild ist in folgender Abbildung gegeben:



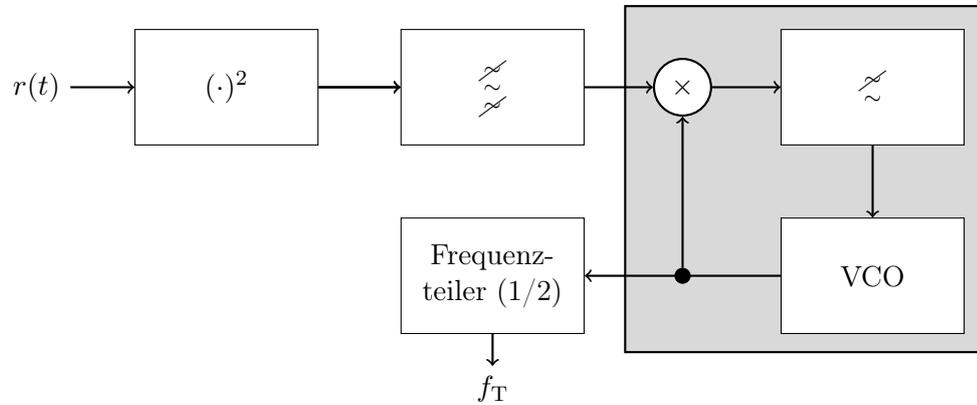
Das Empfangssignal sei gegeben durch $r_{\text{BP}}(t) = a(t) \cos(2\pi f_{\text{T}}t + \vartheta)$, wobei $a(t)$ die BPSK-modulierte Datenfolge ist.

- Geben Sie $x_{\text{I}}(t)$ und $x_{\text{Q}}(t)$ an. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis soweit wie möglich!
- Geben Sie $r_{\text{I}}(t)$ und $r_{\text{Q}}(t)$ an. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis soweit wie möglich!
- Das Signal $r_{\text{BP}}(t)$ sei nun zusätzlich durch AWGN gestört. Unter welcher Bedingung kann in diesem Fall die ursprüngliche Datenfolge vom Entscheider mit geringst möglicher Bitfehlerwahrscheinlichkeit rekonstruiert werden? Beschreiben Sie $r_{\text{Q}}(t)$ in diesem Fall. Begründung!
- Zeichnen Sie eine Schaltung zur Trägerrückgewinnung eines BPSK-modulierten Bandpasssignals, die einen Quadrierer und eine Phasenregelschleife enthält. Kennzeichnen Sie in Ihrer Zeichnung explizit die Phasenregelschleife! Welchen entscheidenden Vorteil besitzt die Costas-Loop gegenüber der Schaltung mit Quadrierer?

Lösung

- $$\begin{aligned}
 x_{\text{I}}(t) &= 2 \cos(2\pi f_{\text{T}}t + \hat{\vartheta}) r_{\text{BP}}(t) \\
 &= 2a(t) \cos(2\pi f_{\text{T}}t + \hat{\vartheta}) \cos(2\pi f_{\text{T}}t + \vartheta) \\
 &= a(t) \left(\cos(4\pi f_{\text{T}}t + \vartheta + \hat{\vartheta}) + \cos(\vartheta - \hat{\vartheta}) \right) \\
 x_{\text{Q}}(t) &= 2 \cos(2\pi f_{\text{T}}t + \hat{\vartheta} + \pi/2) r_{\text{BP}}(t) \\
 &= -2 \sin(2\pi f_{\text{T}}t + \hat{\vartheta}) r_{\text{BP}}(t) \\
 &= -2a(t) \sin(2\pi f_{\text{T}}t + \hat{\vartheta}) \cos(2\pi f_{\text{T}}t + \vartheta) \\
 &= -a(t) \left(\sin(4\pi f_{\text{T}}t + \vartheta + \hat{\vartheta}) + \sin(\hat{\vartheta} - \vartheta) \right) \\
 &= a(t) \left(\sin(\vartheta - \hat{\vartheta}) - \sin(4\pi f_{\text{T}}t + \vartheta + \hat{\vartheta}) \right)
 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
 r_{\text{I}}(t) &= h_{\text{TP}}(t) * x_{\text{I}}(t) = a(t) \cos(\vartheta - \hat{\vartheta}) \\
 r_{\text{Q}}(t) &= h_{\text{TP}}(t) * x_{\text{Q}}(t) = a(t) \sin(\vartheta - \hat{\vartheta})
 \end{aligned}$$

- c) Bei perfekter Phasensynchronisation, d. h. $\hat{\vartheta} = \vartheta \Rightarrow r_Q(t)$ enthält dann nur Rauschanteile. Der Grund, dass die Quadraturkomponente des Informationssignals verschwindet ist, dass BPSK ein reelles Modulationsverfahren ist.
- d) Dies kann durch folgende Schaltung realisiert werden, wobei die Phasenregelschleife grau hinterlegt ist:



Die Costas-Loop besitzt im Vergleich mit dieser Schaltung den entscheidenden Vorteil eines geringeren Phasenrauschens, da sie ohne Quadrierer auskommt.

Aufgabe 3

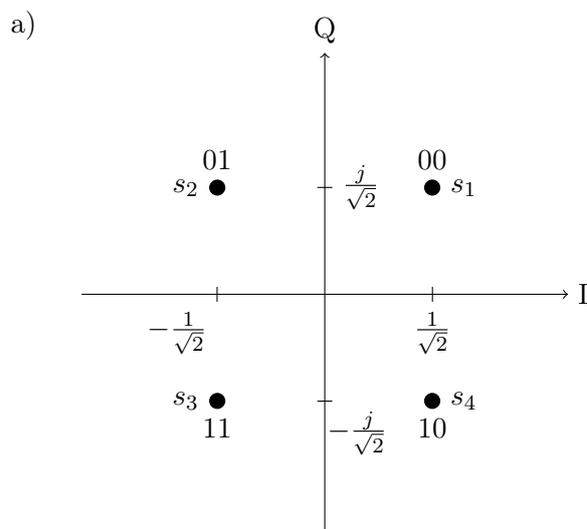
Betrachtet wird ein digitales Übertragungssystem, das Bits mittels einer normierten QPSK-Modulation überträgt. Für das abgetastete Empfangssignal im Basisband gilt

$$r(k) = s(k) + n(k)$$

mit dem Sendesymbol $s(k)$ und der Realisierung $n(k)$ eines komplexen gaußschen Rauschprozesses.

- Skizzieren Sie das Konstellationsdiagramm und weisen Sie den Symbolen die Bits gemäß eines Graycodes zu. Zeichnen Sie außerdem die Entscheidungsschwellen gemäß des Maximum-Likelihood-Verfahrens ein.
- Aufgrund eines Bauteildefekts ist die Rauschleistung im Quadraturzweig doppelt so hoch wie im Inphasenzweig, welche $\sigma_I^2 = 1/4$ betrage. Berechnen Sie die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit unter der Annahme gleichwahrscheinlicher Sendesymbole und Verwendung eines Maximum-Likelihood (ML) Demodulators.
- Schätzen Sie die Bitfehlerwahrscheinlichkeit ab, unter der Annahme, dass ein Symbolfehler zur Entscheidung für das benachbarte Symbol führt. Geben Sie dazu zunächst den allgemeinen Ausdruck für ein M -stufiges Modulationsverfahren an.
- Nun sei die Auftretenswahrscheinlichkeit der Bits nicht mehr gleichwahrscheinlich. Die Wahrscheinlichkeit für eine „1“ betrage $P(B = 1) = 0,7$. Bestimmen Sie die Auftretenswahrscheinlichkeiten der einzelnen Symbole! Welches Demodulations-Verfahren liefert unter dieser Randbedingung die geringste Symbolfehlerwahrscheinlichkeit? Geben Sie hierfür einen allgemeinen Ausdruck für die Entscheidungsregel an und skizzieren Sie die Entscheidungsgrenzen qualitativ, ohne diese explizit zu berechnen.

Lösung



Die ML-Entscheidungsgrenzen sind die Achsen.

$$b) \quad P_F = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 P_F(s_i) = P_F(s_3)$$

$$P_F(s_3) = 1 - P_{\text{korrekt}}(s_3)$$

$$\begin{aligned} P_{\text{korrekt}}(s_3) &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_I} e^{-\frac{(r+1/\sqrt{2})^2}{2\sigma_I^2}} dr \cdot \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Q} e^{-\frac{(r+1/\sqrt{2})^2}{2\sigma_Q^2}} dr \\ &= \int_{-\infty}^{1/(\sqrt{2}\sigma_I)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2}} dr \cdot \int_{-\infty}^{1/(\sqrt{2}\sigma_Q)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2}} dr \\ &= \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma_I}\right) \cdot \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma_Q}\right) = \Phi(\sqrt{2}) \cdot \Phi(1) \approx 0,774 \Rightarrow P_F = 0,226 \end{aligned}$$

$$c) \quad P_{F,\text{Bit}} = P_{F,\text{Sym}} / \log_2(M) \approx \frac{1}{2} \cdot 0,226 = 0,113$$

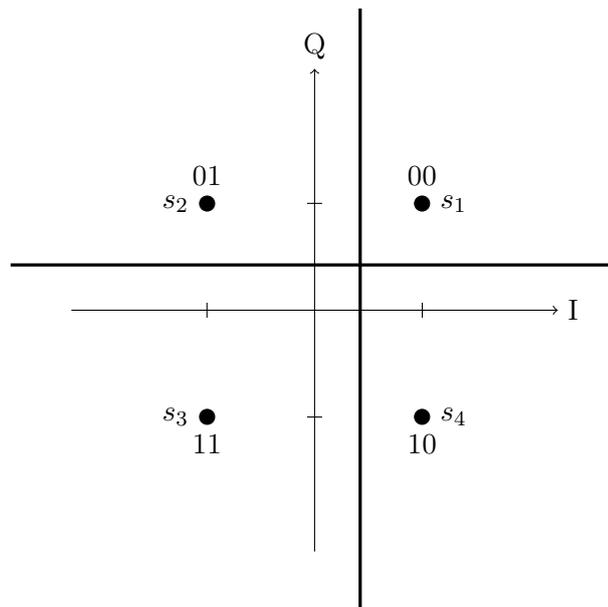
d) Die Symbolwahrscheinlichkeiten ergeben sich wie folgt:

$$\begin{aligned} P(s_1) &= (1 - 0,7)^2 = 0,09 \\ P(s_2) &= P(s_4) = 0,7 \cdot 0,3 = 0,21 \\ P(s_3) &= 0,7^2 = 0,49 \end{aligned}$$

Das Maximum-Aposteriori-Verfahren liefert bei ungleichen a priori-Wahrscheinlichkeiten die geringste Symbolfehlerwahrscheinlichkeit:

$$\hat{s} = \arg \max_{s_i} P(s_i) f(r|s_i) = \arg \max_{s_i} \left\{ \frac{P(s_i)}{2\pi\sigma_I\sigma_Q} e^{-\frac{(r-\text{Re}\{s_i\})^2}{2\sigma_I^2}} e^{-\frac{(r-\text{Im}\{s_i\})^2}{2\sigma_Q^2}} \right\}$$

Die Entscheidungsgrenzen sind qualitativ in der folgenden Grafik skizziert:

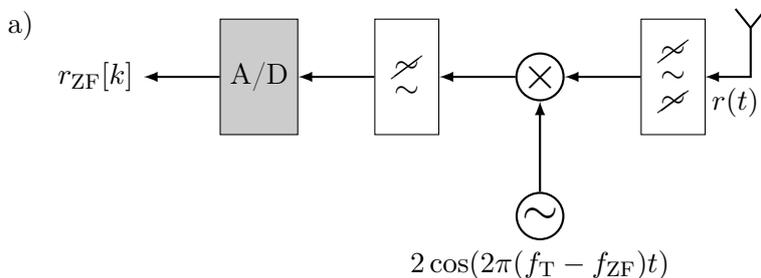


Aufgabe 4

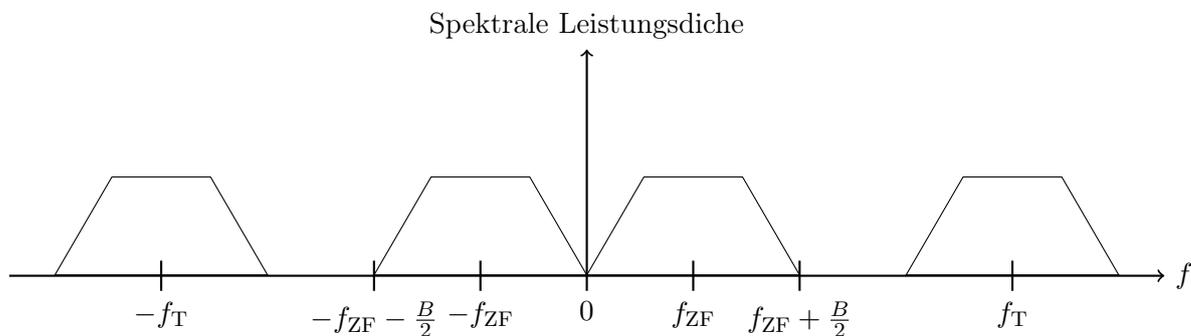
Schnelle Analog-Digital-Wandler (A/D-Wandler) ermöglichen es, das empfangene Bandpasssignal auf einer Zwischenfrequenz $0 < f_{ZF} \ll f_T$ abzutasten, auf die es zuvor gemischt wird. Das Basisbandsignal wird anschließend digital erzeugt. Dieses Vorgehen bietet folgende Vorteile:

- Unterdrückung von Gleichanteilen
 - Geringerer Einfluss des $1/f$ -Rauschens
 - Gleichlauf von Inphasen- und Quadraturkomponente
- a) Skizzieren Sie ein Blockdiagramm dieses Empfängers von der Empfangsantenne bis zum A/D-Wandler.
 - b) Ist das Signal auf der Zwischenfrequenz reell oder komplex? Begründung!
 - c) Das Empfangssignal besitzt die Bandbreite B . Welche Bedingung folgt daraus für die Zwischenfrequenz und für die mindestens notwendige Abtastrate des eingesetzten A/D-Wandlers? Veranschaulichen Sie den Sachverhalt anhand des Leistungsdichtespektrums mit entsprechenden Achsenbeschriftungen.
 - d) Weshalb ist die theoretisch mindestens notwendige Abtastrate in der Praxis nicht ausreichend?
 - e) Weißes Rauschen werde mit einem idealen Tiefpassfilter der Bandbreite B gefiltert und anschließend im zeitlichen Abstand T_A abgetastet. Unter welchen Voraussetzungen sind die abgetasteten Werte unkorreliert?

Lösung



- b) Beim Zwischenfrequenzsignal handelt es sich um ein Bandpasssignal mit symmetrischem Spektrum. Dieses ist folglich reell.
- c)



Aus dem Spektrum liest man ab:

$$f_{ZF, \min} \geq B/2$$

Da das Signal reell ist, gilt folglich:

$$f_A > 2(f_{ZF} + B/2) \geq 2B$$

d) Die gemäß des Abtasttheorems mindestens notwendige Abtastrate gilt für ideale Bandbegrenzung. Hierfür wäre ein ideales Tiefpassfilter notwendig. Dies existiert in der Realität nicht. Reale Filter besitzen eine endliche Flankensteilheit. Dies muss bei der Wahl der Abtastrate berücksichtigt werden. Andernfalls kommt es zu starkem Aliasing.

e) Unkorreliertheit bedeutet: $\varphi_{XX}(\tau) = 0$

Für tiefpassgefiltertes weißes Rauschen gilt:

$$\Phi_{XX}(f) = N_0 \text{rect}_B(f) \quad \bullet \text{---} \circ \quad \varphi_{XX}(\tau) = \frac{\sin(\pi B \tau)}{\pi \tau}$$

Daraus folgt:

$$\varphi_{XX}(\tau) \stackrel{!}{=} 0$$

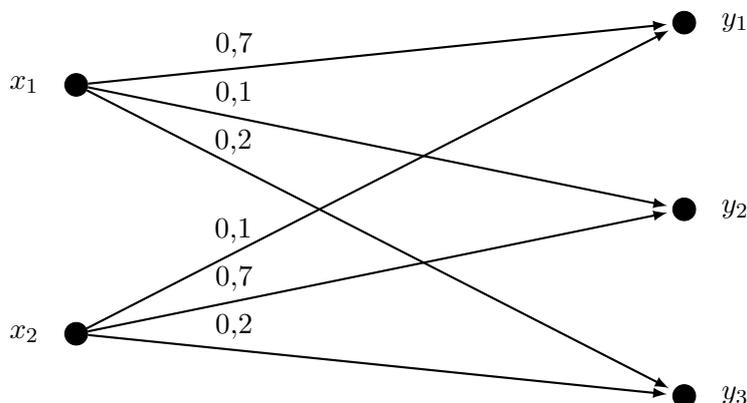
$$\pi B \tau = k \pi \quad \text{mit } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$\tau = k \cdot \frac{1}{B} = T_A$$

Damit die einzelnen Abtastwerte unkorreliert voneinander sind muss für die Abtastzeit folglich $T_A = \frac{k}{B}$ gelten.

Aufgabe 5

Gegeben ist der folgende gedächtnislose Übertragungskanal mit den von der Quelle X erzeugten Eingangssymbolen x_1, x_2 und den Ausgangssymbolen y_1, y_2, y_3 der Senke Y .



Die Auftretenswahrscheinlichkeiten der Quellsymbole sind $P(x_1) = 2/7$ und $P(x_2) = 5/7$.

- Berechnen Sie die Redundanz der Quelle.
- Berechnen Sie die Entropie der Senke.
- Berechnen Sie die bedingte Entropie $H(Y|X)$.
- Berechnen Sie die mittlere Transinformation $I(X; Y)$.
- Für welche a priori-Verteilung wird im gegebenen Kanal die Kanalkapazität erreicht? Begründung!

Lösung

$$\text{a) } R_Q = H_0 - H(X) = \log_2 2 - \left(-\frac{2}{7} \log_2 \frac{2}{7} - \frac{5}{7} \log_2 \frac{5}{7} \right) \approx 0,14 \text{ Bit/Symbol}$$

$$\text{b) } P(y_1) = \frac{2}{7} \cdot 0,7 + \frac{5}{7} \cdot 0,1 \approx 0,27$$

$$P(y_2) = \frac{2}{7} \cdot 0,1 + \frac{5}{7} \cdot 0,7 \approx 0,53$$

$$P(y_3) = \frac{2}{7} \cdot 0,2 + \frac{5}{7} \cdot 0,2 = 0,2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H(Y) &= - \sum_{m=1}^3 P(y_m) \log_2 P(y_m) = -0,27 \log_2 0,27 - 0,53 \log_2 0,53 - 0,2 \log_2 0,2 \\ &\approx 1,46 \text{ Bit/Symbol} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } H(Y|X) &= - \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^3 P(x_n; y_m) \log_2 P(y_m|x_n) \\ &= - \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^3 P(x_n) P(y_m|x_n) \log_2 P(y_m|x_n) \\ &= \left(\frac{2}{7} + \frac{5}{7} \right) \cdot (-0,7 \log_2 0,7 - 0,1 \log_2 0,1 - 0,2 \log_2 0,2) \approx 1,16 \end{aligned}$$

$$\text{d) } I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X) \approx 1,46 - 1,16 = 0,3 \text{ Bit/Kanalnutzung}$$

e) $C = \max_{P(x)} I(X; Y)$. Der Kanal ist (schwach) symmetrisch. In diesem Fall wird die Kanal-
kapazität für eine Gleichverteilung der Eingangssymbole erreicht.

Aufgabe 6

Zum Detektion von Drohnen soll auf dem Physik-Hochhaus des KIT ein Rundsuchradar installiert werden. Dieses trifft die Zielentscheidung anhand der Energie empfangener Echopulse. Das Signal x am Eingang des Detektors besitzt näherungsweise die folgenden Wahrscheinlichkeitsdichten:

$$\mathcal{H}_0 \text{ (kein Objekt vorhanden) : } f(x|\mathcal{H}_0) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x/2}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_1 \text{ (Objekt vorhanden) : } f(x|\mathcal{H}_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{mit } \mu = 10 \text{ und } \sigma = 1$$

Die angestrebte Falschalarmwahrscheinlichkeit beträgt $P_{\text{FA}} = 10^{-2}$.

- Bestimmen Sie die Entscheidungsschwelle gemäß des Neyman-Pearson-Verfahrens!
- Wie hoch ist in diesem Fall die erzielbare Detektionswahrscheinlichkeit?
- Da die Detektionswahrscheinlichkeit nicht ausreicht, beschließen Sie, N unabhängige Entscheidungen gemeinsam zu betrachten und sich für ein Ziel zu entscheiden, wenn der Detektor mindestens ein Mal in N Beobachtungen ein Ziel entdeckt hat. Bestimmen Sie das kleinste N , so dass die Detektionswahrscheinlichkeit $P_{\text{D}} = 1 - 10^{-4}$ erzielt wird.
- Worin liegt das Problem des in Teilaufgabe c) beschriebenen Vorgehens?
(*Hinweis:* Berechnen Sie die sich ergebende Falschalarmwahrscheinlichkeit!)
- Nennen Sie zwei verschiedene Möglichkeiten, die Sie als Systemingenieur haben, um die Detektionswahrscheinlichkeit bei konstanter Falschalarmwahrscheinlichkeit zu verbessern!

Lösung

$$\text{a) } \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\infty} e^{-x/2} dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{1/2} e^{-x/2} \right]_{\gamma}^{\infty} = \left[-e^{-x/2} \right]_{\gamma}^{\infty} = -0 + e^{-\gamma/2} = e^{-\gamma/2} \stackrel{!}{=} 10^{-2}$$

$$\Leftrightarrow -\gamma/2 = \ln(10^{-2})$$

$$\Leftrightarrow \gamma = -2 \ln(10^{-2}) \approx 9,21$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P_{\text{D}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{9,21}^{\infty} e^{-\frac{(x-10)^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-0,79}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= 1 - \Phi(-0,79) = 1 - (1 - \Phi(0,79)) = \Phi(0,79) \approx 0,785 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P_{\text{D},N} &= 1 - (1 - P_{\text{D}})^N \stackrel{!}{=} 1 - 10^{-4} \\ \Leftrightarrow 10^{-4} &= (1 - P_{\text{D}})^N = 10^{N \log_{10}(1 - P_{\text{D}})} \\ \Leftrightarrow N &= \frac{-4}{\log_{10}(1 - P_{\text{D}})} \approx 5,99 \quad \Rightarrow N_{\text{min}} = 6 \end{aligned}$$

$$\text{d) } P_{\text{FA},N} = 1 - (1 - P_{\text{FA}})^N = 1 - (1 - P_{\text{FA}})^6 \approx 0,059$$

Es ist zu erkennen, dass sich durch dieses Vorgehen ebenfalls die Falschalarmwahrscheinlichkeit erhöht!

- Zum Erzielen einer höheren Detektionswahrscheinlichkeit bei gleich bleibender Falschalarmwahrscheinlichkeit können folgende Maßnahmen ergriffen werden:

- Erhöhung der Sendeleistung
- Verwendung einer Empfangsantenne mit höherem Gewinn
- Mittelung mehrerer unabhängiger Beobachtungen und Anpassung der Schwelle

Aufgabe 7

Ein OFDM-System mit 4 Unterträgern und rechteckiger Impulsformung soll eine Datenrate von 1 Mbit/s unterstützen. Alle Unterträger seien mit Datensymbolen einer QPSK-Modulation belegt. Die Bit-zu-Symbol-Zuordnung ist der folgenden Tabelle zu entnehmen.

Bits	Symbol
00	1
01	j
11	-1
10	$-j$

Die Dauer des Schutzintervalls betrage $T_G = T_N/4$ mit der OFDM-Nutzsymboldauer T_N .

- Geben Sie die Bandbreite des Systems, die Dauer des OFDM-Nutzsymbols und den Unterträgerabstand an.
- Wie lang darf die Kanalimpulsantwort maximal sein, damit keine Intersymbolinterferenz auftritt? Welche minimale Kohärenzzeit muss der Kanal haben, damit er als zeitinvariant angesehen werden kann?
- Sie empfangen ein AWGN-verraushtes OFDM-Symbol im Zeitbereich *mit cyclic prefix*:

$$r = (-0,4 + j0,6 \quad -0,2 + j0,5 \quad 0,2 \quad 0,6 - j0,3 \quad -0,5 + j0,5)^T$$

Demodulieren Sie den Unterträger mit dem Index 1 nach dem Maximum-Likelihood-Verfahren, wobei die Unterträger mit $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ indiziert sind und geben Sie die am wahrscheinlichsten gesendeten Bits an.

Hinweis: Die diskrete Fouriertransformation ist wie folgt definiert:

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) e^{j2\pi nk/N} \quad \longleftrightarrow \quad X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi kn/N}$$

Lösung

$$a) \quad B = \frac{R}{\log_2 M} \cdot \frac{T_G + T_N}{T_N} = \frac{10^6 \text{ Bit/s}}{2 \text{ Bit/Symbol}} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{8} \cdot 10^6 \text{ Symbole/s} = 625 \text{ kHz}$$

$$T_N = N_T / B = \frac{4}{625 \text{ kHz}} = 6,4 \mu\text{s}$$

$$\Delta f = 1/T_N = 156,25 \text{ kHz}$$

$$b) \quad T_d = T_N / N_T = 1,6 \mu\text{s}$$

$$\Rightarrow \tau_{\max} \leq 1,6 \mu\text{s}$$

$$\tau_c \geq T_N + T_G = 8 \mu\text{s}$$

$$c) \quad R(1) = \sum_{k=0}^{N_T-1} r(k) e^{-j2\pi k/4} = \sum_{k=0}^{N_T-1} r(k) e^{-j\pi k/2} = \sum_{k=0}^{N_T-1} r(k) (-j)^k$$

$$= 1 \cdot r(0) - j \cdot r(1) - 1 \cdot r(2) + j \cdot r(3)$$

$$= -0,2 + j0,5 - j0,2 - 0,6 + j0,3 - j0,5 - 0,5$$

$$= -1,3 + j0,1$$

$$\Rightarrow \text{mit dem ML-Prinzip folgt: } \hat{R}(1) = -1$$

Die am wahrscheinlichsten gesendeten Bits sind demnach (1 1) .

Aufgabe 8

Gegeben ist ein Übertragungssystem mit einer Systembandbreite von 200 kHz, welches über einen AWGN-Kanal Daten überträgt. Das SNR beträgt 12 dB.

- Erläutern Sie den Begriff *Kanalkapazität* und berechnen Sie diese für die oben angegebenen Parameter.
- Zeigen Sie, dass eine Erhöhung der Bandbreite die Kapazität nicht beliebig steigern kann.
- Betrachtet wird ein Direct-Sequence-Spread-Spectrum System mit OVFS-Codes, drei Nutzern und BPSK-Modulation. Nutzer 1 verwendet die Spreizsequenz $(1 \ -1)$ und besitzt einen Spreizfaktor von 2. Die beiden anderen übertragen mit der halben Datenrate von Nutzer 1. Geben Sie deren Spreizfaktor sowie die verwendeten Spreizcodes aus der Menge der OVFS-Codes an.
- Im DSSS-System aus Teilaufgabe c) empfängt Ihr Endgerät die verrauschte Folge:
 $r = (-1,3 \ 0,7 \ 0,1 \ 3,5 \ -0,9 \ -3,2 \ 1,4 \ -1,5)$.
 Decodieren Sie die Daten des Nutzers 1.

Lösung

- Die Kanalkapazität ist eine obere Schranke für bei geeigneter Codierung unter AWGN maximal erreichbare Bitrate bei beliebig kleiner Fehlerzahl.

$$C = W \log_2(1 + \text{SNR}) = 200\text{kHz} \log_2(1 + 10^{\frac{12}{10}}) \approx 814,92 \frac{\text{kbit}}{\text{s}}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{B \rightarrow \infty} C(B) &= \lim_{B \rightarrow \infty} B \log_2\left(1 + \frac{S}{N_0 B}\right) = \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{\log_2\left(1 + \frac{S}{N_0 B}\right)}{B^{-1}} \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{S}{N_0 B}\right)^{-1} \left(\frac{-S}{N_0 B^2 \ln 2}\right)}{-B^{-2}} = \frac{S}{N_0 \ln 2} \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{S}{N_0 B}} \\ &= \frac{S}{N_0 \ln 2} = \frac{S}{N_0} \log_2 e \end{aligned}$$

- Der Spreizfaktor ist für beide Nutzer 4. Die verwendeten Codes sind:

$$\text{Nutzer 2: } (1 \ 1 \ 1 \ 1)$$

$$\text{Nutzer 3: } (1 \ 1 \ -1 \ -1)$$

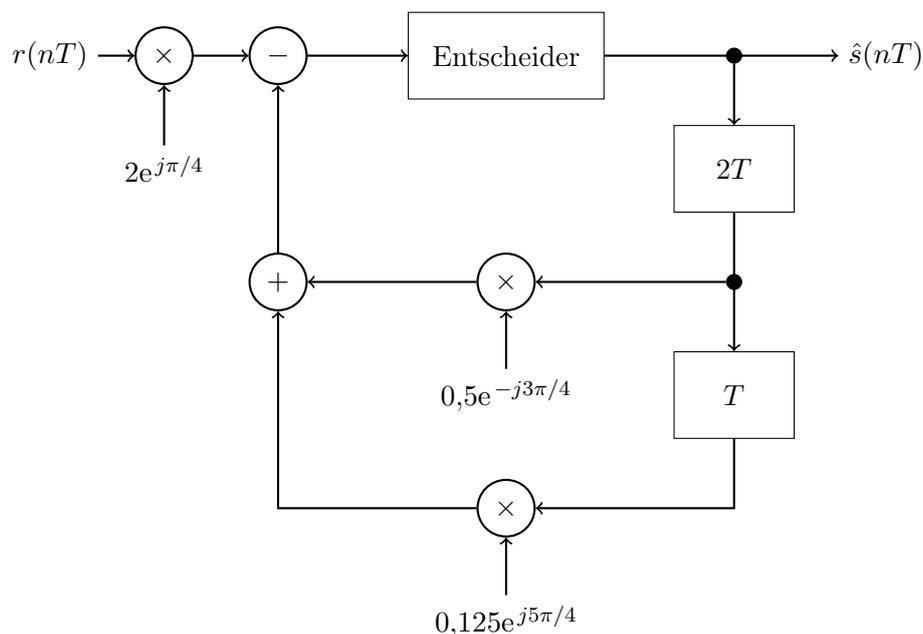
- $$\hat{x}_1 = (-1,3 - 0,7 \ 0,1 - 3,5 \ -0,9 + 3,2 \ 1,4 + 1,5)$$

$$= (-2 \ -3,4 \ 2,3 \ 2,9)$$

$$\Rightarrow \hat{s}_1 = (-1 \ -1 \ 1 \ 1)$$

Aufgabe 9

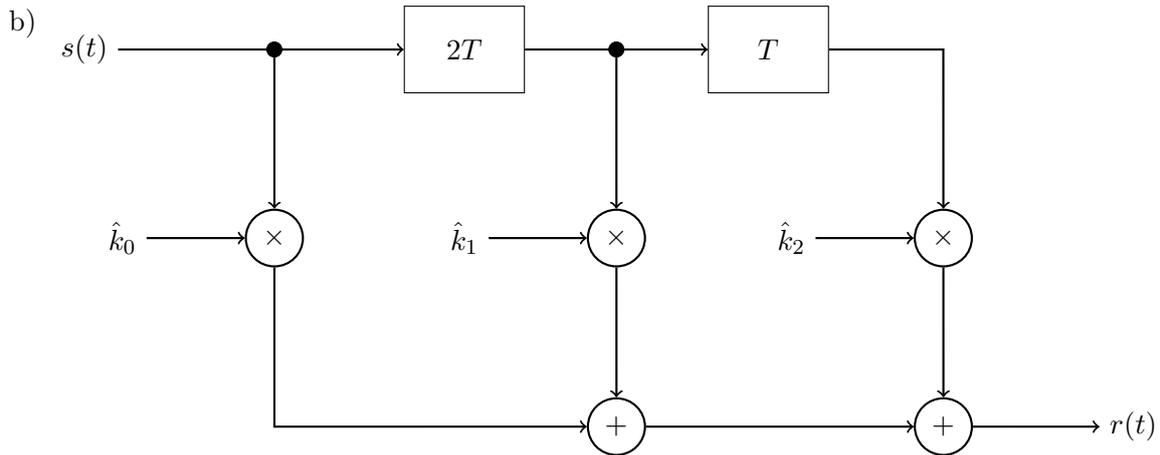
Gegeben ist der folgende Entzerrer zur Entzerrung eines stationären Mehrwegekanals:



- Um welchen Entzerrertyp handelt es sich? Erklären Sie, wie der Entzerrer funktioniert und welches Problem er besitzt.
- Skizzieren Sie den Kanal, für den dieser Entzerrer ausgelegt wurde als FIR-Filter. Geben Sie alle Koeffizienten und Verzögerungen an.
- Mit welcher Art von Fading ist in diesem Kanal zu rechnen? Begründung!
- Skizzieren Sie qualitativ die Kurven für die Bitfehlerrate in Abhängigkeit von E_b/N_0 für BPSK in reinem AWGN sowie in einem Mehrwegekanal, wenn kein Entzerrer verwendet wird und liefern Sie eine Begründung für den Verlauf.
- Erläutern Sie, welche weitere Maßnahme in einem nicht-stationären Kanal zur erfolgreichen Kanalentserrung notwendig ist!

Lösung

- Es handelt sich um einen Entzerrer mit Entscheidungsrückkopplung (*Decision-Feedback-Equalizer*). Dieser schätzt das Symbol und führt dieses entsprechend der geschätzten Kanalimpulsantwort zurück und subtrahiert die geschätzten Mehrwegepfade vom empfangenen Signal. Ein Problem entsteht, falls das Symbol falsch geschätzt wird. Dann werden die falschen Signalanteile subtrahiert, wodurch es zu Fehlerfortpflanzung kommen kann.

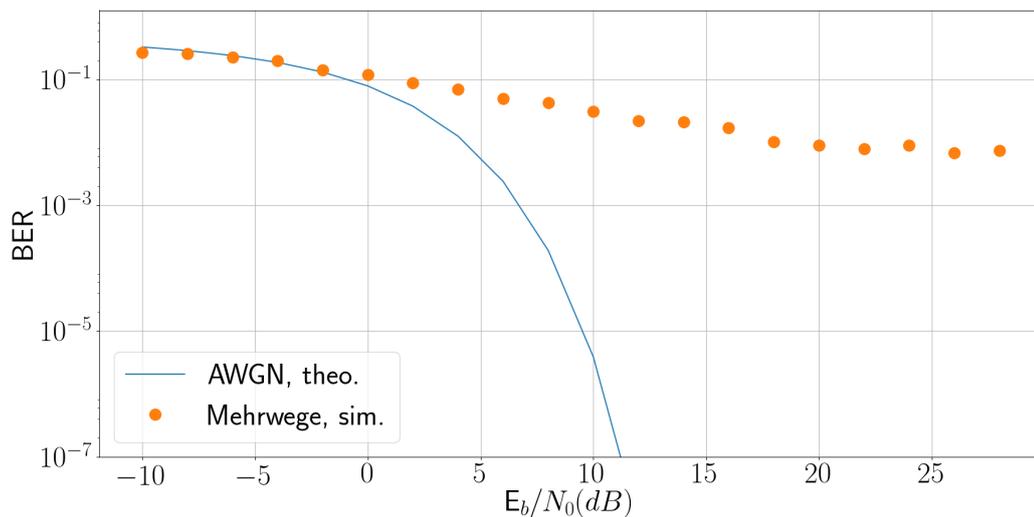


$$\frac{1}{\hat{k}_0} = 2e^{j\pi/4} \Rightarrow \hat{k}_0 = \frac{1}{2}e^{-j\pi/4}$$

$$\frac{\hat{k}_1}{\hat{k}_0} = 0,5e^{-j3\pi/4} \Rightarrow \hat{k}_1 = 0,5e^{-j3\pi/4} \cdot \hat{k}_0 = \frac{1}{4}e^{-j\pi}$$

$$\frac{\hat{k}_2}{\hat{k}_0} = 0,125e^{j5\pi/4} \Rightarrow \hat{k}_2 = 0,125e^{j5\pi/4} \cdot \hat{k}_0 = \frac{1}{16}e^{j\pi}$$

- c) Es ist mit Intersymbolinterferenz und folglich mit frequenzselektivem Fading zu rechnen. (Da der Kanal stationär ist, ist das Fading *slow* bzw. zeitlich unveränderlich.)
- d) Falls kein Entzerrer verwendet wird, bildet sich ein sogenannter *error floor* aus. Dies bedeutet, dass trotz fehlendem Rauschen einige Symbole aufgrund des Einfluss des Kanals immer im falschen Entscheidungsgebiet landen. Dadurch verringert sich die Bitfehlerwahrscheinlichkeit ab einem gewissen E_b/N_0 nicht mehr, sondern bleibt konstant:



- e) In einem nicht-stationären Kanal müssen die Kanalkoeffizienten periodisch geschätzt werden. (Dazu werden Trainingssequenzen, bspw. Präambeln oder Midambeln verwendet.)

Aufgabe 10

Zur Übertragung von stochastisch unabhängigen, gleichverteilten Datenbits soll ein digitales Funkübertragungssystem mit einem linearen Modulationsverfahren ausgelegt werden.

a) Ordnen Sie dazu die Blöcke des Senders,

- Pulsformungsfilter
- Quadraturmischer
- Kanalencoder
- Bit-zu-Symbol-Zuordnung
- Digital-Analog-Wandler

anhand eines Blockdiagramms in der richtigen Reihenfolge an und erklären Sie kurz die Funktion der jeweiligen Blöcke.

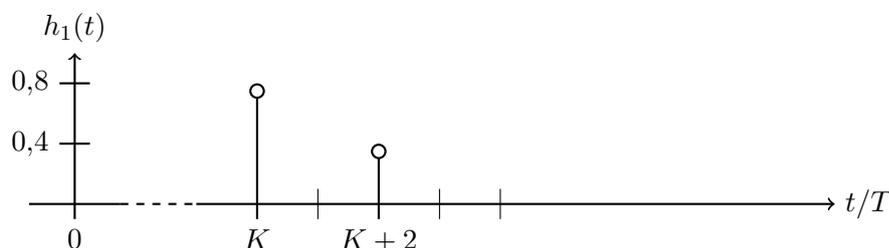
b) Welche beiden Aufgaben besitzt ein Quellenencoder und weshalb kann in diesem Fall darauf verzichtet werden?

c) Als Übertragungsverfahren wird $\pi/4$ -DQPSK eingesetzt. Zeichnen Sie das Konstellationsdiagramm und beschreiben Sie Funktion und Vorteile dieses Modulationsverfahrens.

d) Die Übertragung wird mittels des folgenden Modells beschrieben:

$$r(t) = h(t) * s(t) + n(t),$$

wobei $n(t)$ die Realisierung eines weißen gaußschen Rauschprozesses und $h(t)$ die Impulsantwort des Kanals ist. Es wird die folgende Kanalimpulsantwort erwartet, wobei T die Symboldauer des Übertragungssystems und $K \in \mathbb{N} > 1$ ist:



Genügt in diesem Fall die Verwendung eines Matched-Filters zur Maximierung des Signal-zu-Rauschleistungsverhältnisses am Empfänger? Begründung!

Lösung

- a) 1. **Kanalencoder:** Fügt strukturierte Redundanz hinzu und sichert dadurch die Übertragung gegenüber Fehlern durch den Kanal ab.
2. **Bit-zu-Symbol-Zuordnung:** Weist den Bits Inphasen- und Quadraturanteil der Symbole aus dem Konstellationsdiagramm zu.
3. **Pulsformung:** Formt den Puls und bestimmt dadurch das Spektrum des Sendesignals.
4. **Digital-Analog-Wandler:** Umsetzung der digitalen in analoge Signale.
5. **Quadraturmischer:** Umsetzung des Basisbandsignals in ein Bandpasssignal.

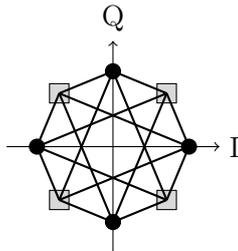
Hinweis zum Korrekturmodus: Je zwei Fehler geben einen Punkt abzug.

b) Die Aufgaben des Quellenencoders sind:

1. Abbildung des Eingensalphabets auf gleichverteilte Bits.
2. Befreiung der Eingangsdaten von Redundanz.

Da bereits gleichverteilte und redundanzfreie (da stochastisch unabhängig voneinander) Bits vorliegen, kann auf den Quellenencoder verzichtet werden.

c) Bei $\pi/4$ -DQPSK werden die Symbole abwechselnd aus zwei um $\pi/4$ gegeneinander verdrehten Konstellationsdiagrammen entnommen. Dadurch werden Nulldurchgänge effektiv vermieden, was vorteilhaft für nicht-lineare Verstärker ist.



Zudem handelt es sich um ein differenzielles Modulationsverfahren, weshalb kein kohärenter Empfänger benötigt wird.

d) Nein, da sich Symbole zeitverzögert überlagern würde es mit einem ausschließlich auf die Sendewellenform angepassten Matched-Filter zu Intersymbol-Interferenz kommen. Daher wird zusätzlich ein Entzerrer benötigt.

Ja, falls das Matched-Filter auf $h(t) * s(t)$ gematched ist.

Formelsammlung und Tabellen

A Tabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$								
0,00	0,500000	0,80	0,788145	1,60	0,945201	2,40	0,991802	3,20	0,999313
0,02	0,507978	0,82	0,793892	1,62	0,947384	2,42	0,992240	3,22	0,999359
0,04	0,515953	0,84	0,799546	1,64	0,949497	2,44	0,992656	3,24	0,999402
0,06	0,523922	0,86	0,805105	1,66	0,951543	2,46	0,993053	3,26	0,999443
0,08	0,531881	0,88	0,810570	1,68	0,953521	2,48	0,993431	3,28	0,999481
0,10	0,539828	0,90	0,815940	1,70	0,955435	2,50	0,993790	3,30	0,999517
0,12	0,547758	0,92	0,821214	1,72	0,957284	2,52	0,994132	3,32	0,999550
0,14	0,555670	0,94	0,826391	1,74	0,959070	2,54	0,994457	3,34	0,999581
0,16	0,563559	0,96	0,831472	1,76	0,960796	2,56	0,994766	3,36	0,999610
0,18	0,571424	0,98	0,836457	1,78	0,962462	2,58	0,995060	3,38	0,999638
0,20	0,579260	1,00	0,841345	1,80	0,964070	2,60	0,995339	3,40	0,999663
0,22	0,587064	1,02	0,846136	1,82	0,965621	2,62	0,995604	3,42	0,999687
0,24	0,594835	1,04	0,850830	1,84	0,967116	2,64	0,995855	3,44	0,999709
0,26	0,602568	1,06	0,855428	1,86	0,968557	2,66	0,996093	3,46	0,999730
0,28	0,610261	1,08	0,859929	1,88	0,969946	2,68	0,996319	3,48	0,999749
0,30	0,617911	1,10	0,864334	1,90	0,971283	2,70	0,996533	3,50	0,999767
0,32	0,625516	1,12	0,868643	1,92	0,972571	2,72	0,996736	3,52	0,999784
0,34	0,633072	1,14	0,872857	1,94	0,973810	2,74	0,996928	3,54	0,999800
0,36	0,640576	1,16	0,876976	1,96	0,975002	2,76	0,997110	3,56	0,999815
0,38	0,648027	1,18	0,881000	1,98	0,976148	2,78	0,997282	3,58	0,999828
0,40	0,655422	1,20	0,884930	2,00	0,977250	2,80	0,997445	3,60	0,999841
0,42	0,662757	1,22	0,888768	2,02	0,978308	2,82	0,997599	3,62	0,999853
0,44	0,670031	1,24	0,892512	2,04	0,979325	2,84	0,997744	3,64	0,999864
0,46	0,677242	1,26	0,896165	2,06	0,980301	2,86	0,997882	3,66	0,999874
0,48	0,684386	1,28	0,899727	2,08	0,981237	2,88	0,998012	3,68	0,999883
0,50	0,691463	1,30	0,903200	2,10	0,982136	2,90	0,998134	3,70	0,999892
0,52	0,698468	1,32	0,906582	2,12	0,982997	2,92	0,998250	3,72	0,999900
0,54	0,705401	1,34	0,909877	2,14	0,983823	2,94	0,998359	3,74	0,999908
0,56	0,712260	1,36	0,913085	2,16	0,984614	2,96	0,998462	3,76	0,999915
0,58	0,719043	1,38	0,916207	2,18	0,985371	2,98	0,998559	3,78	0,999922
0,60	0,725747	1,40	0,919243	2,20	0,986097	3,00	0,998650	3,80	0,999928
0,62	0,732371	1,42	0,922196	2,22	0,986791	3,02	0,998736	3,82	0,999933
0,64	0,738914	1,44	0,925066	2,24	0,987455	3,04	0,998817	3,84	0,999938
0,66	0,745373	1,46	0,927855	2,26	0,988089	3,06	0,998893	3,86	0,999943
0,68	0,751748	1,48	0,930563	2,28	0,988696	3,08	0,998965	3,88	0,999948
0,70	0,758036	1,50	0,933193	2,30	0,989276	3,10	0,999032	3,90	0,999952
0,72	0,764238	1,52	0,935745	2,32	0,989830	3,12	0,999096	3,92	0,999956
0,74	0,770350	1,54	0,938220	2,34	0,990358	3,14	0,999155	3,94	0,999959
0,76	0,776373	1,56	0,940620	2,36	0,990862	3,16	0,999211	3,96	0,999963
0,78	0,782305	1,58	0,942947	2,38	0,991344	3,18	0,999264	3,98	0,999966

B Folgen und Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1 \quad (\text{B.1})$$

$$\sum_{n=0}^k x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \quad \text{für } x \neq 1 \quad (\text{B.2})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \binom{r}{3} x^3 + \dots = (1+x)^r \quad \text{für } \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \dots = e^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \quad (\text{B.4})$$

$$\sum_{n=1}^k n = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (\text{B.5})$$

C Integralrechnung

$$\int \delta(x-x_0) \varphi(x) dx = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad (\text{C.1})$$

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) \quad (\text{C.2})$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^3} (a^2 x^2 - 2ax + 2) \quad (\text{C.3})$$

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) \quad (\text{C.4})$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{für } a > 0, n \in \mathbb{N} \quad (\text{C.5})$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \quad \text{für } a > 0 \quad (\text{C.6})$$

D Formeln zur Fouriertransformation

Definition

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad \circ \bullet \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = X(f) \quad (\text{D.1})$$

Eigenschaften

$$\sum c_i x_i(t) \quad \circ \bullet \quad \sum c_i X_i(f) \quad (\text{D.2})$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \quad \circ \bullet \quad (j2\pi f)^n X(f) \quad (\text{D.3})$$

$$x(t-t_0) \quad \circ \bullet \quad e^{-j2\pi ft_0} X(f) \quad (\text{D.4})$$

$$e^{j2\pi f_0 t} x(t) \quad \circ \bullet \quad X(f-f_0) \quad (\text{D.5})$$

$$x(t) * y(t) \quad \circ \bullet \quad X(f) Y(f) \quad (\text{D.6})$$

$$x(t)y(t) \quad \circ \bullet \quad X(f) * Y(f) \quad (\text{D.7})$$

$$x(t/a) \quad \circ \bullet \quad |a| X(af) \quad (\text{D.8})$$

Korrespondenzen

1	$\circ \bullet$	$\delta(f)$	(D.9)
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{2}\delta(f + f_0) + \frac{1}{2}\delta(f - f_0)$	(D.10)
$\frac{\sin(\pi F t)}{\pi t}$	$\circ \bullet$	$X(f) = \begin{cases} 1 & \text{für } f < \frac{F}{2} \\ 0 & \text{für } f > \frac{F}{2} \end{cases}$	(D.11)
$e^{-\pi t^2}$	$\circ \bullet$	$e^{-\pi f^2}$	(D.12)
$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für } t > \frac{T}{2} \end{cases}$	$\circ \bullet$	$\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}$	(D.13)
$\frac{1}{2}\delta(t + t_0) + \frac{1}{2}\delta(t - t_0)$	$\circ \bullet$	$\cos(2\pi f t_0)$	(D.14)
$\delta(t)$	$\circ \bullet$	1	(D.15)
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\circ \bullet$	$\frac{j}{2}\delta(f + f_0) - \frac{j}{2}\delta(f - f_0)$	(D.16)
$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$	(D.17)
$e^{-a t }, \quad a > 0$	$\circ \bullet$	$\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$	(D.18)
$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}, \quad a > 0$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$	(D.19)
$x(t) = \begin{cases} te^{-at} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}, \quad a > 0$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^2}$	(D.20)
$\frac{1}{\pi t}$	$\circ \bullet$	$-j \operatorname{sign}(f)$	(D.21)
$j \operatorname{sign}(t)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{\pi f}$	(D.22)
$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\lambda)}{t - \lambda} d\lambda$	$\circ \bullet$	$-j \operatorname{sign}(f) X(f)$	(D.23)
$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$	(D.24)

E Trigonometrie

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad (\text{E.1})$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad (\text{E.2})$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y)) \quad (\text{E.3})$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y)) \quad (\text{E.4})$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x - y) + \sin(x + y)) \quad (\text{E.5})$$