Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Nachrichtentechnik
Prof. Dr.-Ing. Laurent Schmalen

Schriftliche Prüfung zur Vorlesung

Nachrichtentechnik I

21.09.2021

Musterlösung

Hinweise

Die Prüfungsdauer beträgt **drei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **neun** Aufgaben zu bearbeiten.
Benutzen Sie nur die zur Verfügung gestellten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an.
Verwenden Sie zur Bearbeitung einen **dokumentenechten Stift** und keine rote Farbe. Schreiben Sie leserlich und vermeiden Sie, das vorgedruckte Doppelblatt zu beschriften. Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der **Lösungsweg und die gültige Lösung eindeutig erkennbar** sein, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann.
Abzugeben sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten und **nach Aufgabennummer sortierten Ausarbeitungen**. Nicht abzugeben sind die Aufgabenblätter, Ihre Formelsammlung sowie Ihr Konzeptpapier.

Zugelassene Hilfsmittel

Erlaubt sind **ein** beidseitig von eigener Hand mit Bleistift, Kugelschreiber, Füller o. Ä. beschriebenes **A4-Blatt** (Original, keine Kopie) sowie ein **nicht-programmierbarer** Taschenrechner.

Nach der Prüfung

Das **Ergebnis** Ihrer Prüfung erfahren Sie spätestens am **19.10.2021** im Online-Notensystem. Details zur **Klausureinsicht** finden Sie auf der Webseite des Instituts. Dort werden Sie auch weitere Informationen zur **mündlichen Nachprüfung** finden.

Geben Sie diese Aufgaben nicht mit ab, sondern behalten Sie diese als Erinnerung für oben gegebene Termine.

Aufgabe 1 (18 Punkte)

Für ein COVID-19 Testzentrum sollen die Testergebnisse übertragen werden. Aus einer Statistik geht hervor, dass 40 % der Tests negativ und 60 % positiv sind. Weiterhin wissen Sie, dass von den positiven Tests die Alpha-Variante zu 5 %, die Beta-Variante ebenfalls zu 5 %, die Gamma-Variante zu 10 % und die Delta-Variante zu 80 % auftritt. Die Zufallsvariable X beschreibt das Ergebnis eines Tests.

a) Für jeden Test sollen Sie das Testergebnis an das Robert-Koch-Institut kommunizieren. Ist ein Test positiv, so ist die Übermittlung der entspechenden Variante ausreichend. Geben Sie den Ereignisraum Ω mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten an. *(3 Punkte)*

b) Generieren Sie für den Ereignisraum Ω eine präfixfreie Codierung mit minimaler mittlerer Codewortlänge und geben Sie die Codewörter explizit an. *(3 Punkte)*

c) Berechnen Sie die Redundanz R_{C} Ihres Codes. *(4 Punkte)*

d) Ist es sinnvoll, Ihre gefundene Codierung der Testergebnisse über Jahre hinweg als Standard festzulegen? Begründen Sie Ihre Antwort. *(2 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

Ein Quantisierer besitzt zwei Quantisierungsstufen $\bar{b}_1$ und $\bar{b}_2$ mit $\bar{b}_1 < \bar{b}_2$ und $\bar{b}_1 = -\bar{b}_2$. Das zu quantisierende Signal besitzt die Verteilungsdichte

$$f_B(b) = \begin{cases} -ab^2 + 1 & \text{für } -\frac{1}{\sqrt{a}} \leq b < \frac{1}{\sqrt{a}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $a \in \mathbb{R}, a > 0$ ist. Der Quantisierer bildet alle negativen Eingangssignale auf $\bar{b}_1$ und alle nicht-negativen auf $\bar{b}_2$ ab.

e) Berechnen Sie in Abhängigkeit von a die Quantisierungsstufen $\bar{b}_1$ und $\bar{b}_2$, für die die Rauschleistung am Ausgang des Quantisierers minimal wird. *(6 Punkte)*

Lösung

a)

$$\Omega = \{\text{negativ, Alpha, Beta, Gamma, Delta}\}$$

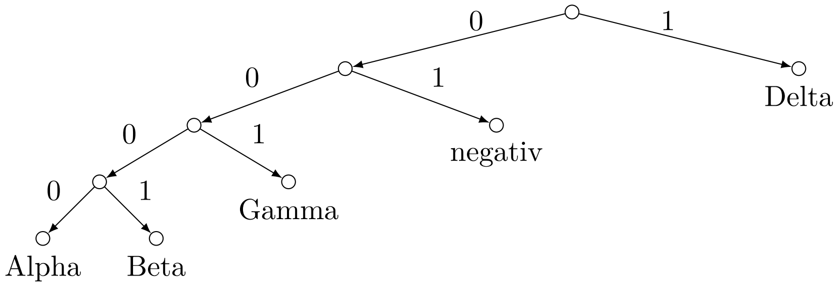
Mit dem Satz von Bayes und Marginalisierung

$$\begin{aligned} P(X = \text{Alpha}) &= P(\text{Variante} = \text{Alpha}, \text{Test positiv}) + P(\text{Variante} = \text{Alpha}, \text{Test negativ}) \\ &= P(\text{Variante} = \text{Alpha}|\text{Test positiv})P(\text{Test positiv}) \\ &\quad + \underbrace{P(\text{Variante} = \text{Alpha}|\text{Test negativ})}_{=0} P(\text{Test negativ}) \\ &= P(\text{Variante} = \text{Alpha}|\text{Test positiv})P(\text{Test positiv}) \end{aligned}$$

folgt die Wahrscheinlichkeitsverteilung zu:

X	negativ	Alpha	Beta	Gamma	Delta
$P(x_n)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{12}{25}$

b) Ein präfixfreier Code mit kleinster mittlerer Codewortlänge ergibt sich aus der Huffman-Codierung:



Die Codewörter ergeben sich zu

X	negativ	Alpha	Beta	Gamma	Delta
Codewort	01	0000	0001	001	1

c) Die Redundanz eines Codeworts berechnet sich zu $R_\mathrm{C} = L(X) - H(X)$. Die Entropie der Quelle ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} H(X) &= -\sum_n P(x_n) \log_2(P(x_n)) \\ &= -\frac{2}{5} \cdot \log_2\left(\frac{2}{5}\right) - 2 \cdot \frac{3}{100} \cdot \log_2\left(\frac{3}{100}\right) - \frac{3}{50} \cdot \log_2\left(\frac{3}{50}\right) - \frac{12}{25} \cdot \log_2\left(\frac{12}{25}\right) \\ &= 1{,}584 \end{aligned}$$

Mittlere Codewortlänge:

$$\begin{aligned} L(X) &= \sum_n P(x_n) L(x_n) \\ &= \frac{2}{5} \cdot 2 + \frac{3}{100} \cdot 4 + \frac{3}{100} \cdot 4 + \frac{3}{50} \cdot 3 + \frac{12}{25} \cdot 1 = 1{,}7 \end{aligned}$$

Redundanz des Codes:

$$R_\mathrm{C} = L(X) - H(X) = 0{,}116$$

d) Nein, es ist nicht sinnvoll die gefundene Codierung über Jahre hinweg als Standard zu nutzen, da entweder

- sich die Auftrittswahrscheinlichkeiten der Ereignisse über die Zeit signifikant ändern können und sich somit die Statistik der Quellsymbole ändert, oder
- neue Virusvarianten aufkommen können, die nicht in der Codierung enthalten sind.

e) Da $f_B(b)$ gerade ist und $\bar{b}_1 {=} {-}\bar{b}_2$ ist, kann die Rauschleistung N mit $\bar{b} = \bar{b}_2$ aufgrund der Symmetrie wie folgt bestimmt werden:

$$N = 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \left(\bar{b} - b\right)^2 \left(-ab^2 + 1\right) \mathrm{d}b$$

Dieser Term muss nun in Bezug auf $\bar{b}$ minimiert werden.

$$\begin{aligned} N &= 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \left(-a\bar{b}^2 b^2 + 2a\bar{b}b^3 - ab^4 + \bar{b}^2 - 2\bar{b}b + b^2\right) \mathrm{d}b \\ &= 2 \left[-\frac{a}{3}\bar{b}^2 b^3 + \frac{1}{2}a\bar{b}b^4 - \frac{a}{5}b^5 + \bar{b}^2 b - \bar{b}b^2 + \frac{1}{3}b^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \\ &= 2 \left[\bar{b}^2 \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{3\sqrt{a}}\right) + \bar{b}\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{3a\sqrt{a}} - \frac{1}{5a\sqrt{a}}\right] \end{aligned}$$

Um die minimale Rauschleistung in Abhängigkeit von $\overline{b}$ zu bestimmen muss durch $\frac{\partial N}{\partial \overline{b}} \overset{!}{=} 0$ das Minimum der Funktion bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial \overline{b}} &= 2\left[2\overline{b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{3\sqrt{a}}\right) + \left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{a}\right)\right] \\ &= 2\left[\overline{b}\frac{4}{3\sqrt{a}} - \frac{1}{2a}\right] \overset{!}{=} 0\,.\end{aligned}$$

Es ergibt sich $\overline{b} = \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{a}}$ und somit $\overline{b}_1 = -\frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{a}}$ und $\overline{b}_2 = \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{a}}$.
Ein alternativer Lösungsweg wäre die direkte Differentiation des Integrals mittels der Leibnizregel:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial \overline{b}} &= \frac{\partial}{\partial \overline{b}} 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \left(\overline{b} - b\right)^2 \left(-ab^2 + 1\right) \mathrm{d}b \\ &= 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \frac{\partial}{\partial \overline{b}} \left(\overline{b} - b\right)^2 \left(-ab^2 + 1\right) \mathrm{d}b \\ &= 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} 2\left(\overline{b} - b\right) \left(-ab^2 + 1\right) \mathrm{d}b \\ &= (\cdots)\end{aligned}$$

Anmerkung: Es gibt nur ein a, welches $\int_{-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}} f_B(b)\,\mathrm{d}b \overset{!}{=} 1$ *und somit die Bedingung an eine Verteilungsdichtdichte erfüllt. Dieses ist durch* $a = \frac{16}{9}$ *gegeben.*

Aufgabe 2 (16 Punkte)

Wir betrachten im Folgenden die Übertragung von Basisbandsignalen der allgemeinen Form

$$s(t) = C \cdot \operatorname{sinc}(Wt)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi W t} \tag{*}$$

mit $C \in \mathbb{C}$ einer komplexen Zahl und $W \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte des Signals $s(t)$. *(2 Punkte)*

b) Zeichnen Sie das Spektrum $S(f)$ für $C = \frac{W}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}$. Nutzen Sie separate Diagramme für Real- und Imaginärteil und achten Sie auf vollständige Achsenbeschriftung. *(4 Punkte)*

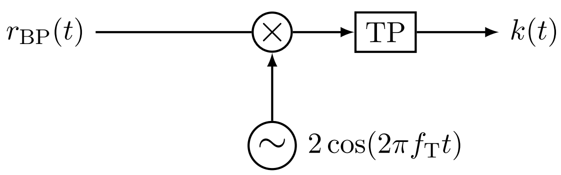
c) Zur Übertragung des Signals erzeugen wir aus dem Basisbandsignal $s(t)$ ein Bandpasssignal $s_{\mathrm{BP}}(t)$ mit Trägerfrequenz $f_{\mathrm{T}} \gg W$. Zeichnen Sie den Betrag des Spektrums $|S_{\mathrm{BP}}(f)|$ für ein beliebiges C. Achten Sie auf eine vollständige Achsenbeschriftung. *(2 Punkte)*

Für Basisbandsignale $s(t) = s_{\mathrm{I}}(t) + \mathrm{j}s_{\mathrm{Q}}(t)$, die die Form (*) besitzen, gilt folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} s_{\mathrm{I}}(t) &= -\mathcal{H}\{s_{\mathrm{Q}}(t)\} \\ s_{\mathrm{Q}}(t) &= \mathcal{H}\{s_{\mathrm{I}}(t)\}\,, \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{H}\{s(t)\}$ die Hilbert-Transformierte von $s(t)$ beschreibt. Im Folgenden wird aus einem Basisbandsignal $s(t)$ der Form (*) ein Bandpasssignal $s_{\mathrm{BP}}(t)$ erzeugt. Dieses wird übertragen und wir empfangen das dazugehörige Empfangssignal $r_{\mathrm{BP}}(t)$.

d) Um aus dem empfangenen Bandpasssignal $r_{\mathrm{BP}}(t)$ wieder ein komplexes Basisbandsignal zu generieren, benutzen Sie folgende, noch unvollständige Schaltung. Das ideale Tiefpassfilter besitzt die Grenzfrequenz $f_{\mathrm{T}}/2 \gg W$. Zeigen Sie durch Vervollständigung der Schaltung, wie Sie aus $k(t)$ mit Hilfe der Hilbert-Transformation wieder das Basisbandsignal $s(t)$ rekonstruieren können. *(3 Punkte)*



e) Sie empfangen das Signal

$$r_{\mathrm{BP}}(t) = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{sinc}(Wt)\cos\left(2\pi\left(f_{\mathrm{T}} + \frac{W}{2}\right)t - \frac{\pi}{3}\right)$$

und erhalten nach Tiefpassfilterung

$$k(t) = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{sinc}(Wt)\cos\left(\pi W t - \frac{\pi}{3}\right)$$

Rekonstruieren Sie nun mittels Ihres Ansatzes das Sendesignal $s(t)$ und geben Sie dieses in der Form (*) an. *(5 Punkte)*

Lösung

a) Es gilt

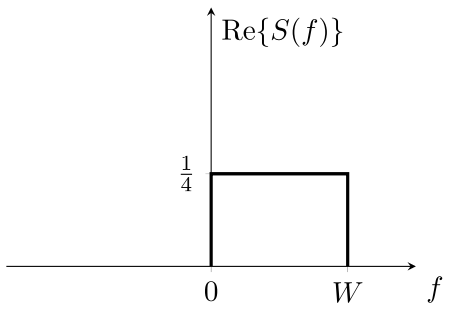
$$
\begin{aligned}
s(t) &= C \cdot \operatorname{sinc}(Wt)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi W t} \\
&= \frac{C}{W} \cdot W \operatorname{sinc}(Wt)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi \frac{W}{2} t}
\end{aligned}
$$

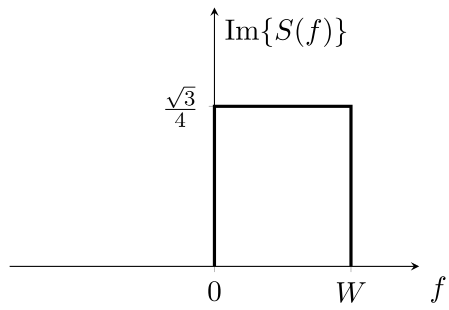
$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$
S(f) = \frac{C}{W} \cdot \operatorname{rect}_W\left(f - \frac{W}{2}\right)
$$

b) Das Signal lässt sich für $C = \frac{W}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}$ wie folgt darstellen:

$$
\begin{aligned}
S(f) &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}} \cdot \operatorname{rect}_W\left(f - \frac{W}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \operatorname{rect}_W\left(f - \frac{W}{2}\right) + \frac{\mathrm{j}\sqrt{3}}{4}\operatorname{rect}_W\left(f - \frac{W}{2}\right)
\end{aligned}
$$

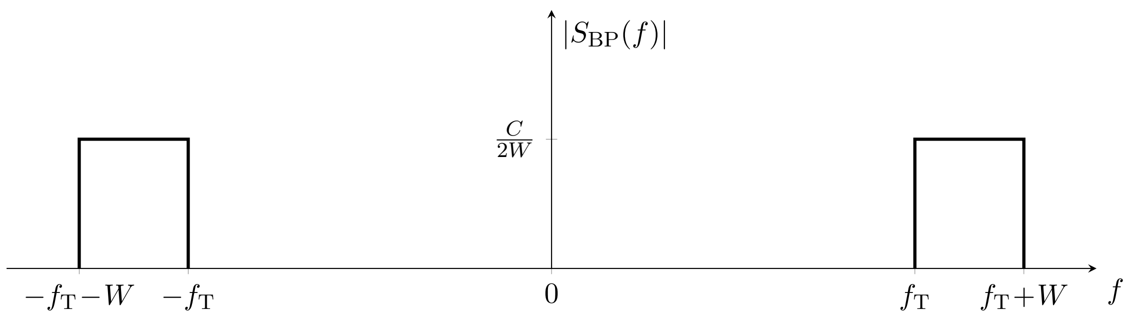




c) Das Spektrum ist wie folgt gegeben:

$$
S_{\mathrm{BP}}(f) = \frac{1}{2}S(f - f_{\mathrm{T}}) + \frac{1}{2}S^*(-f - f_{\mathrm{T}})\,.
$$

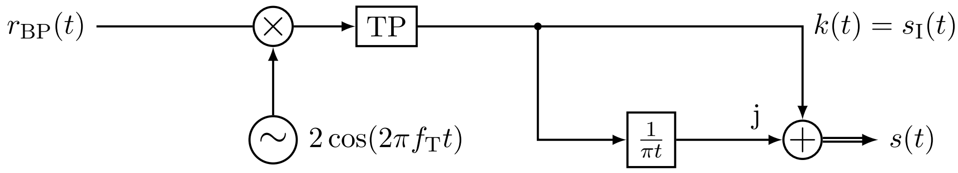
Somit ergibt sich das Spektrum zu



d) Die dargestellte Schaltung entspricht dem oberen Pfad eines IQ-Demodulators, dementsprechend ist $k(t) = s_{\mathrm{I}}(t)$. Aus der Aufgabenstellung wissen wir, dass $s_{\mathrm{Q}}(t) = \mathcal{H}\{s_{\mathrm{I}}(t)\}$. Damit ergibt sich

$$
s(t) = k(t) + \mathrm{j}\mathcal{H}\{k(t)\}\,.
$$

Die vervollständigte Schaltung kann mit Hilfe der Hilbert-Transformation (Faltung mit $\frac{1}{\pi t}$) wie folgt angegeben werden:



e) Wir berechnen zunächst die Hilbert-Transformierte von $k(t)$. Dies ist am einfachsten im Frequenzbereich. Dazu transformieren wir zunächst

$$\begin{aligned}
k(t) &= \frac{1}{3} \cdot \operatorname{sinc}(Wt) \cos\left(\pi W t - \frac{\pi}{3}\right) \\
&= \frac{1}{3W} \cdot W \operatorname{sinc}(Wt) \cos\left(2\pi \frac{W}{2} t - \frac{\pi}{3}\right) \\
&= \frac{1}{3W} \cdot W \operatorname{sinc}(Wt) \cos\left(2\pi \frac{W}{2} \left(t - \frac{1}{3W}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$\begin{aligned}
K(f) &= \frac{1}{3W} \cdot \operatorname{rect}_W(f) * \left[\frac{1}{2}\delta\left(f + \frac{W}{2}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(f - \frac{W}{2}\right)\right] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f \frac{1}{3W}} \\
&= \frac{1}{3W} \cdot \operatorname{rect}_W(f) * \left[\frac{1}{2}\delta\left(f + \frac{W}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f \frac{1}{3W}} + \frac{1}{2}\delta\left(f - \frac{W}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f \frac{1}{3W}}\right] \\
&= \frac{1}{3W} \cdot \left[\frac{1}{2}\operatorname{rect}_W\left(f + \frac{W}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f \frac{1}{3W}} + \frac{1}{2}\operatorname{rect}_W\left(f - \frac{W}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f \frac{1}{3W}}\right]
\end{aligned}$$

Die Hilbert-Transformation entspricht einer Faltung von $k(t)$ mit $\frac{1}{\pi t}$ und im Frequenzbereich einer Multiplikation mit $-\mathrm{j} \cdot \operatorname{sign}(f)$. Damit erhalten wir das Spektrum des Hilbert-transformierten Signals $\hat{k}(t) = \mathcal{H}\{k(t)\}$

$$\begin{aligned}
\hat{K}(f) &= -\mathrm{j} \cdot \operatorname{sign}(f) \cdot K(f) \\
&= \frac{1}{3W} \cdot \left[\frac{\mathrm{j}}{2}\operatorname{rect}_W\left(f + \frac{W}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f \frac{1}{3W}} - \frac{\mathrm{j}}{2}\operatorname{rect}_W\left(f - \frac{W}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f \frac{1}{3W}}\right] \\
&= \frac{1}{3W} \cdot \operatorname{rect}_W(f) * \left[\frac{\mathrm{j}}{2}\delta\left(f + \frac{W}{2}\right) - \frac{\mathrm{j}}{2}\delta\left(f - \frac{W}{2}\right)\right] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f \frac{1}{3W}}
\end{aligned}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

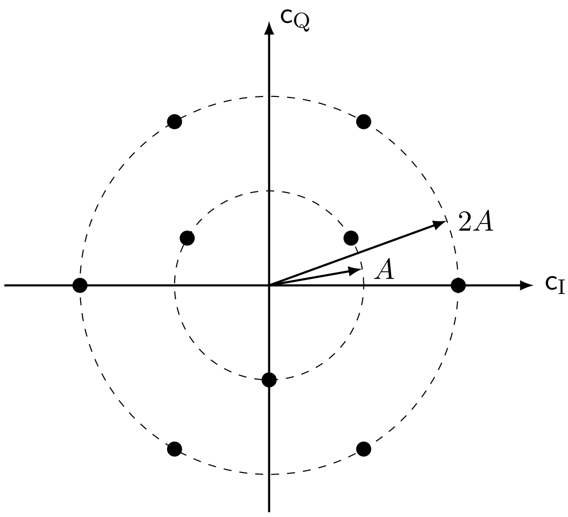
$$\hat{k}(t) = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{sinc}(Wt) \sin\left(\pi W t - \frac{\pi}{3}\right)$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
s(t) &= k(t) + \mathrm{j}\hat{k}(t) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \operatorname{sinc}(Wt) \left(\cos\left(\pi W t - \frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{j} \sin\left(\pi W t - \frac{\pi}{3}\right)\right) \\
&= \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}} \cdot \operatorname{sinc}(Wt) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi W t}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (17 Punkte)

Gegeben ist folgendes Konstellationsdiagramm mit Gleichverteilung der Modulationssymbole. Die Phasendifferenz benachbarter Modulationssymbole auf dem gleichen Kreis ist jeweils konstant.



a) Geben Sie die Mächtigkeit des Modulationsalphabets $\mathcal{M}$ an und bestimmen Sie die mittlere Anzahl an Bit, die pro Symbol mit dieser Konstellation übertragen werden kann. *(2 Punkte)*

b) Geben Sie die Symbole der Konstellation in einer parametrisierten Form abhängig von A an. *(2 Punkte)*

c) Bestimmen Sie A so, dass die mittlere Symbolenergie $E_\mathrm{s} = 1$ ist. Bestimmen Sie den minimalen Abstand zwischen benachbarten Symbolen der Konstellation. *(6 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

d) Skizzieren Sie eine 16-QAM und fügen Sie eine Gray-Codierung hinzu. Beschreiben Sie die Vorteile einer Gray-Codierung. *(4 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

Zur Informationsübertragung wird nun BPSK mit einer Rechteckpulsformung der Symboldauer T, $g_\mathrm{R}(t) = \alpha\,\mathrm{rect}_T(t)$, verwendet. Der Sendepuls ist so normiert, dass $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g_\mathrm{R}^2(t)dt = 1$.

e) Weshalb ist eine Pulsformung am Sender notwendig? *(1 Punkt)*

f) Was maximiert das Matched-Filter am Empfänger? Geben Sie das kausale Matched-Filter für dieses System an. *(2 Punkte)*

Lösung

a) Da die dargestellte Modulation 9 Modulationssymbole hat, ist die Mächtigkeit $|\mathcal{M}| = 9$. Die Information pro Symbol kann zu $\log_2(|\mathcal{M}|) = \log_2(9) = 3{,}17\,\mathrm{bit}$ berechnet werden.

b) Zwei Symbolmengen $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ beschreiben das Modulationsalphabet $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$. Die Symbole in den Teilmengen können wie folgt beschrieben werden:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 &= A \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}k + \frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{j}\sin\left(\frac{2\pi}{3}k + \frac{\pi}{6}\right)\right) = A \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}\right)}, \qquad k \in \{0,1,2\} \\
\mathcal{M}_2 &= 2A \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}k\right) + \mathrm{j}\sin\left(\frac{\pi}{3}k\right)\right) = 2A \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{\pi}{3}}, \qquad k \in \{0,1,2,3,4,5\}
\end{aligned}
$$

c) Bei gleicher Auftretenswahrscheinlichkeit wird die mittlere Symbolenergie E_s wie folgt berechnet:

$$
\begin{aligned}
E_\mathrm{s} &= \frac{1}{|\mathcal{M}|}\sum_{i=1}^{|\mathcal{M}|} |M_i|^2, \qquad M_i \in \mathcal{M} \\
&= \frac{1}{9}\left(3A^2 + 6(2A)^2\right) \\
&= \frac{1}{9}\left(27A^2\right) \\
&= 3A^2 \overset{!}{=} 1
\end{aligned}
$$

Dies ergibt einen Skalierungsfaktor von $A = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Für die Berechnung von des minimalen Abstands d_min kann man auf Grund der Symmetrie drei Abstände betrachten.

- Abstand zwischen benachbarten Symbolen auf der inneren PSK Modulation $d_{\mathrm{min},1}$,
- Abstand zwischen benachbarten Symbolen auf der äußeren PSK Modulation $d_{\mathrm{min},2}$,
- Abstand zwischen benachbarten Symbolen auf der inneren und der äußeren PSK Modulation $d_{\mathrm{min},3}$.

Der Abstand d zwischen zwei Punkten auf einem Kreis mit Radius r, getrennt durch Winkel α, kann durch $d = 2r\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ beschrieben werden. Angewandt auf $d_{\mathrm{min},1}$ und $d_{\mathrm{min},2}$ ergibt sich:

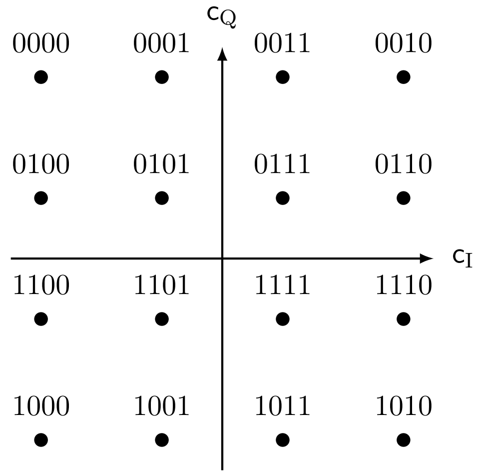
$$
\begin{aligned}
d_{\mathrm{min},1} &= 2A\sin\left(\frac{2\pi}{3\cdot 2}\right) = 2A\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \\
d_{\mathrm{min},2} &= 2(2A)\sin\left(\frac{\pi}{3\cdot 2}\right) = 4A\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{1}{2} = 1{,}155
\end{aligned}
$$

Berechnung von $d_{\mathrm{min},3}$ über Satz des Pythagoras:

$$
\begin{aligned}
d_{\mathrm{min},3} &= \sqrt{\left(A\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2A\right)^2 + \left(A\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2} \\
&= \sqrt{2A^2 - 4A^2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + A^2\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + A^2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)} \\
&= \sqrt{4A^2 - 4A^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + A^2} \\
&= A\sqrt{5 - 4\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{3}} \approx 0{,}716
\end{aligned}
$$

Mit den erhaltenen Ergebnissen: $d_{\min} = \min(d_{\min,1}, d_{\min,2}, d_{\min,3}) \approx 0{,}716$.

d) Eine 16-QAM mit Gray-Codierung sieht wie folgt aus:



Damit die Zuordnung der Bitmuster zu den Symbolen einer Gray-Codierung folgt, müssen sich im Sinne des euklidischen Abstandes benachbarte Modulationssymbole um ein Bit unterscheiden. Bei einer 16-QAM kann die Gray-Codierung für 2 Bit für Inphase und 2 Bit für Quadratur unabhänging bestimmt werden und dann für die gesamte 16-QAM zusammengeführt werden.

Der Vorteil einer Gray-Codierung ist, dass bei gestörtem Empfang die Demodulation eines benachbarten Symbols nur einen Bitfehler erzeugt. Im Falle von 16-QAM bedeutet dies, dass nur eines von vier Bits pro Symbol falsch ist. Die Übertragung ist somit robuster gegenüber AWGN.

e) Eine Pulsformung am Sendesignal is notwendig, um aus zeitdiskreten Symbolen ein zeitkontinuierliches Signal zu erzeugen.

f) Das Matched-Filter maximiert das SNR bei additivem weißen gaußschen Rauschen. Das kausale Matched-Filter $h(t)$ zu einem gegebenen Sendefilter $g(t)$ ist definiert als $h(t) = g^*(k_0 T - t), k_0 \in \mathbb{N}$. k_0 muss so gewählt werden, dass $h(t) = 0$ für $t \leq 0$. Für das reelle und symmetrische Sendefilter $g_R(t) = \alpha\,\mathrm{rect}_T(t)$ gilt $h(t) = \alpha\,\mathrm{rect}_T(T-t) = \alpha\,\mathrm{rect}_T(t-T)$.

Aufgabe 4 (17 Punkte)

Gegeben sei die Paritycheckmatrix $\boldsymbol{H}$ eines systematischen (n,k)-Blockcodes.

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Rate r des Codes. *(2 Punkte)*

b) Nach Übertragung über einen BSC mit Fehlerrate $\delta < \frac{1}{2}$ empfangen Sie die Folge $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Sie wissen, dass der vorliegende Code eine minimale Hammingsdistanz von $d_{\min} = 3$ besitzt und somit einen Fehler korrigieren kann. Berechnen Sie das Syndrom $\boldsymbol{s}$ und das am wahrscheinlichsten gesendete Codewort $\hat{\boldsymbol{x}}$. *(3 Punkte)*

c) Bestimmen Sie eine Generatormatrix $\boldsymbol{G}$ des vorliegenden Blockcodes. *(4 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

Gegeben sei ein beliebiger (5,2)-Blockcode.

d) Bestimmen Sie die maximal mögliche Anzahl an korrigierbaren Fehlern t für einen beliebigen (5,2)-Blockcode. Erreicht jeder (5,2)-Blockcode Ihr berechnetes t? Begründen Sie! *(3 Punkte)*

e) Die Übertragung eines Bit über einen BSC sei mit Wahrscheinlichkeit δ fehlerhaft und mit Wahrscheinlichkeit $1-\delta$ korrekt. Bestimmen Sie das δ, ab dem für einen (5,2)-Blockcode mit obig gefundenem t eine Kanalcodierung gegenüber uncodierter Übertragung sinnvoll ist. *(5 Punkte)*

Lösung

a) Da $\boldsymbol{H} \in \mathbb{F}_2^{(n-k)\times n}$ ist, folgt aus der Anzahl der Spalten $n = 7$. Da die Anzahl der Zeilen drei beträgt, folgt $3 = n - k \Rightarrow k = 7 - 3 = 4$. Die Coderate bestimmt sich somit zu $r = \frac{k}{n} = \frac{4}{7}$.

b) Mit der gegebenen Paritycheckmatrix $\boldsymbol{H}$ lässt sich das Syndrom zu

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Da das Syndrom der dritten Spalte von $\boldsymbol{H}$ entspricht, ist das am wahrscheinlichsten überlagernde Fehlermuster $\hat{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und das am wahrscheinlichsten gesendete Codewort $\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{y} + \hat{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Um $\boldsymbol{G}$ zu finden muss zuerst $\boldsymbol{H}$ in systematische Form $\boldsymbol{H}_{\text{sys}} = (\boldsymbol{P}^{\text{T}}\,\boldsymbol{I}_{n-k})$ gebracht werden. Durch Addition der Zeilen folgt:

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{Z_1 = Z_1 + Z_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{Z_3 = Z_3 + Z_1}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{Z_2 = Z_2 + Z_3}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{H}_{\text{sys}}$$

Optional können auch Spalten vertauscht werden um auf obige Form zu gelangen. Alle Permutationen der ersten vier Spalten von $\boldsymbol{H}_{\text{sys}}$ sind gültige Lösungen für $\boldsymbol{H}_{\text{sys}}$. Für $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{I}_k\,\boldsymbol{P})$ folgt:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad \boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Da $\boldsymbol{H}_{sys}$ nicht eindeutig ist, ist $\boldsymbol{P}$ und somit auch $\boldsymbol{G}$ nicht eindeutig und es gibt mehrere gültige Lösungen.

d) Einsetzen von $n = 5$ und $k = 2$ in die Hammingschranke ergibt:

$$8 = 2^{5-2} = 2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i} = \binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \cdots = 1 + 5 + 10 + \cdots$$

$t = 1$ ist das maximale t, welches die Hammingschranke erfüllt. Somit kann ein (5,2)-Blockcode maximal $t = 1$ Fehler korrigieren. Da die Hammingschranke ein notwendiges, aber kein hinreichendes Kriterium darstellt, kann nicht jeder (5,2)-Blockcode $t = 1$ Fehler korrigieren. Die Korrekturfähigkeit eines spezfischen Codes, definiert durch seine Generatormatrix, lässt sich durch die Suche nach dem geringsten Hammingabstand aller Codewörter bestimmen.

Anmerkung: Ein Gegenbeispiel für einen (5,2)-Blockcode, der keine Fehler korrigieren kann, ist durch

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $d_{min} = 1$ und somit $t = 0$ gegeben.

e) Eine Kanalcodierung ist sinnvoll, wenn die Wahrscheinlichkeit eines Wortfehlers der codierten Übertragung kleiner ist als die der uncodierten Übertragung.
Somit muss $P_{\text{e,codiert}} \leq P_{\text{e,uncodiert}}$. Die Wahrscheinlichkeit eines Wortfehler für eine codierte Übertragung mit $n = 5$ und einer Fehlerkorrekturfähigkeit von $t = 1$ ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} P_{\text{e,codiert}} &= 1 - P(\text{Wort richtig}) \\ &= 1 - P(\text{alle Bit richtig}) - P(\text{1 Bit falsch}) \\ &= 1 - (1-\delta)^5 - \binom{5}{1}\delta(1-\delta)^4 = 1 - (1-\delta)^5 - 5\delta(1-\delta)^4 \end{aligned}$$

Für eine uncodierte Übertragung mit $k = 2$ Bit folgt:

$$P_{\text{e,uncodiert}} = 1 - P(\text{Wort richtig}) = 1 - (1-\delta)^2 = 2\delta - \delta^2$$

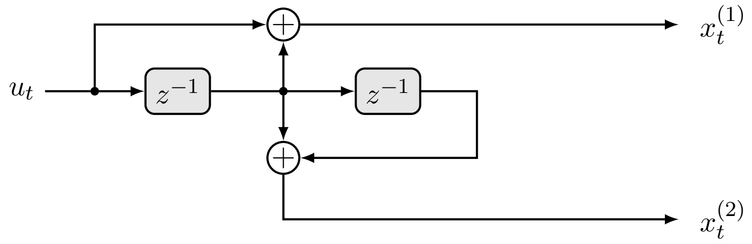
Einsetzen ergibt:

$$
\begin{aligned}
P_{\text{e,codiert}} &\leq P_{\text{e,uncodiert}} \\
1-(1-\delta)^5-5\delta(1-\delta)^4 &\leq 1-(1-\delta)^2 \\
(1-\delta)^5+5\delta(1-\delta)^4-(1-\delta)^2 &\geq 0 \\
\underbrace{(1-\delta)^2}_{\geq 0}\Big((1-\delta)^3+5\delta(1-\delta)^2-1\Big) &\geq 0 \\
\Rightarrow \qquad (1-\delta)^3+5\delta(1-\delta)^2-1 &\geq 0 \\
1-3\delta+3\delta^2-\delta^3+5\delta-10\delta^2+5\delta^3-1 &\geq 0 \\
4\delta^3-7\delta^2+2\delta &\geq 0 \\
\underbrace{\delta}_{\geq 0}(4\delta^2-7\delta+2) &\geq 0 \\
\Rightarrow \qquad 4\delta^2-7\delta+2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Auflösen ergibt $\delta \leq \frac{1}{8}\cdot\Big(7-\sqrt{17}\Big) \approx 0{,}360$ oder $\delta \geq \frac{1}{8}\cdot\Big(7+\sqrt{17}\Big) \approx 1{,}390$. Da δ eine Wahrscheinlichkeit ist und somit $0 \leq \delta \leq 1$ gilt, ist nur $\delta \leq \frac{1}{8}\cdot\Big(7-\sqrt{17}\Big) \approx 0{,}360$ eine gültige Lösung. Verfälscht demzufolge der BSC ein Bit mit $\delta \leq \frac{1}{8}\cdot\Big(7-\sqrt{17}\Big) \approx 0{,}360$, dann ist eine Kanalcodierung sinnvoll.

Aufgabe 5 (17 Punkte)

Gegeben sei folgender Faltungsencoder:



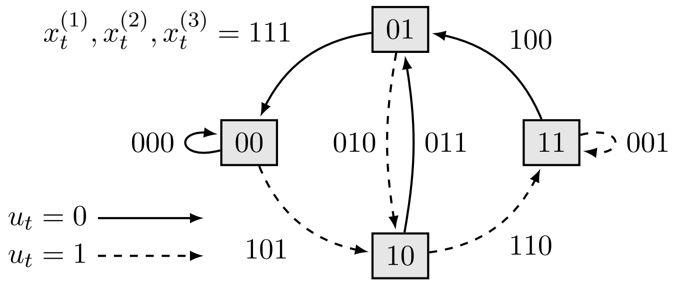
a) Geben Sie Einflusslänge und Coderate des Faltungsencoders an. Welche Eigenschaft des Faltungsencoders wird durch die Einflusslänge beschrieben? *(3 Punkte)*

b) Geben Sie das Zustandsdiagramm des Faltungsencoders an. *(2 Punkte)*

c) Besitzt der Faltungsencoder eine katastrophale Fehlerfortpflanzung? Falls ja, skizzieren Sie den Faltungsencoder mit einer Änderung (Hinzufügen *oder* Entfernen nur einer einzigen Verbindung) ohne katastrophale Fehlerfortpflanzung. Begründen Sie ihr Vorgehen. *(3 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben gelöst werden.

Das Zustandsdiagramm eines anderen Faltungsencoders ist in folgender Abbildung gegeben:



d) Erstellen Sie die Trellis-Darstellung des Codes, der durch dieses Zustandsdiagramm beschrieben wird, für die ersten vier Taktschritte und beschriften Sie die Übergänge vollständig. Nehmen Sie an, dass sich der Encoder zu Beginn der Codierung im Zustand $(v_1, v_2) = (0, 0)$ befindet. *(3 Punkte)*

e) Nach Anwendung des Faltungsencoders werden die codierten Bits mit BPSK moduliert und über einen AWGN-Kanal übertragen. Am Empfänger erhalten Sie am Ausgang des Matched-Filters die Empfangsfolge

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -0{,}6 & +0{,}5 & +0{,}1 & +0{,}8 & -2{,}0 & -0{,}2 & +1{,}3 & -1{,}1 & +1{,}4 & +0{,}9 & -2{,}1 & -1{,}1 \end{pmatrix}.$$

Decodieren Sie die gesendete Folge mit Hilfe des Soft-Decision Viterbi-Algorithmus. Achten Sie auf eine vollständige Beschriftung Ihrer Lösung inklusiver aller Zwischenwerte, sodass der Lösungsweg klar ersichtlich ist. Geben Sie die am wahrscheinlichsten gesendete Codebitfolge $\hat{\mathbf{x}}$ und die zugehörige, am wahrscheinlichsten gesendete Informationsbitfolge $\hat{\mathbf{u}}$ an. *(6 Punkte)*

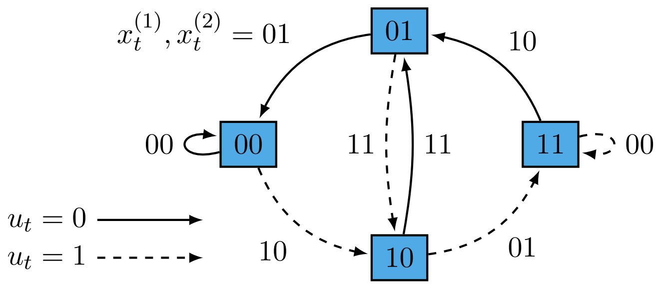
Lösung

a) Die Parameter des Faltungsencoders sind:

- Eindringtiefe $L = 2$,
- Eingangsbits $k = 1$,
- Ausgangsbits $n = 2$,
- Coderate $r = k/n = 1/2$.

Die Einflusslänge berechnet sich durch: $(L+1)k = (2+1)1 = 3$.
Die Einflusslänge des Faltungsencoders gibt an, von wie vielen Eingangsbits die Ausgangsbits beeinflusst werden.

b) Folgendes Zustandsdiagramm ergibt sich aus dem Faltungsencoder:

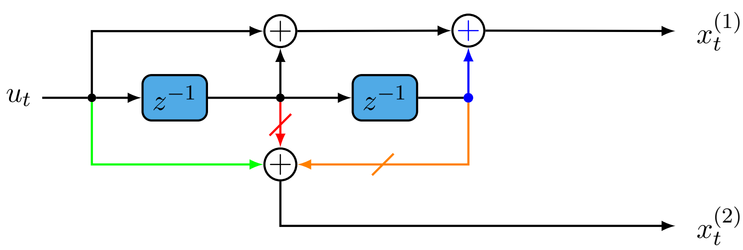


c) Generatorpolynome der zwei Ausgänge:

$$g_1(x) = 1 + x \tag{1}$$
$$g_2(x) = x + x^2 = x(1+x) = x \cdot g_1(x) \tag{2}$$

Durch Umformung von $g_2(x)$ kann gezeigt werden, dass $g_1(x)$ und $g_2(x)$ den gemeinsamen Faktor $(1+x)$ besitzen. Der Faltungsencoder besitzt die Eigenschaft der katastrophalen Fehlerfortpflanzung.

Die katastrophale Fehlerfortpflanzung kann auf folgende Arten vermieden werden:



- Hinzufügen der grünen Verbindung:

$$g_1(x) = 1 + x$$
$$g_2(x) = 1 + x + x^2$$

- Hinzufügen der blauen Verbindung:

$$g_1(x) = 1 + x + x^2$$
$$g_2(x) = x + x^2$$

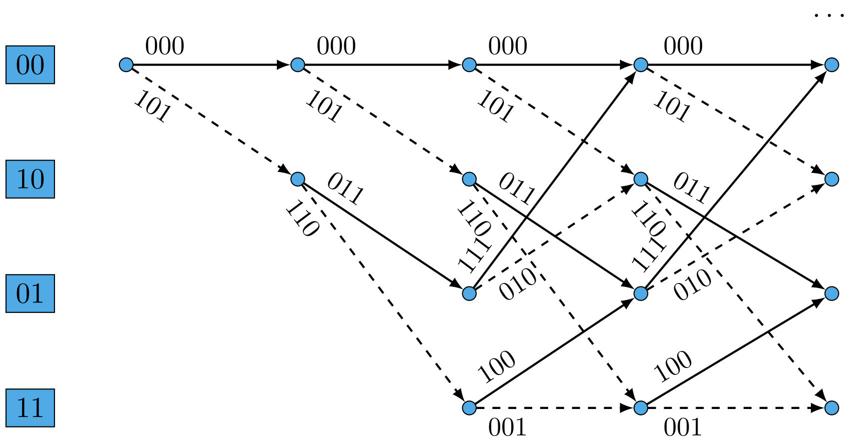
- Entfernen der orangenen Verbindung:

$$g_1(x) = 1 + x$$
$$g_2(x) = x$$

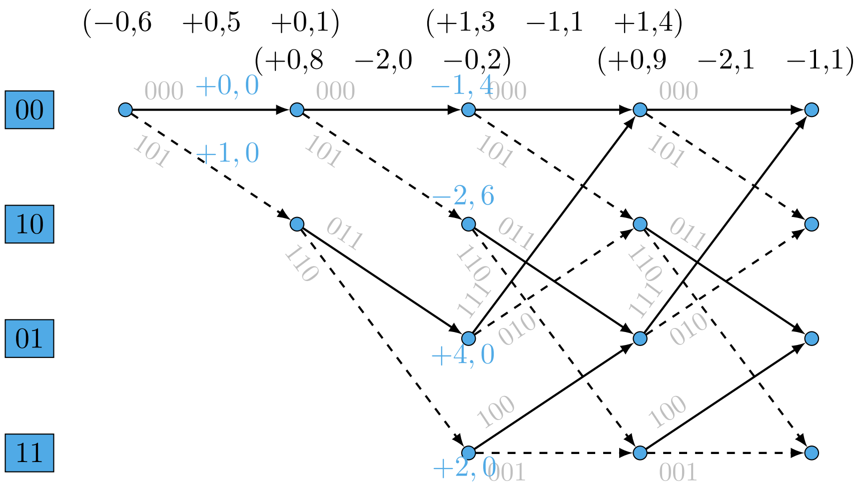
- Entfernen der roten Verbindung:

$$g_1(x) = 1 + x$$
$$g_2(x) = x^2$$

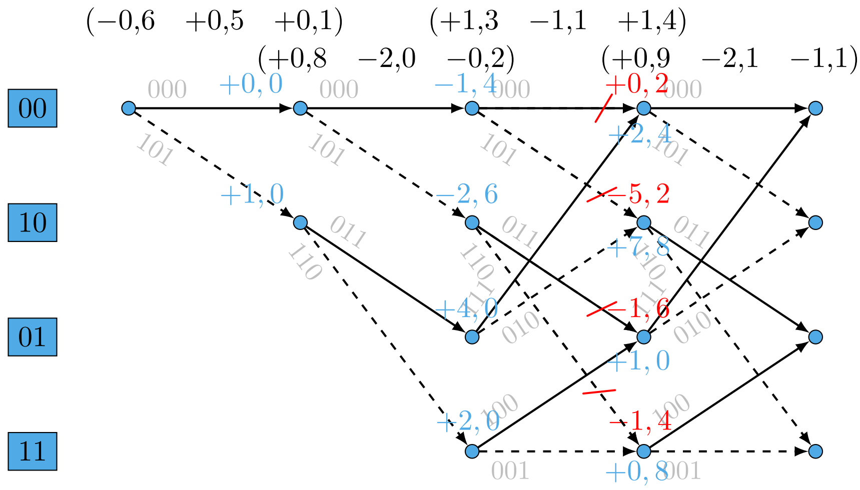
d) Aus dem Zustandsdiagramm lässt sich folgendes Trellis-Diagramm erstellen:



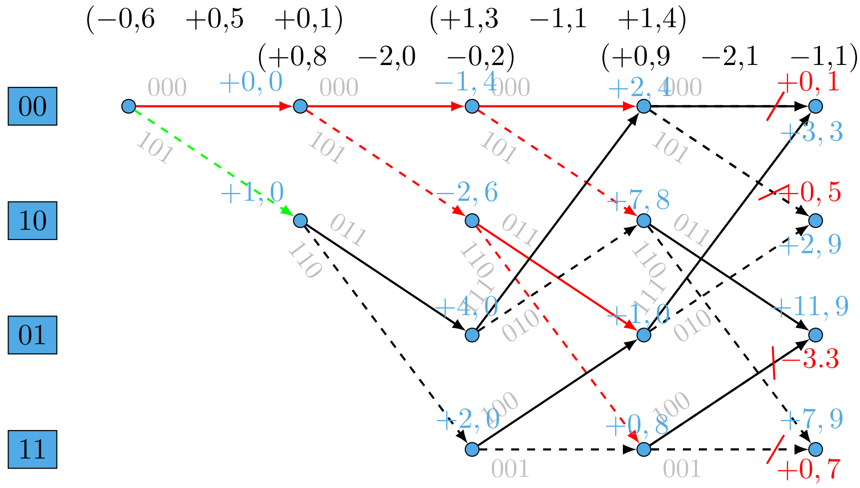
e) Da die Bits vor Übertragung über den AWGN Kanal BPSK moduliert werden und eine Soft-Decision genutzt werden soll, kann $\sum_i (-1)^{x_i} \cdot r_i$ als Metrik genutzt werden, wobei r_i das i-te Empfangssymbol und x_i das i-te Bit des betrachteten Pfades darstellt. Nach dem zweiten Taktschritt ergibt sich:



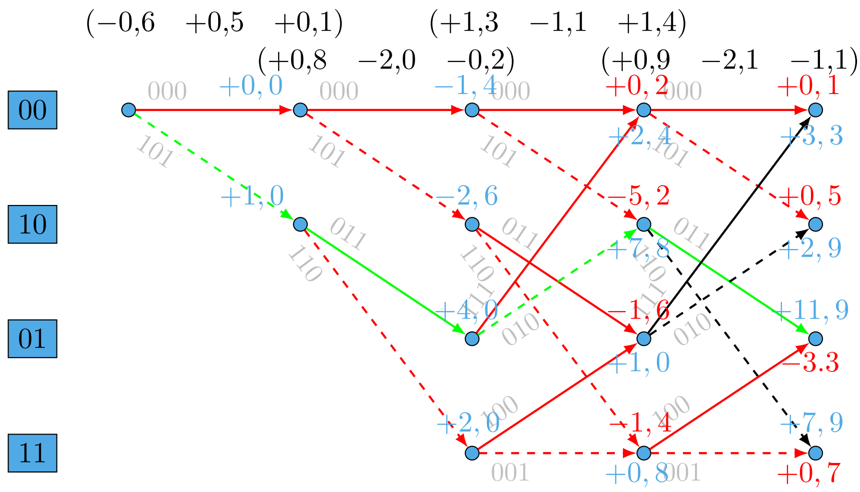
Nach dem dritten Taktschritt:



Nach dem vierten Taktschritt:



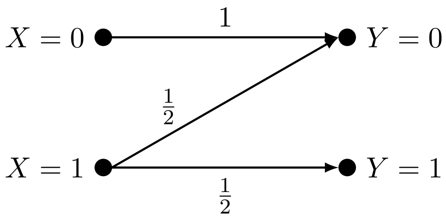
Bestimmen des Pfades mit maximaler Korrelation mit der Empfangsfolge:



Der Viterbi-Algorithmus liefert $\hat{\mathbf{x}} = (101 \quad 011 \quad 010 \quad 011)$ als am wahrscheinlichsten gesendete Codebitfolge. Somit ist $\hat{\mathbf{u}} = (1010)$ die am wahrscheinlichsten gesendete Nutzdatenfolge.

Aufgabe 6 (17 Punkte)

Gegeben sei der folgende Kanal:



Die Werte an den Kanalübergängen bezeichnen dabei die Übergangswahrscheinlichkeiten $P(Y|X)$. Die Auftrittswahrscheinlichkeit einer gesendeten “1” beträgt dabei $u := P(X = 1)$ und somit ist $P(X = 0) = 1 - u$.

a) Berechnen Sie $P(Y = 0)$ und $P(Y = 1)$ in Abhängigkeit von u. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie die Entropie $H(Y)$ in Abhängigkeit von u. *(2 Punkte)*

c) Berechnen Sie die bedingte Entropie $H(Y|X)$. *(4 Punkte)*

d) Bestimmen Sie die Kapazität dieses Kanals. *Hinweis:* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log_2(x) = \frac{\log_2(\mathrm{e})}{x}$. *(7 Punkte)*

e) Der Kanal modelliert eine optische Freiraumübertragungsstrecke mit 10^9 Symbolen pro Sekunde. Welche Nettodatenrate können Sie mit beliebig kleiner Fehlerrate maximal über diesen Kanal übertragen? *(2 Punkte)*

Lösung

a) Es ist mit Marginalisierung und dem Satz von Bayes

$$\begin{aligned}
P(Y = 0) &= P(X = 0, Y = 0) + P(X = 1, Y = 0) \\
&= P(Y = 0|X = 0)P(X = 0) + P(Y = 0|X = 1)P(X = 1) \\
&= 1 \cdot (1 - u) + \frac{1}{2} \cdot u \\
&= 1 - \frac{u}{2}
\end{aligned}$$

und außerdem

$$P(Y = 1) = 1 - P(Y = 0) = \frac{u}{2}.$$

Alternativ lässt sich $P(Y = 1)$ auch wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
P(Y = 1) &= P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 1) \\
&= P(Y = 1|X = 0)P(X = 0) + P(Y = 1|X = 1)P(X = 1) \\
&= 0 \cdot (1 - u) + \frac{1}{2}u \\
&= \frac{u}{2}
\end{aligned}$$

b) Die Entropie lässt sich direkt aus $P(Y)$ berechnen:

$$\begin{aligned}
H(Y) &= -\sum_y P(Y = y)\log_2(P(Y = y)) \\
&= -\left(1 - \frac{u}{2}\right)\log_2\left(1 - \frac{u}{2}\right) - \frac{u}{2}\log_2\left(\frac{u}{2}\right)
\end{aligned}$$

Die Entropie $H(Y)$ lässt sich auch einfacher mit Hilfe der binären Entropiefunktion zu $H(Y) = H_\mathrm{b}(\frac{u}{2})$ ausdrücken (nicht gefragt).

c) Die bedingte Entropie ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
H(Y|X) &= -\sum_x \sum_y P(X=x, Y=y) \log_2(P(Y=y|X=x)) \\
&= -\sum_x \sum_y P(Y=y|X=x) P(X=x) P(\log_2(P(Y=y|X=x)) \\
&= -P(Y=0|X=0)P(X=0)\log_2(P(Y=0|X=0)) \\
&\quad - P(Y=0|X=1)P(X=1)\log_2(P(Y=0|X=1)) \\
&\quad - P(Y=1|X=0)P(X=0)\log_2(P(1=0|X=0)) \\
&\quad - P(Y=1|X=1)P(X=1)\log_2(P(Y=1|X=1)) \\
&= 1\cdot(1-u)\log_2(1) - \frac{u}{2}\log_2\left(\frac{1}{2}\right) - 0\cdot(1-u)\log_2(0) - \frac{u}{2}\log_2\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= 0 - \frac{u}{2}(-1) - 0 - \frac{u}{2}(-1) \\
&= u\,.
\end{aligned}$$

d) Die Transinformation ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
I(X;Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\
&= -\left(1-\frac{u}{2}\right)\log_2\left(1-\frac{u}{2}\right) - \frac{u}{2}\log_2\left(\frac{u}{2}\right) - u
\end{aligned}$$

oder mittels der binären Entropiefunktion zu $I(X;Y) = H_{\mathrm{b}}(\frac{u}{2}) - u$ (nicht gefragt).

Um die Kapazität zu bestimmen, muss $I(X;Y)$ über alle möglichen Eingangsverteilungen maximiert werden,

$$C = \max_{P(X)} I(X;Y) = \max_u I(X;Y)\,,$$

d.h. wir müssen $I(X;Y)$ über u maximieren. Wir bilden dazu die Ableitung nach u

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} I(X;Y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(-\left(1-\frac{u}{2}\right)\log_2\left(1-\frac{u}{2}\right) - \frac{u}{2}\log_2\left(\frac{u}{2}\right) - u\right) \\
&= -\left(1-\frac{u}{2}\right)\frac{-\frac{1}{2}\log_2(\mathrm{e})}{1-\frac{u}{2}} - \left(-\frac{1}{2}\right)\log_2\left(1-\frac{u}{2}\right) - \frac{u}{2}\frac{\frac{1}{2}\log_2(\mathrm{e})}{\frac{u}{2}} - \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{u}{2}\right) - 1 \\
&= \frac{\log_2(\mathrm{e})}{2} + \frac{1}{2}\log_2\left(1-\frac{u}{2}\right) - \frac{\log_2(\mathrm{e})}{2} - \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{u}{2}\right) - 1 \\
&= \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1-\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\right) - 1 \\
&\overset{!}{=} 0\,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
& & \log_2\left(\frac{1-\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\right) &= 2 \\
&\Leftrightarrow & \frac{1-\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}} &= 4 \\
&\Leftrightarrow & 1-\frac{u}{2} &= 2u \\
&\Leftrightarrow & \frac{5u}{2} &= 1 \\
&\Leftrightarrow & u &= \frac{2}{5}\,.
\end{aligned}$$

Der Vollständigkeit müssen wir noch überprüfen, ob das Maximum ein echtes Maximum ist. Aus den Eigenschaften von $H_\mathrm{b}(\cdot)$ wissen wir, dass diese Funktion und somit $I(X;Y)$ konkav ist. Wir überprüfen trotzdem und bekommen

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2} I(X;Y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1-\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\right)-1\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{1}{2}\log_2\left(1-\frac{u}{2}\right)-\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{u}{2}\right)-1\right)\\ &= \frac{1}{2}\frac{-\frac{1}{2}\log_2(\mathrm{e})}{1-\frac{u}{2}}-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}\log_2(\mathrm{e})}{\frac{u}{2}}\\ &= -\frac{1}{4}\frac{\log_2(\mathrm{e})}{1-\frac{u}{2}}-\frac{1}{4}\frac{\log_2(\mathrm{e})}{\frac{u}{2}}\\ &\leq 0\,, \qquad\qquad \text{da } 0\leq u\leq 1\,.\end{aligned}$$

$I(X;Y)$ ist demzufolge konkav und hat für $u=\frac{2}{5}$ ein echtes Maximum.

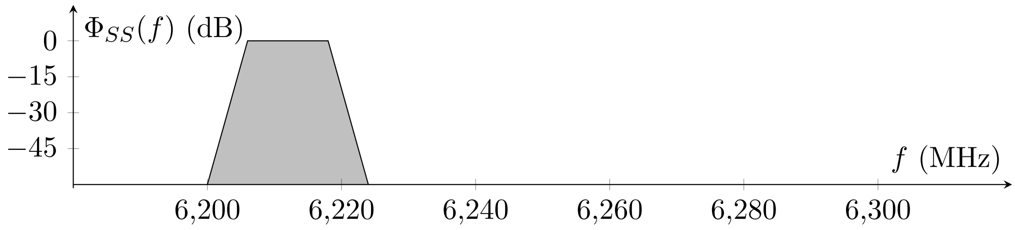
Die Kapazität berechnet sich mit $u=\frac{2}{5}$ zu

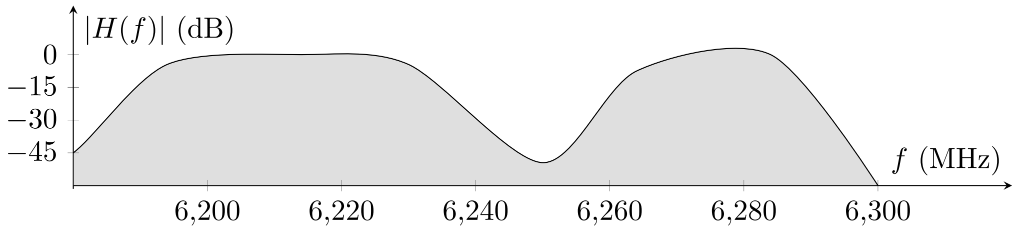
$$\begin{aligned}C &= H_\mathrm{b}\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{2}{5}\\ &= -\frac{1}{5}\log_2\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{4}{5}\log_2\left(\frac{4}{5}\right)-\frac{2}{5}\\ &\approx 0{,}322\,.\end{aligned}$$

e) Um Daten nahezu fehlerfrei übertragen zu können, benötigen Sie einen Kanalcode mit Rate $r<C$. Sie können daher maximal $3{,}22\cdot 10^8$ Bit pro Sekunde (322 MBit pro Sekunde) übertragen.

Aufgabe 7 (12 Punkte)

In den folgenden Abbildungen sehen Sie das Leistungsdichtespektrum $\Phi_{SS}(f)$ eines zu übertragenden Signals sowie den Betragsfrequenzgang $|H(f)|$ einer Realisierung des linearen, zeitinvarianten Kanals, über den übertragen werden soll.

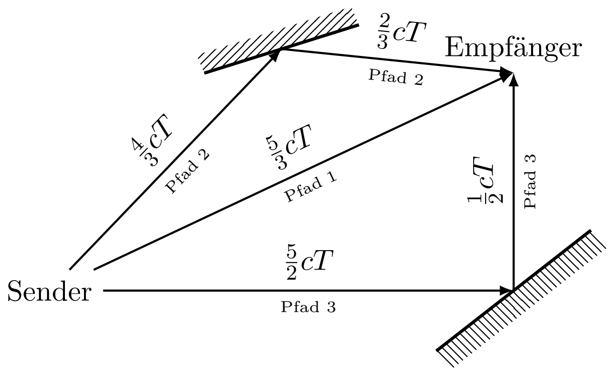




a) Unterliegt diese Übertragung frequenzselektivem Fading? Begründen Sie Ihre Aussage! *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von der vorhergehenden Teilaufgabe bearbeitet werden.

Ein anderer Kanal wird vermessen. Es zeichnen sich drei signifikante Pfade zwischen Sende- und Empfangsantenne ab. Das Übertragungsszenario sowie die Parameter der einzelnen Pfade sind in der folgenden Zeichnung und Tabelle angegeben. Die Werte in der Skizze bezeichnen dabei die Längen der einzelnen (Teil-)Pfade. Die Phasendrehungen und Dämpfungen der am Empfänger eintreffenden Signale der verschiedenen Pfade sind in der Tabelle angegeben. Die in der Tabelle angegebenen Phasendrehungen beinhalten mögliche Phasenveränderungen durch die Reflexionen.



Pfad	Leistungs-dämpfung (dB)	Phase (°)
1	3,01	0
2	6,02	120
3	9,03	60

Hierbei ist c die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle und T die Symboldauer.

b) Berechnen Sie die Verzögerungen der einzelnen drei Pfade in Abhängigkeit von der Symboldauer T. *(3 Punkte)*

c) Welches Problem wird bei diesem Kanal auftreten? Begründen Sie kurz! *(2 Punkte)*

d) Der Kanal werde mit der sechsfachen Symbolrate abgetastet. Zeichnen Sie das dem Kanal äquivalente FIR-Filter. Beschriften Sie Ihre Skizze mit den komplexen Filterkoeffizienten in Real- und Imaginärteil. Geben Sie gegebenenfalls notwendige Berechnungen an, sodass die Berechnung der Filterkoeffizienten nachvollziehbar ist. *(5 Punkte)*

Lösung

a) Der Betragsfrequenzgang $|H(f)|$ der gegebenen Realisierung des diskreten, zeitinvarianten Kanals besitzt signifikante Amplitudenschwankungen, allerdings ist diese innerhalb der Kanalbandbreite nahezu konstant. Somit wird bei Übertragung über diesen Kanal das Leistungsdichtespektrum $\Phi_{SS}(f)$ des Sendesignals frequenzabhängig *nicht* verändert. Das Signal wird nicht verzerrt. Der Kanal unterliegt somit *keinem frequenzselektivem Fading.*

b) Da die Distanzen der Pfade schon in Abhängigkeit der Symboldauer T sowie der Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle angegeben sind, können die Verzögerungen einfach abgelesen werden:

Pfad	Verzögerung
1	$\frac{5}{3}T$
2	$\frac{4}{3}T + \frac{2}{3}T = 2T$
3	$\frac{5}{2}T + \frac{1}{2}T = 3T$

c) Aus der Tabelle lässt sich der *Delay Spread* T_{DS} bestimmen. T_{DS} bezeichnet die maximale Differenz der Ausbreitungsverzögerungen aller Pfade. Für den gegebenen Kanal kann der Delay Spread als Differenz der Verzögerung von Pfad 3 ("langsamster" Pfad) zu Pfad 1 ("schnellster" Pfad) berechnet werden:

$$T_{\mathrm{DS}} = 3T - \frac{5}{3}T = \frac{4}{3}T$$

Da der Delay Spread größer ist als eine Symboldauer, $T_{\mathrm{DS}} > T$, wird bei diesem Kanal Intersymbolinterferenz (ISI) auftreten.
Anschaulich trifft über Pfad 1 das Symbol des Takt $t+1$ im Empfänger ein, während der Empfänger über Pfad 3 noch das Symbol aus dem vergangenen Takt t empfängt. Beide Symbole interferieren miteinander.

d) Da die Abtastung im Empfänger mit sechsfacher Symbolrate geschieht, sind zur Darstellung des äquivalenten FIR-Filters die Verzögerungen in Abhängigkeit des Abtastintervalls T_{A} anzugeben. Dies resultiert in einer Multiplikation der zuvor errechneten Verzögerungen in Abhängigkeit der Symboldauer T mit dem Faktor 6.

Pfad	Verzögerung in Abhängigkeit der Symboldauer T	Verzögerung in Abhängigkeit des Abtastintervalls T_{A}
1	$\frac{5}{3}$	10
2	2	12
3	3	18

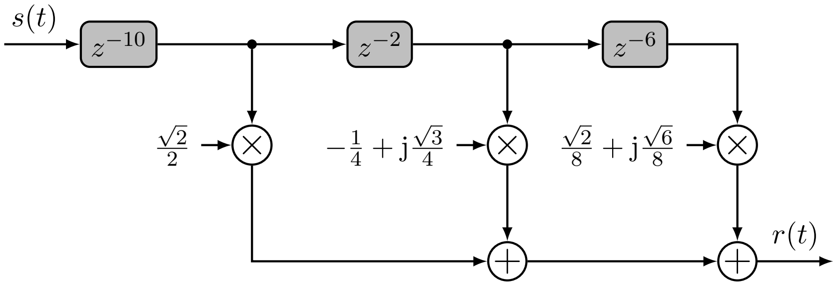
Um die Kanalkoeffizienten zu berechnen, muss zuerst der Skalierungsfaktor der Signalamplitude berechnet werden. Dazu wird die Leistungsdämpfung in dB in die linearen Werte umgerechnet und danach wird die Quadratwurzel gezogen, um eine Amplitudengröße zu erhalten. Es folgt:

Pfad	Dämpfung der Signalleistung (dB)	Linearer Skalierungsfaktor der Signalleistung	Linearer Skalierungsfaktor der Signalamplitude
1	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
2	6	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
3	9	$\frac{1}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$

Mit den so errechneten Skalierungsfaktoren der Amplitude, sowie der Phase aus der Tabelle, können die Kanalkoeffizienten h_n, wobei n den n-ten Pfad beschreibt, in der Eulerschen Darstellung der komplexen Zahl dargestellt werden und in die kartesische Darstellung umgerechnet werden.
Für die Kanalkoeffizienten folgt:

Pfad n	$\lvert h_n \rvert$	$\angle h_n$	$\lvert h_n \rvert \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle h_n}$	h_n
1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot 0}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
2	$\frac{1}{2}$	120°	$\frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot \frac{2\pi}{3}}$	$-\frac{1}{4} + \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{4}$
3	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	60°	$\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot \frac{\pi}{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{8} + \mathrm{j}\frac{\sqrt{6}}{8}$

Das äquivalente FIR-Filter ergibt sich zu:



Aufgabe 8 (10 Punkte)

Ein OFDM-Übertragungssystem mit $N = 512$ Unterträgern, davon $N_\mathrm{b} = 300$ mit Modulationssymbolen belegten Unterträgern, wird mit einer Symbolrate von $R = \frac{1}{T} = 54\,\mathrm{MHz}$ über einen IQ-Modulator betrieben. Es wird ein zyklisches Präfix der Länge $T_\mathrm{p} = 5\,\mu\mathrm{s}$ bei der Übertragung verwendet.

a) Wofür steht das Akronym OFDM? *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie die Symboldauer T_M eines OFDM-Nutzsymbols des beschriebenen Übertragungssystems mit und ohne Schutzintervall und bestimmen Sie den Unterträgerabstand Δf. *(3 Punkte)*

c) Berechnen Sie die verfügbaren Datenraten R_QPSK und $R_\text{16-QAM}$ bei Verwendung von QPSK und 16-QAM als Modulationsverfahren. *(3 Punkte)*

d) Nennen Sie einen Vorteil und einen Nachteil von Mehrträgersystemen gegenüber Einträgersystemen. *(2 Punkte)*

e) Wie können Datenübertragungen für mehrere Nutzer in einem OFDM-System getrennt werden? *(1 Punkt)*

Lösung

a) OFDM steht für Orthogonal Frequency-Division Multiplexing.

b) Mit gegebener Symbolrate und direkter Modulation der 512 Unterträger über den IQ-Modulator ergibt sich:

$$T_\mathrm{M} = 512 \frac{1}{54\,\mathrm{MHz}} = 9{,}481\,\mu\mathrm{s}$$

$$T_\mathrm{M,Schutz} = T_\mathrm{M} + T_\mathrm{p} = 512 \frac{1}{54\,\mathrm{MHz}} + 5\,\mu\mathrm{s} = 14{,}481\,\mu\mathrm{s}$$

$$\Delta f = \frac{1}{NT} = \frac{54\,\mathrm{MHz}}{512} = 105{,}547\,\mathrm{kHz}$$

c) Für das gegebene System werden $N_\mathrm{b} = 300$ Modulationsymbole pro OFDM Nutzsymbol übertragen und pro Modulationsymbole m Bits pro Symbol. Die Rate lässt sich mit $R = m\frac{N_\mathrm{b}}{T_\mathrm{M,Schutz}}$ ermitteln. Für $m = 2$ bei QPSK und $m = 4$ bei 16-QAM erhalten wir

$$R_\mathrm{QPSK} = 2\frac{300}{14{,}481\,\mu\mathrm{s}} = 41{,}4\,\mathrm{Mbit/s}$$

$$R_\text{16-QAM} = 4\frac{300}{14{,}481\,\mu\mathrm{s}} = 82{,}9\,\mathrm{Mbit/s}\,.$$

d)
- Vorteil: Frequenzselektiver Mehrwegekanal wird zu flachem Kanal für einzelne Unterträger.
- Nachteil: Erhöhter Overhead für Schutzintervalle und damit einhergehend SNR-Verlust.

e) Nutzertrennung in Mehrträgersystemen kann über Zuweisung von Unterträgern an einzelne Nutzer realisiert werden. Bei OFDM können über mehrere OFDM-Nutzsymbole hinweg bestimmte Unterträger an Nutzer zugewiesen werden. In LTE wird die Trennung anhand von Ressourcenblöcken vorgenommen. Die kleinste Einheit ist ein Ressourcenelement, das einen Unterträger in einem Zeitslot darstellt. In einem Ressourcenblock werden mehrere Ressourcenelemente (Unterträger $\times$ Zeitslots) einem einzelnen Benutzer zugewiesen, weitere Ressourcenblöcke dann an andere Nutzer.

Aufgabe 9 (16 Punkte)

Der Sender eines 3×3 MIMO-Systems hat Kanalkenntnis und soll Waterfilling verwenden, um den Kanal optimal zu nutzen. Mittels Vorverarbeitung kann das MIMO-System als 3 parallele Kanäle aufgefasst werden. Die mittleren Rauschleistungen der parallelen AWGN-Kanäle betragen $\sigma^2_{\mathrm{n},1} = 1{,}8\,\mathrm{mW}$, $\sigma^2_{\mathrm{n},2} = 0{,}4\,\mathrm{mW}$ sowie $\sigma^2_{\mathrm{n},3} = 0{,}9\,\mathrm{mW}$. Die insgesamt zur Verfügung stehende Sendeleistung beträgt $P_\mathrm{s} = 2\,\mathrm{mW}$.

a) Berechnen Sie die optimalen Sendeleistungen P_1, P_2 und P_3. *(6 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von der vorhergehenden Teilaufgabe bearbeitet werden.

Ein Kollege erklärt in einem Vortrag die Singulärwertzerlegung anhand eines MIMO-Systems. Leider haben Sie die ersten Minuten des Vortrags verpasst. Auf der aktuellen Folie ist Folgendes abgebildet:

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie die Kanalmatrix $\boldsymbol{H}$ und skizzieren Sie das MIMO-System. Achten Sie dabei auf klare Kennzeichnung von Sende- und Empfangsseite. Tragen Sie die Elemente von $\boldsymbol{H}$ in Ihre Skizze ein. *(3 Punkte)*

c) Bestimmen Sie die Kanalkapazität des MIMO-Systems für SNR = 1. *(5 Punkte)*

d) Bestimmen Sie das SNR, welches für ein SISO-System nötig wäre, um die gleiche Kanalkapazität zu erreichen. Geben Sie das SNR sowohl als linearen Wert als auch in dB an. *(2 Punkte)*

Lösung

a) Für Waterfilling eines $R \times R$ MIMO-Systems wird die zur Verfügung stehende Sendeleistung auf R Kanäle verteilt:

$$P_i = \begin{cases} P_\mathrm{max} - \sigma^2_{n,i}, & \sigma^2_{n,i} < P_\mathrm{max} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \qquad i = 1, \dots, R$$

Das Optimierungsproblem unterliegt der Beschränkung der Sendeleistung $P_\mathrm{s} \overset{!}{=} \sum_{i=1}^{R} P_i$. Aus den Gleichungen folgt ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} P_1 &= P_\mathrm{max} - \sigma^2_{\mathrm{n},1} \\ P_2 &= P_\mathrm{max} - \sigma^2_{\mathrm{n},2} \\ P_3 &= P_\mathrm{max} - \sigma^2_{\mathrm{n},3} \\ P_1 + P_2 + P_3 &= P_\mathrm{s} \end{aligned}$$

Die ersten drei Gleichungen in die Vierte einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} 3P_\mathrm{max} - \sum_{i=1}^{3} \sigma^2_{n,i} &= P_\mathrm{s} \\ \Rightarrow P_\mathrm{max} &= \left(P_\mathrm{s} + \sum_{i=1}^{3} \sigma^2_{n,i} \right) \cdot \frac{1}{3} \\ &= (2\,\mathrm{mW} + 3{,}1\,\mathrm{mW}) \cdot \frac{1}{3} = 1{,}7\,\mathrm{mW}\,. \end{aligned}$$

Für die einzelnen Sendeleistungen ergibt sich

$$P_1 = -0{,}1\,\mathrm{mW} \qquad P_2 = 1{,}3\,\mathrm{mW} \qquad P_1 = 0{,}8\,\mathrm{mW}\,.$$

Da das Rauschniveau des ersten Kanals über $P_{\max}$ liegt, wird dieser Kanal von einer erneuten Betrachtung ausgeschlossen. Durchführen des gleichen Vorgehens unter Ausschluss des Kanals 1 liefert

$$\begin{aligned} P_2 &= P_{\max} - \sigma_{\mathrm{n},2}^2 \\ P_3 &= P_{\max} - \sigma_{\mathrm{n},3}^2 \\ P_2 + P_3 &= P_{\mathrm{s}}\,. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad 2P_{\max} - \sigma_{n,2}^2 - \sigma_{n,3}^2 = P_{\mathrm{s}}$$

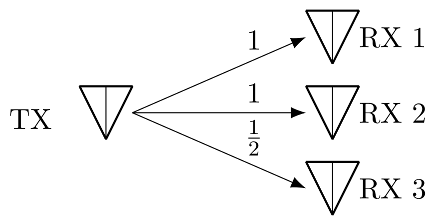
$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad P_{\max} &= \left(P_{\mathrm{s}} + \sigma_{n,2}^2 + \sigma_{n,3}^2\right) \cdot \frac{1}{2} \\ &= (2\,\mathrm{mW} + 1{,}3\,\mathrm{mW}) \cdot \frac{1}{2} = 1{,}65\,\mathrm{mW} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad P_1 = 0\,\mathrm{mW} \qquad P_2 = 1{,}25\,\mathrm{mW} \qquad P_1 = 0{,}75\,\mathrm{mW}\,.$$

b) Nach der Definition aus der Vorlesung berechnet sich die Kanalmatrix zu $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}$. Es ergibt sich

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Da die Kanalmatrix $\boldsymbol{H}$ eine $N_{\mathrm{R}} \times N_{\mathrm{T}}$-Matrix ist und die gegebene Kanalmatrix $\boldsymbol{H}$ drei Zeilen und eine Spalte besitzt, ist $N_{\mathrm{R}} = 3$ und $N_{\mathrm{T}} = 1$. Bei der Skizze ist darauf zu achten, dass die Übergänge mit den korrekten Elementen von $\boldsymbol{H}$ beschriftet werden.



c) Die MIMO-Kanalkapazität bestimmt sich zu

$$\begin{aligned} C_0 &= \log_2\left(\det\left(\boldsymbol{I}_{N_{\mathrm{R}}} + \frac{\mathrm{SNR}}{N_{\mathrm{T}}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)\right) \\ &= \log_2\left(\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)\right) \\ &= \log_2\left(\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}\right) \\ &= \log_2\left(\frac{13}{4}\right) = 1{,}7\,. \end{aligned}$$

d) Aus der Formel der Kanalkapazität eines SISO-Systems ergibt sich:

$$C_{0,\mathrm{SISO}} = \log_2(1 + \mathrm{SNR}) \Rightarrow \mathrm{SNR} = 2^{C_{0,\mathrm{SISO}}} - 1 = 2{,}249$$

Somit ist ein SNR von $\mathrm{SNR} = 2{,}249$ bzw. $\mathrm{SNR} = 3{,}52\,\mathrm{dB}$ nötig.

Formelsammlung und Tabellen

A Tabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	0,80	0,788145	1,60	0,945201	2,40	0,991802	3,20	0,999313
0,02	0,507978	0,82	0,793892	1,62	0,947384	2,42	0,992240	3,22	0,999359
0,04	0,515953	0,84	0,799546	1,64	0,949497	2,44	0,992656	3,24	0,999402
0,06	0,523922	0,86	0,805105	1,66	0,951543	2,46	0,993053	3,26	0,999443
0,08	0,531881	0,88	0,810570	1,68	0,953521	2,48	0,993431	3,28	0,999481
0,10	0,539828	0,90	0,815940	1,70	0,955435	2,50	0,993790	3,30	0,999517
0,12	0,547758	0,92	0,821214	1,72	0,957284	2,52	0,994132	3,32	0,999550
0,14	0,555670	0,94	0,826391	1,74	0,959070	2,54	0,994457	3,34	0,999581
0,16	0,563559	0,96	0,831472	1,76	0,960796	2,56	0,994766	3,36	0,999610
0,18	0,571424	0,98	0,836457	1,78	0,962462	2,58	0,995060	3,38	0,999638
0,20	0,579260	1,00	0,841345	1,80	0,964070	2,60	0,995339	3,40	0,999663
0,22	0,587064	1,02	0,846136	1,82	0,965621	2,62	0,995604	3,42	0,999687
0,24	0,594835	1,04	0,850830	1,84	0,967116	2,64	0,995855	3,44	0,999709
0,26	0,602568	1,06	0,855428	1,86	0,968557	2,66	0,996093	3,46	0,999730
0,28	0,610261	1,08	0,859929	1,88	0,969946	2,68	0,996319	3,48	0,999749
0,30	0,617911	1,10	0,864334	1,90	0,971283	2,70	0,996533	3,50	0,999767
0,32	0,625516	1,12	0,868643	1,92	0,972571	2,72	0,996736	3,52	0,999784
0,34	0,633072	1,14	0,872857	1,94	0,973810	2,74	0,996928	3,54	0,999800
0,36	0,640576	1,16	0,876976	1,96	0,975002	2,76	0,997110	3,56	0,999815
0,38	0,648027	1,18	0,881000	1,98	0,976148	2,78	0,997282	3,58	0,999828
0,40	0,655422	1,20	0,884930	2,00	0,977250	2,80	0,997445	3,60	0,999841
0,42	0,662757	1,22	0,888768	2,02	0,978308	2,82	0,997599	3,62	0,999853
0,44	0,670031	1,24	0,892512	2,04	0,979325	2,84	0,997744	3,64	0,999864
0,46	0,677242	1,26	0,896165	2,06	0,980301	2,86	0,997882	3,66	0,999874
0,48	0,684386	1,28	0,899727	2,08	0,981237	2,88	0,998012	3,68	0,999883
0,50	0,691463	1,30	0,903200	2,10	0,982136	2,90	0,998134	3,70	0,999892
0,52	0,698468	1,32	0,906582	2,12	0,982997	2,92	0,998250	3,72	0,999900
0,54	0,705401	1,34	0,909877	2,14	0,983823	2,94	0,998359	3,74	0,999908
0,56	0,712260	1,36	0,913085	2,16	0,984614	2,96	0,998462	3,76	0,999915
0,58	0,719043	1,38	0,916207	2,18	0,985371	2,98	0,998559	3,78	0,999922
0,60	0,725747	1,40	0,919243	2,20	0,986097	3,00	0,998650	3,80	0,999928
0,62	0,732371	1,42	0,922196	2,22	0,986791	3,02	0,998736	3,82	0,999933
0,64	0,738914	1,44	0,925066	2,24	0,987455	3,04	0,998817	3,84	0,999938
0,66	0,745373	1,46	0,927855	2,26	0,988089	3,06	0,998893	3,86	0,999943
0,68	0,751748	1,48	0,930563	2,28	0,988696	3,08	0,998965	3,88	0,999948
0,70	0,758036	1,50	0,933193	2,30	0,989276	3,10	0,999032	3,90	0,999952
0,72	0,764238	1,52	0,935745	2,32	0,989830	3,12	0,999096	3,92	0,999956
0,74	0,770350	1,54	0,938220	2,34	0,990358	3,14	0,999155	3,94	0,999959
0,76	0,776373	1,56	0,940620	2,36	0,990862	3,16	0,999211	3,96	0,999963
0,78	0,782305	1,58	0,942947	2,38	0,991344	3,18	0,999264	3,98	0,999966

B Folgen und Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1 \tag{B.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{für } |x| < 1 \tag{B.2}$$

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \quad \text{für } x \neq 1 \tag{B.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \cdots = (1+x)^r \quad \text{für } \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \tag{B.4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots = \mathrm{e}^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \tag{B.5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{(1-x)^n}{n} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \cdots = \ln(x) \quad \text{für } 0 < x \leq 2 \tag{B.6}$$

$$\sum_{n=1}^{k} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \tag{B.7}$$

C Integralrechnung

$$\int \delta(x - x_0)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \tag{C.1}$$

$$\int x\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2}(ax - 1) \tag{C.2}$$

$$\int x^2\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2) \tag{C.3}$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \tag{C.4}$$

$$\int \mathrm{e}^{ax} \sin(bx)\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2 + b^2}\Big(a \sin(bx) - b \cos(bx)\Big) \tag{C.5}$$

$$\int \sin(ax) \cos(ax)\, \mathrm{d}x = -\frac{\cos^2(ax)}{2a} \quad \text{für } a \neq 0 \tag{C.6}$$

$$\int_0^{\infty} x^n\, \mathrm{e}^{-ax}\, \mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{für } a > 0, n \in \mathbb{N} \tag{C.7}$$

$$\int_0^{\infty} x^2\, \mathrm{e}^{-ax^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \quad \text{für } a > 0 \tag{C.8}$$

D Formeln zur Fouriertransformation

Definition

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\, \mathrm{d}f \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\, \mathrm{d}t = X(f) \tag{D.1}$$

Eigenschaften

$$\sum c_i x_i(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \sum c_i X_i(f) \tag{D.2}$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad (\mathrm{j}2\pi f)^n \; X(f) \tag{D.3}$$

$$x\left(t-t_0\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_0}\, X(f) \tag{D.4}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}\, x(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X\left(f-f_0\right) \tag{D.5}$$

$$x(t) * y(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f)Y(f) \tag{D.6}$$

$$x(t)y(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f) * Y(f) \tag{D.7}$$

$$x(t/a) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad |a|X(af) \tag{D.8}$$

Korrespondenzen

$$1 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \delta(f) \tag{D.9}$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2}\delta(f+f_0)+\frac{1}{2}\delta(f-f_0) \tag{D.10}$$

$$F\cdot\operatorname{sinc}(Ft)=\frac{\sin(\pi F t)}{\pi t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f)=\begin{cases} 1 \text{ für } |f|<\frac{F}{2} \\ 0 \text{ für } |f|>\frac{F}{2} \end{cases} \tag{D.11}$$

$$\mathrm{e}^{-\pi t^2} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{e}^{-\pi f^2} \tag{D.12}$$

$$x(t)=\begin{cases} 1 \text{ für } |t|<\frac{T}{2} \\ 0 \text{ für } |t|>\frac{T}{2} \end{cases} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad T\cdot\operatorname{sinc}(fT)=\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} \tag{D.13}$$

$$\frac{1}{2}\delta(t+t_0)+\frac{1}{2}\delta(t-t_0) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \cos(2\pi f t_0) \tag{D.14}$$

$$\delta(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 1 \tag{D.15}$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\mathrm{j}}{2}\delta(f+f_0)-\frac{\mathrm{j}}{2}\delta(f-f_0) \tag{D.16}$$

$$x(t)=\begin{cases} 1 \text{ für } t>0 \\ 0 \text{ für } t<0 \end{cases} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{\mathrm{j}2\pi f} \tag{D.17}$$

$$\mathrm{e}^{-a|t|}, \quad a>0 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2} \tag{D.18}$$

$$x(t)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-at} \text{ für } t>0 \\ 0 \text{ für } t<0 \end{cases}, \quad a>0 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{a+\mathrm{j}2\pi f} \tag{D.19}$$

$$x(t)=\begin{cases} t\mathrm{e}^{-at} \text{ für } t>0 \\ 0 \text{ für } t<0 \end{cases}, \quad a>0 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{(a+\mathrm{j}2\pi f)^2} \tag{D.20}$$

$$\frac{1}{\pi t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -\mathrm{j}\operatorname{sign}(f) \tag{D.21}$$

$$\mathrm{j}\operatorname{sign}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{\pi f} \tag{D.22}$$

$$\mathcal{H}\{x(t)\}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\lambda)}{t-\lambda}\,\mathrm{d}\lambda \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -\mathrm{j}\operatorname{sign}(f)X(f) \tag{D.23}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mT) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{m}{T}\right) \tag{D.24}$$

E Trigonometrie

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \tag{E.1}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \tag{E.2}$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\Big) \tag{E.3}$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big) \tag{E.4}$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\Big) \tag{E.5}$$