

Schriftliche Prüfung zur Vorlesung
Nachrichtentechnik I
27.09.2022

Musterlösung

Hinweise

Die Prüfungsdauer beträgt **drei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **neun** Aufgaben zu bearbeiten.

Benutzen Sie nur die zur Verfügung gestellten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an.

Verwenden Sie zur Bearbeitung einen **dokumentenechten Stift** und keine rote Farbe. Schreiben Sie leserlich und vermeiden Sie, das vorgedruckte Doppelblatt zu beschriften. Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der Lösungsweg und die gültige Lösung eindeutig erkennbar sein, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann.

Abzugeben sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten und **nach Aufgabennummer sortierten Ausarbeitungen**. Nicht abzugeben sind die Aufgabenblätter, Ihre Formelsammlung sowie Ihr Konzeptpapier.

Zugelassene Hilfsmittel

Erlaubt sind **ein** beidseitig von eigener Hand mit Bleistift, Kugelschreiber, Füller o. Ä. beschriebenes **A4-Blatt** (Original, keine Kopie) sowie ein **nicht-programmierbarer** Taschenrechner.

Nach der Prüfung

Das **Ergebnis** Ihrer Prüfung erfahren Sie spätestens am **25.10.2022** im Online-Notensystem. Details zur **Klausureinsicht** finden Sie auf Ilias. Dort werden Sie auch weitere Informationen zur **mündlichen Nachprüfung** finden.

Geben Sie diese Aufgaben nicht mit ab, sondern behalten Sie diese als Erinnerung für oben gegebene Termine.

Aufgabe 1 (18 Punkte)

Ihre Aufgabe ist der Entwurf der Datenverarbeitung für ein Instrument zur Messung des Kohlenstoffgehalts im Gestein auf dem Planeten Mars. Basierend auf bisher durchgeführten Missionen wird folgende Verteilungsdichte $f_B(b)$ des Messsignals erwartet:

$$f_B(b) = \begin{cases} \frac{1}{16} \cdot (4 - |b|) & \text{für } |b| \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Messsignal b wird mittels eines gleichförmigen Quantisierers mit $K = 8$ Quantisierungsniveaus in das Ausgangssignal \bar{b} quantisiert.

- Bestimmen Sie b_{\max} des Messsignals und die Quantisierungsschrittweite Δ , so dass keine Sättigungsfehler auftreten. (2 Punkte)
- Berechnen Sie die Auftretenswahrscheinlichkeit des höchsten Quantisierungsniveaus \bar{b}_{\max} . (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

Nach dem Quantisierer besitzen die Quantisierungsstufen \bar{b} folgende Auftretenswahrscheinlichkeiten $P_{\bar{B}}(\bar{b})$:

\bar{b}	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{2}$	$+\frac{5}{2}$	$+\frac{7}{2}$
$P_{\bar{B}}(\bar{b})$	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

- Berechnen Sie den Informationsgehalt der einzelnen Quantisierungsstufen und die Entropie der Quelle. (4 Punkte)
- Entwerfen Sie eine präfixfreie Codierung für die Quantisierungsstufen mit minimaler mittlerer Codewortlänge und geben Sie die Codewörter explizit an. (4 Punkte)
- Berechnen Sie die Redundanz ihres Codes. (4 Punkte)

Entgegen der erwarteten Verteilungsdichte $f_B(b)$ tritt bei Durchführung der Mission eine Gleichverteilung des Eingangssignals, und entsprechend auch der Quantisierungsstufen \bar{b} , auf. Die Codierung kann nicht mehr geändert werden.

- Berechnen Sie die neue Redundanz des Codes. (2 Punkte)

Lösung

- Da das Messsignal auf $|b| \leq 4$ begrenzt ist, lässt sich $b_{\max} = 4$ bestimmen. Mit $K = 8$ Quantisierungsstufen ergibt sich die Quantisierungsschrittweite zu $\Delta = \frac{2b_{\max}}{K} = 1$.
- Das höchste Quantisierungsniveau \bar{b}_{\max} ergibt sich durch

$$\bar{b}_{\max} = (2n - 1) \frac{\Delta}{2} \Big|_{n=\frac{K}{2}} = +\frac{7}{2}.$$

Die Auftretenswahrscheinlichkeit $P(\bar{b})$ einer einzelnen Quantisierungsstufe \bar{b} kann durch Integration der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_B(b)$ berechnet werden:

$$P_{\bar{B}}(\bar{b}) = \int_{\bar{b}-\frac{\Delta}{2}}^{\bar{b}+\frac{\Delta}{2}} f_B(b) db.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
 P_{\bar{B}}(\bar{b}_{\max}) &= \int_3^4 \frac{1}{16} (4-b) db \\
 &= \frac{1}{16} \left[4b - \frac{b^2}{2} \right]_3^4 \\
 &= \frac{1}{32} .
 \end{aligned}$$

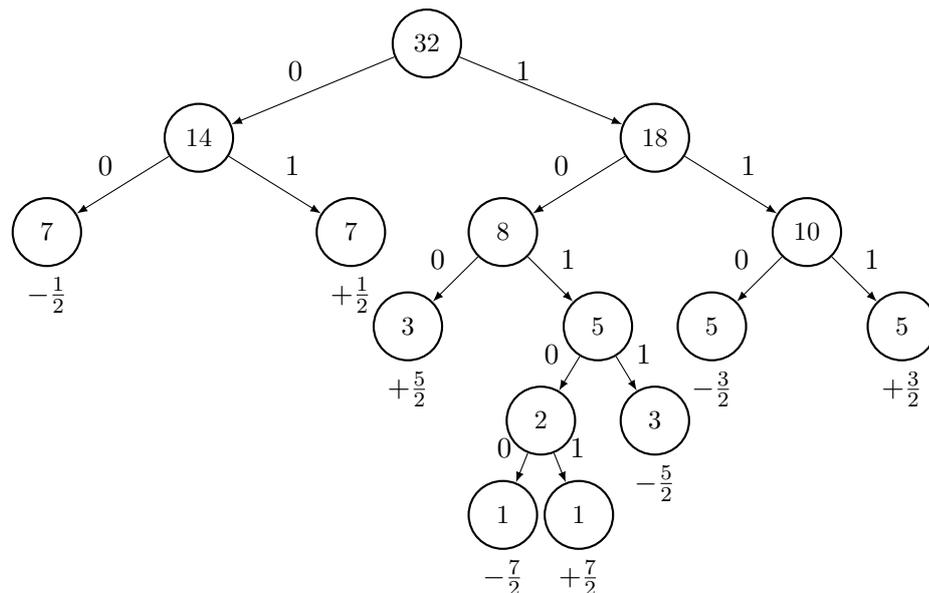
- c) Aufgrund der Symmetrie der gegebenen Verteilung genügt die Betrachtung der positiven Quantisierungsstufen. Mit $I(\bar{b}) = -\log_2 P_{\bar{B}}(\bar{b})$ berechnet sich die Information zu:

$$\begin{aligned}
 I\left(\bar{b} = \pm \frac{1}{2}\right) &= 2,193 \text{ bit} \\
 I\left(\bar{b} = \pm \frac{3}{2}\right) &= 2,678 \text{ bit} \\
 I\left(\bar{b} = \pm \frac{5}{2}\right) &= 3,415 \text{ bit} \\
 I\left(\bar{b} = \pm \frac{7}{2}\right) &= 5,0 \text{ bit}
 \end{aligned}$$

Die Entropie ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
 H(\bar{B}) &= \sum_{\bar{b} \in \bar{B}} P_{\bar{B}}(\bar{b}) I(\bar{b}) = 2 \cdot \left(\frac{7}{32} \cdot 2,193 + \frac{5}{32} \cdot 2,678 + \frac{3}{32} \cdot 3,415 + \frac{1}{32} \cdot 5,0 \right) \\
 &= 2,749 \text{ bit/Symbol} .
 \end{aligned}$$

- d) Eine präfixfreie Codierung mit minimaler Codewortlänge ist der Huffman-Code. Eine mögliche Lösung ist durch folgende Baumdarstellung gegeben, wobei bei der Notation der Wahrscheinlichkeiten in den Blättern immer der Faktor $\frac{1}{32}$ fehlt:



Hinweis: Da der Huffman-Code nicht eindeutig ist, ist dies nur eine Lösung. Obiger Baum wird erhalten, wenn die Quantisierungsstufen in der Sortierung jeweils der negative Quantisierungswert bei gleicher Auftretenswahrscheinlichkeit zuerst in der Liste aufgeführt

wird und Teilbäume vor einzelne Werte sortiert werden. Bei der Codierung wird der erste Wert in der Liste immer links zugewiesen.

Die dem Baum entsprechende Codewortzuordnung ist:

\bar{b}	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{2}$	$+\frac{5}{2}$	$+\frac{7}{2}$
Codewort	10100	1011	110	00	01	111	100	10101

- e) Mit der Länge $L(\bar{b})$ des zu \bar{b} zugeordneten Codeworts berechnet sich die mittlere Codewortlänge zu:

$$L = \sum_{\bar{b}} P(\bar{b}) \cdot L(\bar{b})$$

$$= 2 \frac{1}{32} \cdot 5 + \frac{3}{32} \cdot (3 + 4) + 2 \frac{5}{32} \cdot 3 + 2 \frac{7}{32} \cdot 2 = 2,781 \text{ bit/Codewort .}$$

Die Redundanz R_C der Codierung lässt sich mit $R = L - H(\bar{B})$ berechnen. Einsetzen und Ausrechnen liefert:

$$R_C = 2,781 - 2,749 = 0,032 \text{ bit/Codewort .}$$

- f) Bei Gleichverteilung der Quantisierungsstufen muss eine veränderte mittlere Codewortlänge berechnet werden. Hierbei entspricht $P(\bar{b}) = 1/K$ für alle \bar{b} .

$$L_{\text{gleich}} = \frac{1}{8} \cdot (2 \cdot 5 + 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2) = 3,375 \text{ bit/Codewort}$$

Für gleichverteilte Symbole ergibt sich die Entropie zu $H_{\text{gleich}} = -\log_2(1/8) = 3 \text{ bit/Symbol}$. Somit ist die Redundanz $R_{\text{gleich}} = L_{\text{gleich}} - H_{\text{gleich}} = 3,375 - 3 = 0,375 \text{ bit/Codewort}$.

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Gegeben ist das Basisbandsignal $s(t)$, wobei $B \in \mathbb{R}$, $B > 0$.

$$s(t) = B \operatorname{sinc}(Bt) \left(1 + e^{+j3\pi Bt} + e^{-j3\pi Bt} \right)$$

- Berechnen Sie das Spektrum des Basisbandsignals $S(f)$. (3 Punkte)
- Berechnen Sie das Bandpasssignal $s_{\text{BP}}(t)$ mit der Trägerfrequenz f_{T} sowie das zugehörige Spektrum $S_{\text{BP}}(f)$. (3 Punkte)
- Skizzieren Sie sowohl Real- als auch den Imaginärteil von $S_{\text{BP}}(f)$. Achten Sie auf eine vollständige Achsenbeschriftung. (3 Punkte)

Sie empfangen nun $r_{\text{BP}}(t) = s_{\text{BP}}(t)$.

- Skizzieren und benennen Sie eine Schaltung, um aus dem Empfangssignal $r_{\text{BP}}(t)$ das Basisbandsignal $r(t) = s(t)$ zu erhalten. (3 Punkte)
- Geben Sie die minimale Abtastfrequenz f_{a} an, mit der $r(t)$ abgetastet werden muss, um wieder fehlerfrei rekonstruiert werden zu können. Skizzieren Sie das Spektrum des mit f_{a} abgetasteten Signals $r(t)$ für $-6B \leq f \leq 6B$. Achten Sie auf eine vollständige Achsenbeschriftung. (3 Punkte)

Lösung

- Das Basisbandsignal $s(t)$ lässt sich umformen:

$$s(t) = B \operatorname{sinc}(Bt) + B \operatorname{sinc}(Bt) e^{j2\pi \frac{3}{2} Bt} + B \operatorname{sinc}(Bt) e^{-j2\pi \frac{3}{2} Bt}$$

Es ergibt sich:

$$S(f) = \operatorname{rect}_B(f) + \operatorname{rect}_B\left(f - \frac{3}{2}B\right) + \operatorname{rect}_B\left(f + \frac{3}{2}B\right)$$

Alternative:

$$s(t) = B \operatorname{sinc}(Bt) + 2B \operatorname{sinc}(Bt) \cos\left(2\pi \frac{3}{2} Bt\right)$$

$$S(f) = \operatorname{rect}_B(f) + \operatorname{rect}_B(f) * \left[\delta\left(f - \frac{3}{2}B\right) + \delta\left(f + \frac{3}{2}B\right) \right]$$

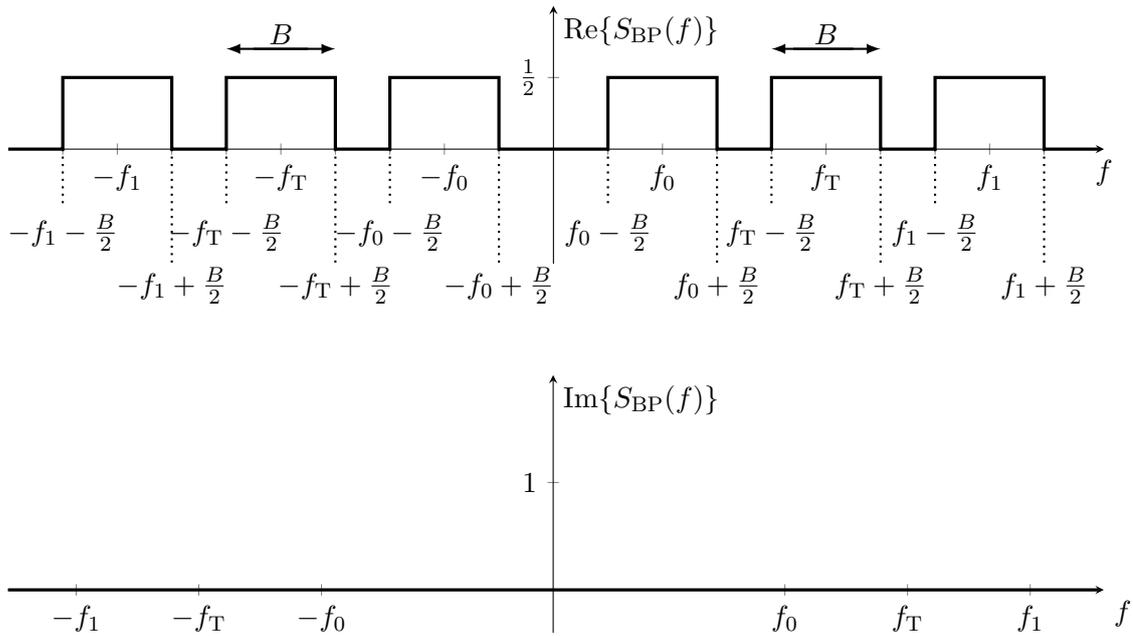
- Das Bandpasssignal ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} s_{\text{BP}}(t) &= \operatorname{Re}\{s(t)e^{j2\pi f_{\text{T}}t}\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{B \operatorname{sinc}(Bt) \left(1 + 2 \cos\left(2\pi \frac{3}{2} Bt\right)\right) e^{j2\pi f_{\text{T}}t}\right\} \\ &= B \operatorname{sinc}(Bt) \left(1 + 2 \cos\left(2\pi \frac{3}{2} Bt\right)\right) \cos(2\pi f_{\text{T}}t) \\ &= B \operatorname{sinc}(Bt) \left[\cos(2\pi f_{\text{T}}t) + \cos\left(2\pi \left(f_{\text{T}} - \frac{3}{2}B\right)t\right) + \cos\left(2\pi \left(f_{\text{T}} + \frac{3}{2}B\right)t\right)\right] \end{aligned}$$

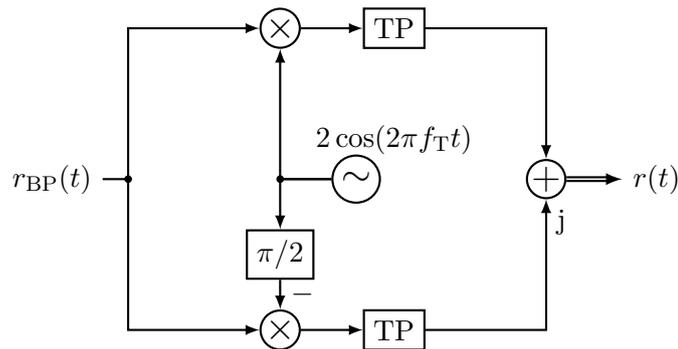
Mit $f_0 = f_{\text{T}} - \frac{3}{2}B$ und $f_1 = f_{\text{T}} + \frac{3}{2}B$ ergibt sich durch die Fouriertransformation:

$$\begin{aligned} S_{\text{BP}}(f) &= \operatorname{rect}_B(f) \\ &\quad * \frac{1}{2} [\delta(f + f_{\text{T}}) + \delta(f - f_{\text{T}}) + \delta(f + f_0) + \delta(f - f_0) + \delta(f + f_1) + \delta(f - f_1)] \end{aligned}$$

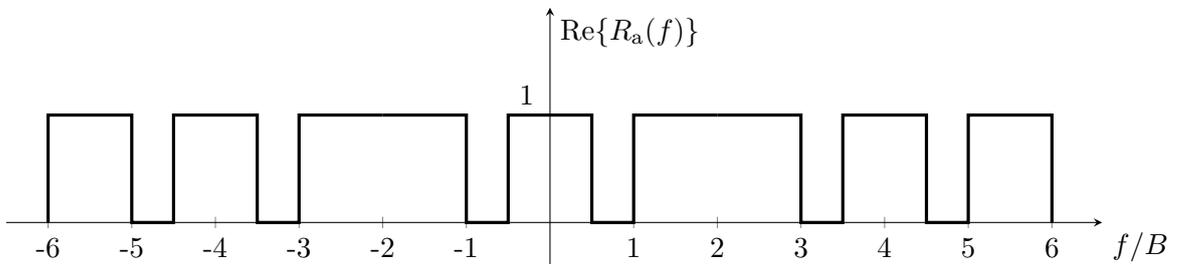
c) Mit $f_0 = f_T - \frac{3}{2}B$ und $f_1 = f_T + \frac{3}{2}B$ ergeben sich beiden Skizzen zu:



d) Um das Bandpass-Signal $r_{BP}(t)$ in das Basisband zu transformieren kann ein IQ-Demodulator benutzt werden.

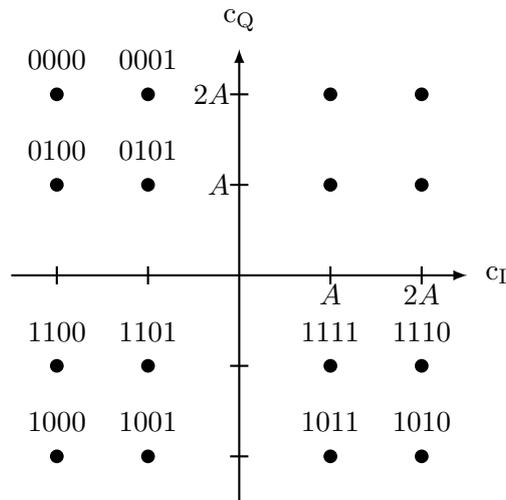


e) Da das Spektrum von $r(t)$ die maximale Frequenz $f_{\max} = 2B$ besitzt, lässt sich die zur fehlerfreien Rekonstruktion nötige minimale Abtastfrequenz zu $f_a = 2f_{\max} = 4B$ bestimmen. Das abgetastete Spektrum $R_a(f)$ ergibt sich zu:



Aufgabe 3 (14 Punkte)

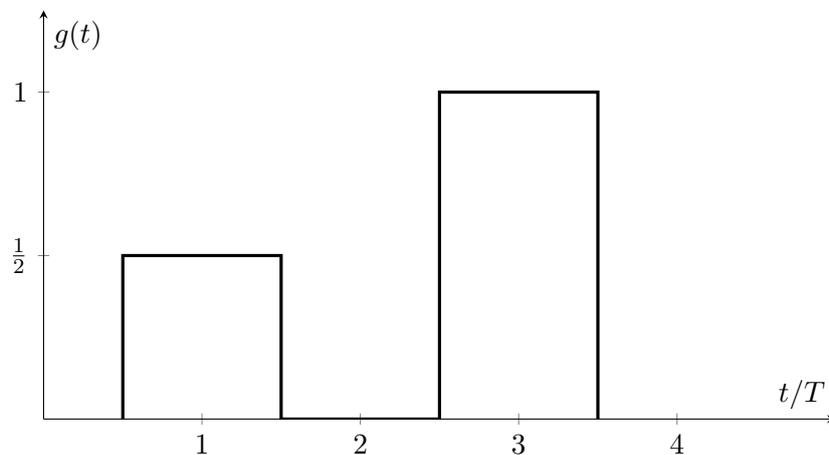
Gegeben ist folgendes Konstellationsdiagramm, wobei die Symbole gleichverteilt sind.



- Vervollständigen Sie die Bitzuweisung zu den Symbolen, sodass eine Gray-Codierung vorliegt. Es genügt den entsprechenden Quadranten auf das Arbeitspapier zu notieren. Achten Sie auf eine vollständige Achsenbeschriftung. (2 Punkte)
- Bestimmen Sie A , sodass die mittlere Symbolenergie $E_s \stackrel{!}{=} 1$ ist. (3 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

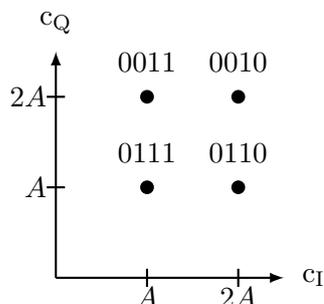
Gegeben ist die in folgender Abbildung dargestellte Impulsantwort $g(t)$ eines Sendefilters.



- Geben Sie den Frequenzgang $G(f)$ des Sendepulsfilters an. (2 Punkte)
- Skizzieren Sie sowohl die Impulsantwort des zu $g(t)$ gehörenden kausalen Matched-Filters $h(t)$ sowie die Gesamtimpulsantwort $h_0(t) = (g * h)(t)$. Achten Sie auf eine vollständige Achsenbeschriftung. (5 Punkte)
- Geben Sie die maximal erreichbare Datenrate R_{bit} in Abhängigkeit von T an, wenn mit einer 16-QAM moduliert wird und die 1. Nyquistbedingung im Zeitbereich erfüllt sein soll. (2 Punkte)

Lösung

- a) Bei einer Gray-Codierung ist sicherzustellen, dass sich benachbarte Symbole nur um ein Bit unterscheiden. Da der Abstand zu Nachbarsymbolen eines anderen Quadranten $2A$ beträgt, innerhalb eines Quadranten aber nur A , sind für die Codierung nur die Nachbarn innerhalb des eigenen Quadranten eines Symbols von Interesse. Somit ist die Anforderung erfüllt, sofern die verbleibenden Bitmuster innerhalb des Quadranten Gray-codiert werden. Es sind mehrere Lösungen möglich. Bei einer gültigen Lösung sind die Bitmuster 0011 und 0110 keine direkten Nachbarn sind. Eine mögliche Lösung lautet:



- b) Da die Symbole c_i , $i \in \{1, 2, \dots, 16\}$ gleichverteilt sind, ist $P_C(c_i) = \frac{1}{16}$. Die Symbolenergie berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} E_s &= \sum_{i=1}^{16} P_C(c_i) |c_i|^2 \\ &= \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} |c_i|^2 \\ &= \frac{1}{16} (4(A^2 + A^2) + 8(A^2 + 4A^2) + 4(4A^2 + 4A^2)) \\ &= \frac{80}{16} A^2 \end{aligned}$$

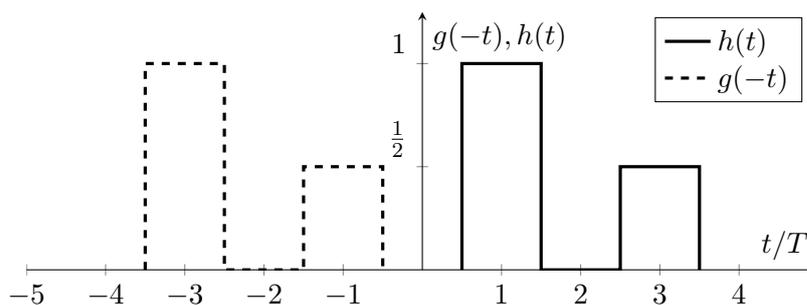
Es folgt:

$$A = \sqrt{E_s \frac{16}{80}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

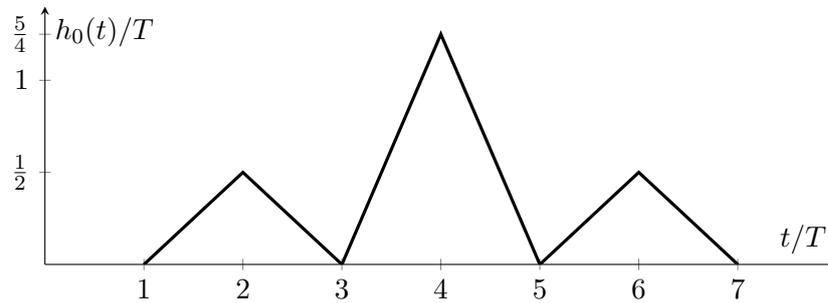
- c) Das Sendepulsfilter ist im Zeitbereich durch $g(t) = \frac{1}{2} \text{rect}_T(t - T) + \text{rect}_T(t - 3T)$ gegeben. Aufgrund der Linearität der Fouriertransformation sowie des Verschiebungssatzes ergibt sich:

$$G(f) = \frac{1}{2} T \text{sinc}(fT) e^{-j2\pi fT} + T \text{sinc}(fT) e^{-j2\pi f3T}$$

- d) Da $g(t) \in \mathbb{R}$, ist das Matched-Filter durch $h(t) = g(\kappa_0 T - t)$ gegeben. Somit wird $g(t)$ an der y-Achse gespiegelt und danach zur Kausalisierung um $\kappa_0 = 4$ verschoben.



Die Impulsantwort des Gesamtfilters $h_0(t)$ ergibt sich durch $g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)h(\tau - t)dt$. Somit wird $h(t)$ an der y-Achse gespiegelt, mit steigendem τ “nach rechts” geschoben und die “gemeinsamen Flächen integriert”.

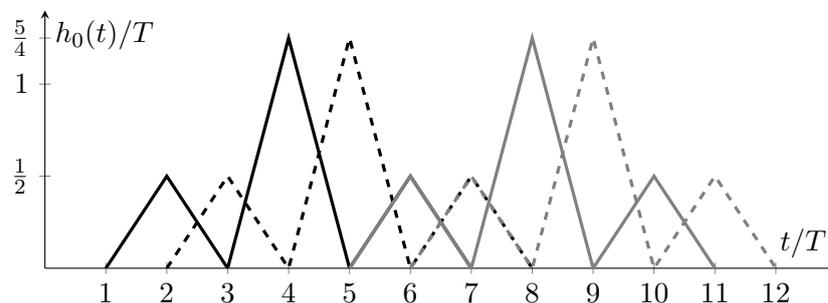


- e) Damit die 1. Nyquistbedingung erfüllt ist, darf im Abtastpunkt eines Symboles (Maximum von $h_0(t)$) kein anderes Symbol anliegen.

$$h_0(kT_S) = \begin{cases} 1 & k = k_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $k_0 \in \mathbb{N}$ eine ganzzahlige Verzögerung und T_S die Symboldauer darstellt. Aus der Skizze von $h_0(t)$ ist ersichtlich, dass das nächste Symbol nach $T_S = 3T$ auftreten darf. Somit ergibt sich die Symbolrate zu $R_{\text{sym}} = \frac{1}{3T}$ und die Datenrate zu $R_{\text{bit}} = \log_2(16)R_{\text{sym}} = \frac{4}{3T}$.

Anmerkung: Eine weitere gültige Lösung ist das Senden zweier Symbole mit zeitlichem Abstand T , dann eine Pause für zwei Takte, wieder 2 Symbole, wieder Pause, etc.



Die Symbolrate ergibt sich in diesem Fall zu $R_{\text{sym}} = \frac{1}{2T}$, die Datenrate zu $R_{\text{bit}} = \frac{2}{T}$. Da in der Vorlesung “nur” Sendeschemata mit konstantem zeitlichen Abstand zwischen einzelnen Sendesymbolen behandelt werden, geht diese Lösung über den Stoff der Vorlesung hinaus, ist der Vollständigkeit halber aber gegeben.

Aufgabe 4 (19 Punkte)

Wir betrachten eine Modulation mit zwei Symbolpunkten c_1 und c_2 . Diese werden durch reellwertiges Rauschen mit der Verteilungsdichte

$$f_N(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{5}} \leq n < 0 \\ -2n + \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \leq n \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gestört und es gilt $z[k] = a[k] + n[k]$. Dabei beschreibt die Zufallsvariable A das Sendesymbol $a[k] \in \{c_1, c_2\}$. Zunächst sei $c_1 = +1$ und $c_2 = -1$. Weiterhin gilt $P(A = c_1) = P(A = c_2) = \frac{1}{2}$.

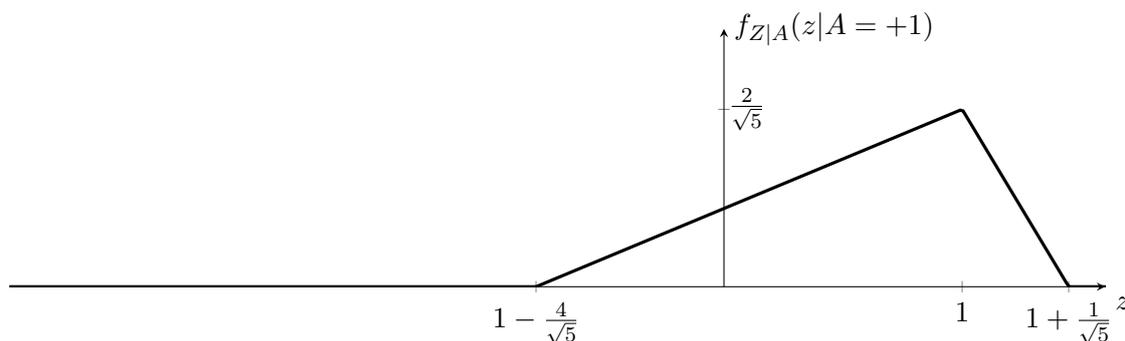
- Skizzieren Sie $f_{Z|A}(z|A = c_1)$ und $f_{Z|A}(z|A = c_2)$. Achten Sie auf eine vollständige Achsenbeschriftung. (3 Punkte)
- Leiten Sie die optimale Entscheidungsregel nach der MAP-Regel her und geben Sie einen Ausdruck an, der in Abhängigkeit des Empfangssymbols $z[k]$ die optimale Symbolentscheidung liefert. (4 Punkte)
- Bestimmen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit für diesen Fall. (4 Punkte)
- Anstelle der MAP-Regel verwenden Sie nun die ML-Regel. Wie verändert sich dadurch die Fehlerwahrscheinlichkeit. Geben Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit nach Entscheidung gemäß ML-Regel an. Ihr Ergebnis muss nachvollziehbar und begründet sein. (2 Punkte)

Nun verwenden Sie die Modulationssymbole $c_1 = +1 + \gamma$ und $c_2 = -1 - \gamma$, mit $\gamma \in \mathbb{R}$.

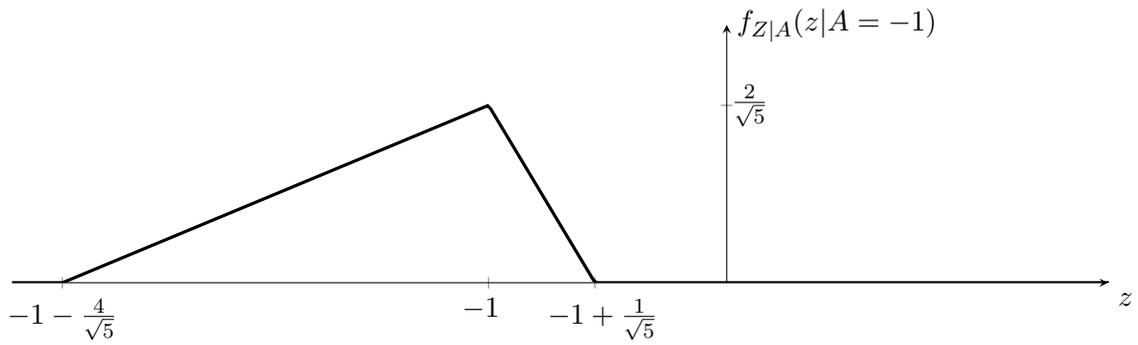
- Bestimmen Sie sämtliche γ , für welche $P_e = 0$, d.h. keine Fehler nach Entscheidung auftreten. (3 Punkte)
- Bestimmen Sie sämtliche γ , welche die mittlere Sendeleistung minimieren und dazu $P_e = 0$ garantieren. (3 Punkte)

Lösung

- Wir erhalten mit $c_1 = +1$:



und mit $c_2 = -1$:

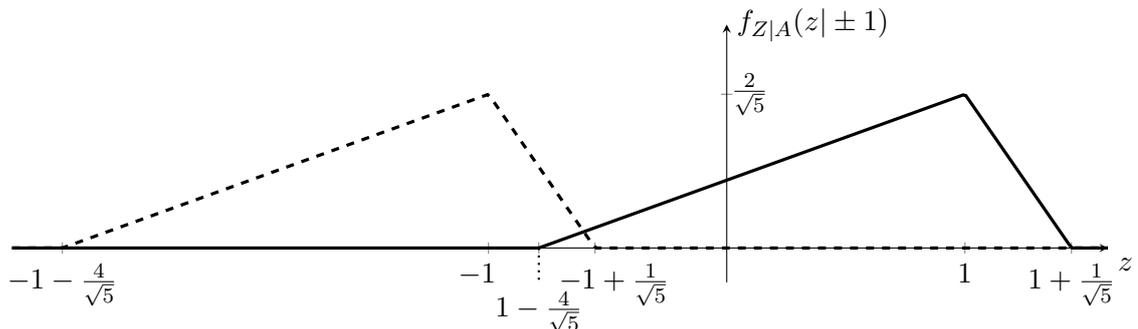


b) Die beiden Verteilungsdichten am Empfänger ergeben sich zu:

$$f_{Z|A}(z|A = c_1) = \begin{cases} \frac{z-1}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{5}} + 1 \leq z < 1 \\ -2(z-1) + \frac{2}{\sqrt{5}} & 1 \leq z \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_{Z|A}(z|A = c_2) = \begin{cases} \frac{z+1}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}} & -1 - \frac{4}{\sqrt{5}} \leq z < -1 \\ -2(z+1) + \frac{2}{\sqrt{5}} & -1 \leq z \leq -1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir zeichnen beide bedingten Verteilungsdichten in einem gemeinsamen Diagramm:



Mit Hilfe der Skizze folgt eine Fallunterscheidung:

Fall 1: $z \leq 1 - \frac{4}{\sqrt{5}}$:

$$f_{Z|A}(z|A = c_1) = 0 \Rightarrow f_{Z|A}(z|A = c_1) < f_{Z|A}(z|A = c_2) \Rightarrow \hat{A} = c_2$$

Fall 2: $z > -1 + \frac{1}{\sqrt{5}}$:

$$f_{Z|A}(z|A = c_2) = 0 \Rightarrow f_{Z|A}(z|A = c_1) > f_{Z|A}(z|A = c_2) \Rightarrow \hat{A} = c_1$$

Fall 3: $1 - \frac{4}{\sqrt{5}} < z \leq -1 + \frac{1}{\sqrt{5}}$:

Laut binärem Hypothesentest ist gemäß MAP-Regel

$$P(A = c_1)f_{Z|A}(z|A = c_1) \stackrel{\hat{A}=c_2}{\underset{\hat{A}=c_1}{\leq}} P(A = c_2)f_{Z|A}(z|A = c_2).$$

Da $P(A = c_1) = P(A = c_2) = \frac{1}{2}$, vereinfacht sich der MAP-Test zu

$$f_{Z|A}(z|A = c_1) \stackrel{\hat{A}=c_2}{\underset{\hat{A}=c_1}{\leq}} f_{Z|A}(z|A = c_2).$$

Wir bestimmen zuerst den Schnittpunkt der beiden Verteilungsdichten:

$$\begin{aligned}
 -2(z+1) + \frac{2}{\sqrt{5}} &= \frac{z-1}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}} \\
 \Leftrightarrow -2z - 2 &= \frac{z-1}{2} \\
 \Leftrightarrow -4z - z &= 4 - 1 \\
 \Leftrightarrow z &= -\frac{3}{5}.
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgende Entscheidungsregel

$$\hat{a}[k] = \begin{cases} c_2 & z[k] < -\frac{3}{5} \\ c_1 & z[k] \geq -\frac{3}{5}. \end{cases}$$

- c) Zuerst bestimmen wir $P_e(c_1 = +1)$. Eine Fehlentscheidung tritt genau dann auf, wenn $1 - \frac{4}{\sqrt{5}} \leq z \leq -\frac{3}{5}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 P_e(c_1) &= \int_{1-\frac{4}{\sqrt{5}}}^{-\frac{3}{5}} \left(\frac{z-1}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}} \right) dz \\
 &= \frac{z^2}{4} - \frac{z}{2} + \frac{2z}{\sqrt{5}} \Big|_{1-\frac{4}{\sqrt{5}}}^{-\frac{3}{5}} \\
 &= \frac{4}{25} (9 - 4\sqrt{5}) \\
 &\approx 0.00891649.
 \end{aligned}$$

Anschließend bestimmen wir $P_e(c_2 = -1)$. Eine Fehlentscheidung tritt dann auf, wenn $-\frac{3}{5} \leq z \leq -1 + \frac{1}{\sqrt{5}}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 P_e(c_2) &= \int_{-\frac{3}{5}}^{-1+\frac{1}{\sqrt{5}}} \left(-2(z+1) + \frac{2}{\sqrt{5}} \right) dz \\
 &= -z^2 - 2z + \frac{2z}{\sqrt{5}} \Big|_{-\frac{3}{5}}^{-1+\frac{1}{\sqrt{5}}} \\
 &= \frac{1}{25} (9 - 4\sqrt{5}) \\
 &\approx 0.00222912.
 \end{aligned}$$

Die Fehlerwahrscheinlichkeit P_e ergibt sich schließlich zu

$$\begin{aligned}
 P_e &= P(A = c_1)P_e(c_1) + P(A = c_2)P_e(c_2) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{25} (9 - 4\sqrt{5}) \\
 &= \frac{1}{10} (9 - 4\sqrt{5}) \\
 &\approx 0.00557281.
 \end{aligned}$$

- d) Da $P(A = +1) = P(A = -1) = \frac{1}{2}$ liefern MAP-Regel und ML-Regel identische Entscheidungsregeln. Damit ändert sich die Fehlerwahrscheinlichkeit nicht und wir haben

$$P_{e,ML} = \frac{1}{10} (9 - 4\sqrt{5}) \approx 0.00557281.$$

- e) Es treten keine Fehler auf, falls $f_{Z|A}(z|A = c_1)$ und $f_{Z|A}(z|A = c_2)$ sich nicht überlappen. Dies ist dann der Fall, falls

$$\begin{aligned} 1 + \gamma - \frac{4}{\sqrt{5}} &\geq -1 - \gamma + \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \Leftrightarrow 2\gamma &\geq -2 + \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow \gamma &\geq -1 + \frac{\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Zusätzlich ist dies der Fall, wenn

$$\begin{aligned} 1 + \gamma + \frac{1}{\sqrt{5}} &\leq -1 - \gamma - \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \Leftrightarrow \gamma &\leq -1 - \frac{\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir eine fehlerfreie Übertragung falls $\gamma \in (-\infty, -1 - \frac{\sqrt{5}}{2}] \cup [-1 + \frac{\sqrt{5}}{2}, \infty)$.

- f) Die mittlere Sendeleistung ist

$$\begin{aligned} E_s &= \frac{1}{2}(1 + \gamma)^2 + \frac{1}{2}(-1 - \gamma)^2 \\ &= (1 + \gamma)^2. \end{aligned}$$

Wir betrachten zuerst den Fall $\gamma \in [-1 + \frac{\sqrt{5}}{2}, \infty)$. Für $\gamma = -1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$ ist $E_s = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$. Wenn $\gamma > -1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$, dann ist auch $E_s > \frac{5}{4}$.

Wir betrachten nun den Fall $\gamma \in (-\infty, -1 - \frac{\sqrt{5}}{2}]$. Für $\gamma = -1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$ ist $E_s = \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$. Wenn $\gamma < -1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$, dann ist auch $E_s > \frac{5}{4}$.

Es gibt also zwei Möglichkeiten für γ die eine minimale mittlere Sendeleistung mit $P_e = 0$ liefern, und zwar

$$\gamma \in \left\{ -1 + \frac{\sqrt{5}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Aufgabe 5 (17 Punkte)

Gegeben sei der (7, 4)-Hamming-Code \mathcal{C}_1 mit einem minimalen Hammingabstand von $d_{\min} = 3$ und der Paritycheckmatrix

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Geben Sie die Coderate r von \mathcal{C}_1 an. (1 Punkt)

Es wird nun das gültige Codewort

$$\mathbf{x} = (1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1)$$

über einen AWGN-Kanal gesendet, wobei eine BPSK-Modulation verwendet wird. Die Empfangswerte lassen sich durch $y_i = (-1)^{x_i} + n_i$ beschreiben, wobei $n_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Sie empfangen den Vektor

$$\mathbf{y} = (-1,1 \ -0,8 \ -0,1 \ +0,2 \ +0,6 \ +0,6 \ -0,5).$$

- b) Führen Sie eine Hard-Decision Decodierung durch und bestimmen Sie das gesendete Codewort $\hat{\mathbf{x}}_{\text{HD}}$. Ist die Hard-Decision Decodierung erfolgreich? (4 Punkte)

Sie wissen nun, dass die Codewörter \mathbf{c}_1 und \mathbf{c}_2 zwei gültige Codewörter sind, mit

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= (1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1), \\ \mathbf{c}_2 &= (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0). \end{aligned}$$

- c) Bestimmen Sie mittels Soft-Decision Entscheidung und den Codewörtern \mathbf{c}_1 und \mathbf{c}_2 das am wahrscheinlichsten gesendete Codewort $\hat{\mathbf{x}}_{\text{SD}}$. Ist die Soft-Decision Decodierung erfolgreich? (4 Punkte)
- d) Nennen Sie einen Vorteil und einen Nachteil der Soft-Decision Decodierung verglichen mit der Hard-Decision Decodierung. (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

Nun sei \mathcal{C}_2 ein linearer (15, 11)-Blockcode mit einem minimalen Hammingabstand von $d_{\min} = 5$. Ein weiterer Blockcode \mathcal{C}_3 wird durch Aneinanderhängen der Codewörter von \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 generiert, $\mathcal{C}_3 = \{(\mathbf{c}_i | \mathbf{c}_j) : \mathbf{c}_i \in \mathcal{C}_1, \mathbf{c}_j \in \mathcal{C}_2\}$.

- e) Ist \mathcal{C}_3 ein linearer Code? Begründen Sie mathematisch. (3 Punkte)
- f) Geben Sie die Coderate von \mathcal{C}_3 an. (2 Punkte)
- g) Geben Sie den minimalen Hammingabstand von \mathcal{C}_3 an. (1 Punkt)

Lösung

- a) Die Coderate von \mathcal{C}_1 ist

$$r = \frac{k}{n} = \frac{4}{7}.$$

- b) Für die Hard-Decision Decodierung (HDD) wird zuerst bitweise “hart” entschieden. Da BPSK als Modulationsverfahren genutzt wird, wird für $y_i < 0$ auf eine binäre “1” und für $y_i > 0$ auf eine binäre “0” entschieden, siehe BPSK-Bildungsvorschrift aus der Aufgabenstellung. Es ergibt sich:

$$\hat{\mathbf{y}} = (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)$$

Das Syndrom berechnet sich zu

$$\mathbf{s} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{y}}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei dies der letzten Spalte von \mathbf{H} und somit dem Fehlermuster $\hat{\mathbf{e}} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)$ entspricht. Das durch Hard-Decision Decoding (HDD) geschätzte Sendewort ist somit

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{HD}} = \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{e}} = (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0).$$

Da $\hat{\mathbf{x}}_{\text{HD}} \neq \mathbf{x}$ führt die Decodierung mittels HDD zu einem falsch decodierten Codewort.

- c) Wie in der Vorlesung definiert ist der Soft-Decision Decoder (SDD) für BPSK-Modulation durch

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{SD}} = \arg \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}_1} \sum_{i=1}^7 y_i (-1)^{x_i}$$

gegeben. Es wird das Codewort gewählt, welches nach BPSK-Modulation maximale Korrelation zum Empfangswort aufweist. Die Korrelation zwischen dem Empfangswort \mathbf{y} und den beiden Codewörtern \mathbf{c}_1 und \mathbf{c}_2 berechnet sich zu:

$$d_{\text{SD},1} = 1,1 + 0,8 - 0,1 - 0,2 + 0,6 + 0,5 + 0,5 = 3,3$$

$$d_{\text{SD},2} = 1,1 + 0,8 + 0,1 + 0,2 + 0,6 + 0,6 - 0,5 = 2,9$$

Da $d_{\text{SD},1} > d_{\text{SD},2}$ wird mittels SDD auf

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{SD}} = \mathbf{c}_1 = (1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1)$$

als gesendetes Wort entschieden. Da $\hat{\mathbf{x}}_{\text{SD}} = \mathbf{x}$ führt die Decodierung mittels SDD zum korrekten gesendeten Codewort.

- d) Vorteil: Da SDD die “weichen” Empfangswerte und somit “mehr Information” nutzt, besitzt SDD eine bessere Fehlerkorrekturfähigkeit und liefert somit bessere Ergebnisse als HDD. Nachteil: Da für SDD die Korrelation zwischen mehreren Codewörtern und dem Empfangswort berechnet werden muss, ist SDD rechenaufwändiger als HDD.

e) Für zwei beliebige Codewörter \mathbf{a} und \mathbf{b} aus \mathcal{C}_3 wissen wir, dass

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2)$$

mit $\mathbf{a}_1 \in \mathcal{C}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathcal{C}_2$ und

$$\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1 | \mathbf{b}_2)$$

mit $\mathbf{b}_1 \in \mathcal{C}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathcal{C}_2$.

Wir können die Linearkombination $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ wie folgt umschreiben:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2) + (\mathbf{b}_1 | \mathbf{b}_2) = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 | \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2).$$

Da sowohl \mathcal{C}_1 als auch \mathcal{C}_2 lineare Blockcodes sind, ist $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 \in \mathcal{C}_1$ und $\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2 \in \mathcal{C}_2$, $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1$ und $\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2$ sind somit gültige Codewörter. Laut Bildungsvorschrift von \mathcal{C}_3 ist somit $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 | \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2)$ bzw. $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ ein gültiges Codewort aus \mathcal{C}_3 . Somit ist \mathcal{C}_3 ein linearer Code.

f) Sei \mathbf{G}_1 die Generatormatrix von \mathcal{C}_1 und \mathbf{G}_2 die Generatormatrix von \mathcal{C}_2 . Durch die Bildungsvorschrift von \mathcal{C}_3 kann die Generatormatrix \mathbf{G}_3 wie folgt aus \mathbf{G}_1 und \mathbf{G}_2 gebildet werden:

$$\mathbf{G}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_2 \end{pmatrix}$$

\mathbf{G}_3 besitzt somit $k = 4 + 11 = 15$ Spalten und $n = 7 + 15 = 22$ Zeilen. Die Coderate von \mathcal{C}_3 bestimmt sich zu

$$r = \frac{k}{n} = \frac{15}{22}.$$

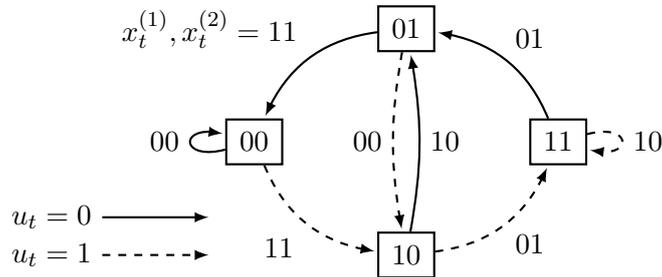
g) Der minimale Hammingabstand eines linearen Blockcodes ist definiert als das minimale Hamminggewicht aller Codewörter exklusive dem Nullwort. Um das Codewort $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_i | \mathbf{c}_j)$ aus \mathcal{C}_3 mit dem minimalen Hamminggewicht zu konstruieren gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder ist $\mathbf{c}_i \in \mathcal{C}_1$ das Nullwort und $\mathbf{c}_j \in \mathcal{C}_2$ das Codewort mit minimalen Hamminggewicht aus \mathcal{C}_2 ODER $\mathbf{c}_j \in \mathcal{C}_2$ ist das Nullwort und $\mathbf{c}_i \in \mathcal{C}_1$ das Codewort mit minimalen Hamminggewicht aus \mathcal{C}_1 .

Somit kann der minimale Hammingabstand von \mathcal{C}_3 wie folgt bestimmt werden:

$$d_3 = \min(d_1, d_2) = \min(3, 5) = 3.$$

Aufgabe 6 (16 Punkte)

Gegeben ist das Zustandsdiagramm eines Faltungscodierers, wobei u_t das Eingangsbit und $x_t^{(1)}$ und $x_t^{(2)}$ die Ausgangsbits pro Takt t darstellen.



- Geben Sie die Rate r und Einflusslänge des Faltungscodierers an. Welche Eigenschaft des Faltungsdecodierers wird durch die Einflusslänge beschrieben? (3 Punkte)
- Bestimmen Sie die Generatorpolynome $g_1(x)$ und $g_2(x)$, welche die Erzeugung von $x_t^{(1)}$ und $x_t^{(2)}$ beschreiben. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen. (3 Punkte)
- Geben Sie die Schieberegisterdarstellung des Faltungscodierers an. (2 Punkte)
- Skizzieren Sie das Trellis-Diagramm für die ersten fünf Taktschritte, wenn der Encoder mit $(v_1, v_2) = (0, 0)$ initialisiert ist. (3 Punkte)
- Nach Anwendung des mit $(v_1, v_2) = (0, 0)$ initialisierten Faltungscodierers werden die codierten Bits \mathbf{x} BPSK moduliert und das Sendesignal \mathbf{a} über einen AWGN-Kanal übertragen. Am Ausgang des Matched-Filters beobachten Sie die Empfangfolge

$$\mathbf{y} = (-0,8 \quad -0,2 \quad -0,5 \quad -0,1 \quad +0,6 \quad +1,3 \quad +1,1 \quad +0,2 \quad +0,5 \quad -1,3) .$$

Decodieren Sie die gesendete Codebitfolge $\hat{\mathbf{x}}$ sowie die entsprechende Informationsbitfolge $\hat{\mathbf{u}}$ mit dem Soft-Decision Viterbi-Algorithmus. Achten Sie auf eine vollständige Beschriftung Ihrer Lösung inklusiver aller Zwischenwerte, sodass der Lösungsweg klar ersichtlich ist. Sie dürfen das Trelli-Diagramm aus der vorherigen Teilaufgabe benutzen. (5 Punkte)

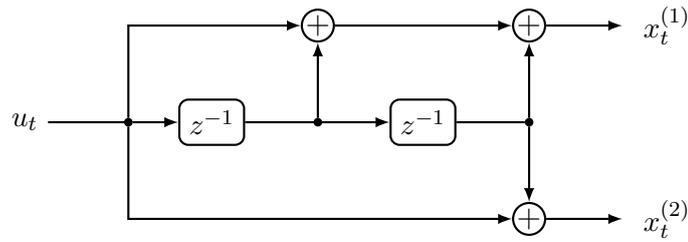
Lösung

- Pro Takt wird $k = 1$ Eingangsbit und $n = 2$ Ausgangsbits verarbeitet. Die Coderate ergibt sich zu $r = \frac{k}{n} = \frac{1}{2}$. Die Einflusslänge beschreibt, von wie vielen Bits die Ausgangsbits beeinflusst werden. Da es 4 Zustände gibt, befinden sich $\log_2(4) = 2$ Bits im Speicher des Encoders. Somit ergibt sich die Einflusslänge zu 3, die Ausgangsbits hängen vom Eingangsbit sowie den zwei in den Speichergliedern gespeicherten Bits ab.
- Um die Generatorpolynome zu ermitteln wird das Schieberegister mit $(v_1, v_2) = (0, 0)$ initialisiert und durch Eingabe von $\mathbf{u} = (1 \ 0 \ 0)$ die Impulsantwort des Encoder bestimmt. Aus dem Zustandsdiagramm können die Ausgangsbitfolgen $\mathbf{x}^{(1)} = (1 \ 1 \ 1)$ und $\mathbf{x}^{(2)} = (1 \ 0 \ 1)$ abgelesen werden. Da durch Eingabe von \mathbf{u} immer genau ein "erzeugendes" Bit eins ist, können direkt die Generatorpolynome ausgelesen werden:

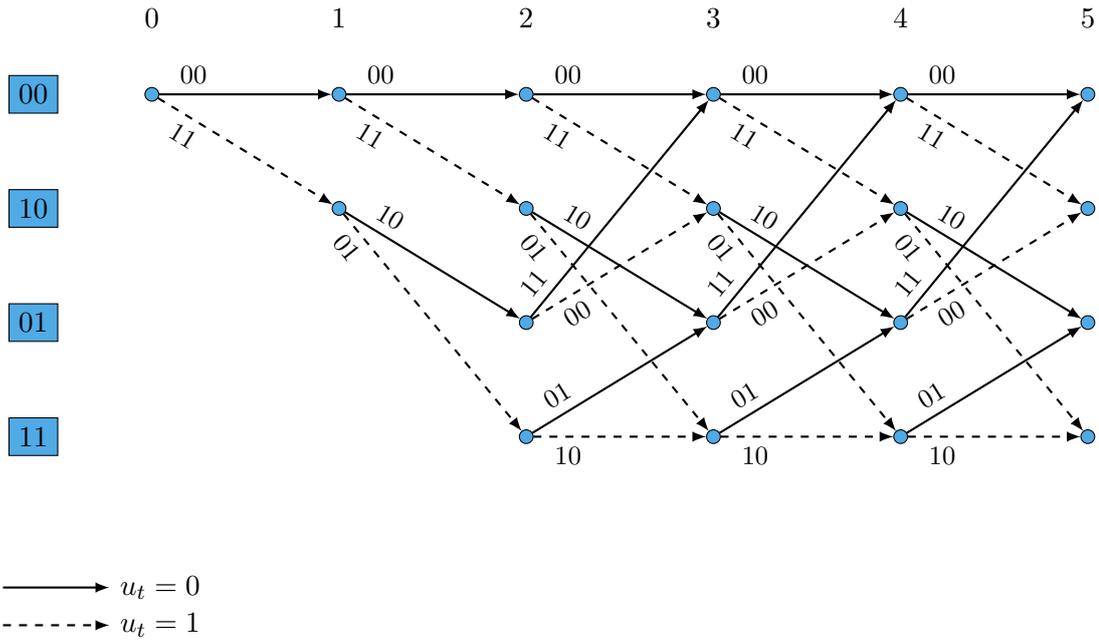
$$g_1(x) = 1 + x + x^2,$$

$$g_2(x) = 1 + x^2.$$

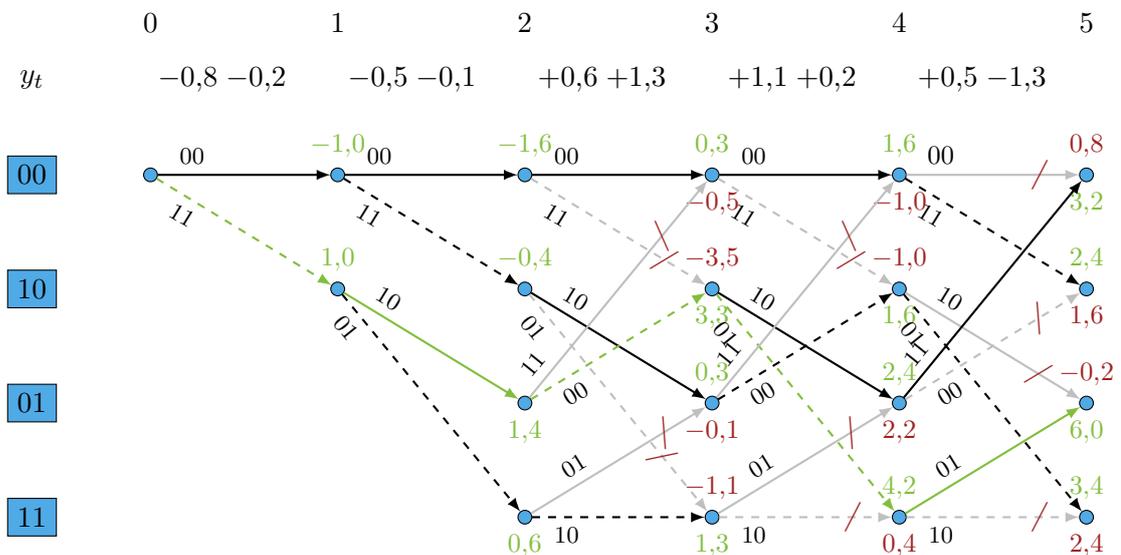
- Aus den Generatorpolynomen ergibt sich die Schieberegisterdarstellung zu:



d) Das Trellis-Diagramm für die ersten 5 Taktschritte ergibt sich zu:



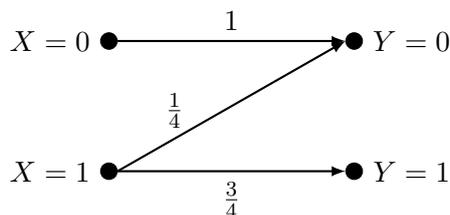
e) Da die Bits vor Übertragung über den AWGN-Kanal BPSK moduliert werden und eine Soft-Decision genutzt werden soll, kann $\sum_i (-1)^{x_i} \cdot r_i$ als Pfadmetrik genutzt werden, wobei r_i das i -te Empfangssymbol und x_i das i -te Bit des betrachteten Pfades darstellt. Die Verwendung des Soft-Decision Viterbi-Algorithmus ergibt:



Die am wahrscheinlichsten gesendete Codebitfolge ist $\hat{\mathbf{x}} = (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1)$
und die Informationsbitfolge $\hat{\mathbf{u}} = (1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0)$.

Aufgabe 7 (17 Punkte)

Gegeben sei der folgende Kanal, wobei die Werte an den Kanalübergängen die Übergangswahrscheinlichkeiten $P(Y = y|X = x)$ bezeichnen:



Die Auftretenswahrscheinlichkeit einer gesendeten "1" beträgt $u := P(X = 1)$ und somit ist $P(X = 0) = 1 - u$.

- Berechnen Sie $P(Y = 0)$ und $P(Y = 1)$ in Abhängigkeit von u . (2 Punkte)
- Berechnen Sie die Entropie $H(Y)$ in Abhängigkeit von u . (2 Punkte)
- Berechnen Sie die bedingte Entropie $H(Y|X)$. (4 Punkte)
- Zeigen Sie, dass die Kanalkapazität für $u = \frac{4}{3+4 \cdot 2^{2/3}}$ erreicht wird und berechnen Sie diese. (7 Punkte)
- Können Sie über den gegebenen Kanal bei 1000 Kanalnutzungen 600 Bit Information mit beliebig kleiner Fehlerrate übertragen? Begründen Sie. (2 Punkte)

Lösung

- Es ist mit Marginalisierung und dem Satz von Bayes

$$\begin{aligned}
 P(Y = 0) &= P(X = 0, Y = 0) + P(X = 1, Y = 0) \\
 &= P(Y = 0|X = 0)P(X = 0) + P(Y = 0|X = 1)P(X = 1) \\
 &= 1 \cdot (1 - u) + \frac{1}{4} \cdot u \\
 &= 1 - \frac{3u}{4}
 \end{aligned}$$

und außerdem

$$P(Y = 1) = 1 - P(Y = 0) = \frac{3u}{4}.$$

Alternativ lässt sich $P(Y = 1)$ auch wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
 P(Y = 1) &= P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 1) \\
 &= P(Y = 1|X = 0)P(X = 0) + P(Y = 1|X = 1)P(X = 1) \\
 &= 0 \cdot (1 - u) + \frac{3}{4}u \\
 &= \frac{3u}{4}
 \end{aligned}$$

- Die Entropie lässt sich direkt aus $P(Y)$ berechnen:

$$\begin{aligned}
 H(Y) &= - \sum_y P(Y = y) \log_2(P(Y = y)) \\
 &= - \left(1 - \frac{3u}{4}\right) \log_2\left(1 - \frac{3u}{4}\right) - \frac{3u}{4} \log_2\left(\frac{3u}{4}\right)
 \end{aligned}$$

c) Die bedingte Entropie ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
H(Y|X) &= - \sum_x \sum_y P(X=x, Y=y) \log_2(P(Y=y|X=x)) \\
&= - \sum_x \sum_y P(Y=y|X=x) P(X=x) \log_2(P(Y=y|X=x)) \\
&= -P(Y=0|X=0)P(X=0) \log_2(P(Y=0|X=0)) \\
&\quad - P(Y=0|X=1)P(X=1) \log_2(P(Y=0|X=1)) \\
&\quad - P(Y=1|X=0)P(X=0) \log_2(P(Y=1|X=0)) \\
&\quad - P(Y=1|X=1)P(X=1) \log_2(P(Y=1|X=1)) \\
&= 1 \cdot (1-u) \log_2(1) - \frac{u}{4} \log_2\left(\frac{1}{4}\right) - 0 \cdot (1-u) \log_2(0) - \frac{3u}{4} \log_2\left(\frac{3}{4}\right) \\
&= 0 - \frac{u}{4}(-2) - 0 - \frac{3u}{4} \log_2\left(\frac{3}{4}\right) \\
&= \frac{u}{2} - \frac{3u}{4} \log_2\left(\frac{3}{4}\right)
\end{aligned}$$

d) Die Transinformation ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
I(X; Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\
&= - \left(1 - \frac{3u}{4}\right) \log_2\left(1 - \frac{3u}{4}\right) - \frac{3u}{4} \log_2\left(\frac{3u}{4}\right) - \left(\frac{u}{2} - \frac{3u}{4} \log_2\left(\frac{3}{4}\right)\right).
\end{aligned}$$

Um die Kapazität zu bestimmen, muss $I(X; Y)$ über alle möglichen Eingangsverteilungen maximiert werden:

$$C = \max_{P(X)} I(X; Y) = \max_u I(X; Y),$$

d.h. wir müssen $I(X; Y)$ über u maximieren. Wir bilden dazu die Ableitung nach u

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du} I(X; Y) &= \frac{d}{du} \left(- \left(1 - \frac{3u}{4}\right) \log_2\left(1 - \frac{3u}{4}\right) - \frac{3u}{4} \log_2\left(\frac{3u}{4}\right) - \left(\frac{u}{2} - \frac{3u}{4} \log_2\left(\frac{3}{4}\right)\right) \right) \\
&= \left(1 - \frac{3u}{4}\right) \frac{\frac{3}{4} \log_2(e)}{1 - \frac{3u}{4}} + \frac{3}{4} \log_2\left(1 - \frac{3u}{4}\right) - \frac{3u}{4} \frac{\frac{3}{4} \log_2(e)}{\frac{3u}{4}} - \frac{3}{4} \log_2\left(\frac{3u}{4}\right) \\
&\quad - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \log_2\left(\frac{3}{4}\right) \\
&= \frac{3 \log_2(e)}{4} + \frac{3}{4} \log_2\left(1 - \frac{3u}{4}\right) - \frac{3 \log_2(e)}{4} - \frac{3}{4} \log_2\left(\frac{3u}{4}\right) - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \log_2\left(\frac{3}{4}\right) \\
&= \frac{3}{4} \log_2\left(\frac{1 - \frac{3u}{4}}{\frac{3u}{4}}\right) - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \log_2\left(\frac{3}{4}\right) \\
&\stackrel{!}{=} 0.
\end{aligned}$$

Wir können nun zeigen, dass für $u = \frac{4}{3+4 \cdot 2^{2/3}}$ die Kapazität erreicht wird, indem wir zeigen, dass für $u = \frac{4}{3+4 \cdot 2^{2/3}}$ ein Extremwert vorliegt:

$$\left. \frac{d}{du} I(X; Y) \right|_{u=\frac{4}{3+4 \cdot 2^{2/3}}} = \frac{3}{4} \log_2\left(\frac{1 - \frac{3u}{4}}{\frac{3u}{4}}\right) - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \log_2\left(\frac{3}{4}\right) \Big|_{u=\frac{4}{3+4 \cdot 2^{2/3}}} = 0.$$

Zur Vollständigkeit müssen wir noch überprüfen, ob das Extremum ein Maximum ist:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{du^2} I(X; Y) &= \frac{d}{du} \left(\frac{3}{4} \log_2 \left(\frac{1 - \frac{3u}{4}}{\frac{3u}{4}} \right) - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \log_2 \left(\frac{3}{4} \right) \right) \\
 &= \frac{d}{du} \left(\frac{3}{4} \log_2 \left(1 - \frac{3u}{4} \right) - \frac{3}{4} \log_2 \left(\frac{3u}{4} \right) \right) \\
 &= \frac{3 - \frac{3}{4} \log_2(e)}{4 \cdot 1 - \frac{3u}{4}} - \frac{3 \frac{3}{4} \log_2(e)}{4 \cdot \frac{3u}{4}} \\
 &= -\frac{9}{16} \log_2(e) \left(\frac{1}{1 - \frac{3u}{4}} + \frac{1}{\frac{3u}{4}} \right) \\
 &< 0, \quad \text{da } 0 \leq u \leq 1.
 \end{aligned}$$

$I(X; Y)$ ist demzufolge konkav und hat für $u = \frac{4}{3+4 \cdot 2^{2/3}}$ ein echtes Maximum.

Die Kapazität berechnet sich mit $u = \frac{4}{3+4 \cdot 2^{2/3}}$ zu

$$\begin{aligned}
 C &= - \left(1 - \frac{3u}{4} \right) \log_2 \left(1 - \frac{3u}{4} \right) - \frac{3u}{4} \log_2 \left(\frac{3u}{4} \right) - \left(\frac{u}{2} - \frac{3u}{4} \log_2 \left(\frac{3}{4} \right) \right) \Bigg|_{u=\frac{4}{3+4 \cdot 2^{2/3}}} \\
 &\approx 0,5582 \frac{\text{bit}}{\text{Kanalzugriff}}.
 \end{aligned}$$

e) Da

$$0,5582 \text{ bit/Kanalzugriff} \cdot 1000 \text{ Kanalzugriffe} = 558,2 \text{ bit} < 600 \text{ bit},$$

ist es nicht möglich mit 1000 Kanalzugriffen 600 Bit mit beliebig kleiner Fehlerrate zu übertragen.

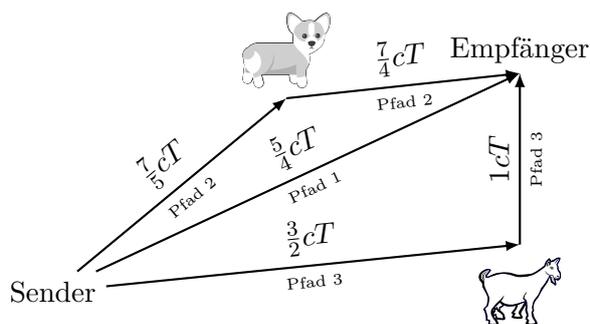
Aufgabe 8 (11 Punkte)

In der Nachrichtentechnik werden, um Informationen zwischen Sender und Empfänger über Kanäle zu übertragen, Übertragungssysteme entworfen.

- Gegeben sind drei Übertragungssysteme: WLAN, Festplatte und DSL-Anschluss eines Wohnhauses. Nennen Sie jeweils den Kanaltyp und eine typische Störung, die bei diesem Kanaltyp auftritt. (3 Punkte)
- Geben Sie das statistische Signalmodell eines Kanals mit Mehrwege-Ausbreitung ohne Sichtverbindung an und begründen Sie. (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

Ein Kanal mit Mehrwege-Ausbreitung wird vermessen. Es werden drei signifikante Pfade zwischen Sender und Empfänger gemessen. Das Übertragungsszenario sowie die Parameter der einzelnen Pfade sind in der folgenden Zeichnung und Tabelle angegeben. Die Werte in der Skizze bezeichnen dabei die Längen der einzelnen (Teil-)Pfade. Die zugehörigen Phasendrehungen und Dämpfungen sind in der Tabelle angegeben, wobei Phasendrehungen durch Reflexionen inkludiert sind.



Pfad	Leistungs- dämpfung (dB)	Phase (°)
1	1,00	90
2	6,02	-45
3	3,01	180

Hierbei ist c die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle und T die Symboldauer.

- Berechnen Sie die Verzögerungen der einzelnen Pfade in Abhängigkeit von der Symboldauer T . Welches Problem wird bei diesem Kanal auftreten? Begründen Sie kurz! (3 Punkte)
- Der Kanal werde mit der zwanzigfachen Symbolrate abgetastet. Zeichnen Sie das dem Kanal äquivalente FIR-Filter. Beschriften Sie Ihre Skizze mit den komplexen Filterkoeffizienten in Real- und Imaginärteil. Geben Sie gegebenenfalls notwendige Berechnungen an. (3 Punkte)

Lösung

- Beispielsweise können folgende Kanäle genannt werden:

Übertragungssystem	Kanal	Typische Störung
WLAN	Freiraum/Luft/EM-Wellen	Reflexionen/Mehrwegeausbreitung oder Dämpfung
Festplatte	magnetische rotierende Platten	Bit-Flip, Auslesefehler
DSL-Anschluss	Kupferkabel/Telefonkabel	Dämpfung/Reflexionen im Kabel

- b) Das statische Modell eines Mehrwegekanals ohne Sichtverbindung kann anhand der Wahrscheinlichkeitsverteilung von Amplituden und Phasenverschiebung der einzelnen Pfade beschrieben werden.

Die Phasenverschiebung besitzt eine Gleichverteilung in $[0, 2\pi]$ und die Amplituden besitzen eine Rayleighverteilung.

Bei Mehrwegeausbreitung ohne Sichtverbindung ergibt sich ein komplexer Kanal mit Normalverteilung auf I - und Q -Komponente.

$$I, Q \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{I,Q}(i, q) = f_I(i) \cdot f_Q(q) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{i^2+q^2}{2\sigma^2}}$ kann mit Hilfe des Transformationssatzes für Wahrscheinlichkeitsdichten zu der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsdichte für Amplitude und Phase umgewandelt werden:

$$f_{A,\Phi}(a, \phi) = \frac{a}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}$$

Ohne weitere Rechnung kann schon aus dieser gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsdichte die Gleichverteilung über die Phase und eine Rayleighverteilung über die Amplitude geschlussfolgert werden.

- c) Die Verzögerung der einzelnen Pfade berechnet sich über $\Delta t = \frac{\Delta s}{c}$.

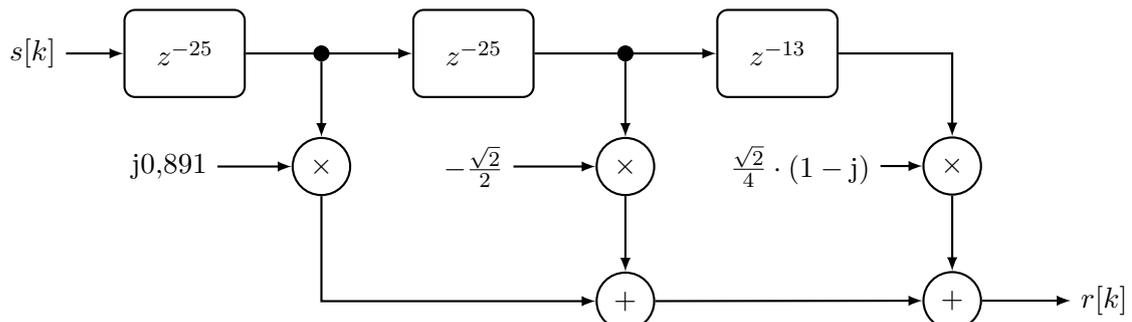
Pfad i	1	2	3
Verzögerung Δt_i	$\frac{5}{4}T$	$\frac{63}{20}T$	$\frac{5}{2}T$

Der Laufzeitunterschied zweier Pfade i und j ist durch $\tau_{ij} = |\Delta t_i - \Delta t_j|$ gegeben, wobei $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$. Der maximale Laufzeitunterschied des gegebenen Kanals ist $\max_{i,j} \tau_{i,j} = \tau_{31} = \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{4}\right)T = \frac{5}{4}T$. Somit ist der größte Laufzeitunterschied zweier Pfade größer als die Symboldauer, $\tau_{31} > T$ und es entsteht Inter-Symbol-Interferenz (ISI) am Empfänger.

- d) Berechnung der Pfadlängen und Kanalkoeffizienten ergibt:

Pfad	1	2	3
Zeitverzögerung Δt	$\frac{5}{4}T = \frac{25}{20}T$	$\frac{63}{20}T$	$\frac{5}{2}T = \frac{50}{20}T$
Amplitudenskalierung α	$\sqrt{10^{-1/10}} = 0,891$	$\sqrt{10^{-6,02/10}} = \frac{1}{2}$	$\sqrt{10^{-3,01/10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
Kanalkoeffizient h	$j0,891$	$\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (1 - j)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Aus der Zeitverzögerung Δt und dem komplexen Kanalkoeffizienten h lässt sich folgendes FIR-Filter Modell des Kanals erstellen:



Aufgabe 9 (13 Punkte)

Sie betrachten ein MIMO-System mit der folgenden Singulärwertzerlegung

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Kanalmatrix ergibt sich durch $\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^H$.

- Bestimmen Sie die Anzahl an Sende- und Empfängerantennen N_T und N_R und begründen Sie. (2 Punkte)
- Bestimmen Sie die Kanalmatrix \mathbf{H} . (2 Punkte)
- Die Kanalmatrix steht nur dem Empfänger zur Verfügung. Sie empfangen nun

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 + j \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Schätzen Sie den Sendevektor $\hat{\mathbf{s}}$ mittels Zero-Forcing Detektion. (4 Punkte)

- Bestimmen Sie die Kapazität dieses Kanals für $\text{SNR} = 5$ dB. (3 Punkte)
- Ein SISO-System soll die gleiche Kapazität erreichen. Wie hoch sollte das SNR des SISO-Systems sein? Geben Sie das SNR in dB an. (2 Punkte)

Lösung

- Wegen $\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^H$ besitzt die Kanalmatrix \mathbf{H} die Dimension 3×2 . Es gibt dann $N_T = 2$ Sendeantennen und $N_R = 3$ Empfangsantennen.
- Die Kanalmatrix bestimmen wir durch Einsetzen von \mathbf{U} , $\mathbf{\Lambda}$ und \mathbf{V}

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- Zuerst bestimmen wir die Matrix \mathbf{L}_{ZF} :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{ZF} &= (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \\ &= (\mathbf{\Lambda}^H \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{H}^H \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die gesendeten Symbole lassen sich schätzen durch

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}} &= \mathbf{L}_{ZF} \mathbf{r} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + j \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4}j \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

d) Die Kanalkapazität ergibt sich durch

$$\begin{aligned} C_0 &= \log_2 \left(\det \left(\mathbf{I}_{N_R} + \frac{\text{SNR}}{N_T} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^2 \log_2 \left(1 + \frac{\text{SNR}}{N_T} \cdot \lambda_i \right) \\ &= \log_2 \left(1 + \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot 4 \right) + \log_2 \left(1 + \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot 1 \right) \\ &\approx 4,24. \end{aligned}$$

e) Für die Kapazität eines SISO-Systems gilt

$$\begin{aligned} C_{0,\text{SISO}} &= \log_2(1 + \text{SNR}) \\ \Rightarrow \text{SNR} &= 2^{C_{0,\text{SISO}}} - 1 \approx 17,91 = 12,53 \text{ dB}. \end{aligned}$$

Formelsammlung und Tabellen

A Tabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$								
0,00	0,500000	0,80	0,788145	1,60	0,945201	2,40	0,991802	3,20	0,999313
0,02	0,507978	0,82	0,793892	1,62	0,947384	2,42	0,992240	3,22	0,999359
0,04	0,515953	0,84	0,799546	1,64	0,949497	2,44	0,992656	3,24	0,999402
0,06	0,523922	0,86	0,805105	1,66	0,951543	2,46	0,993053	3,26	0,999443
0,08	0,531881	0,88	0,810570	1,68	0,953521	2,48	0,993431	3,28	0,999481
0,10	0,539828	0,90	0,815940	1,70	0,955435	2,50	0,993790	3,30	0,999517
0,12	0,547758	0,92	0,821214	1,72	0,957284	2,52	0,994132	3,32	0,999550
0,14	0,555670	0,94	0,826391	1,74	0,959070	2,54	0,994457	3,34	0,999581
0,16	0,563559	0,96	0,831472	1,76	0,960796	2,56	0,994766	3,36	0,999610
0,18	0,571424	0,98	0,836457	1,78	0,962462	2,58	0,995060	3,38	0,999638
0,20	0,579260	1,00	0,841345	1,80	0,964070	2,60	0,995339	3,40	0,999663
0,22	0,587064	1,02	0,846136	1,82	0,965621	2,62	0,995604	3,42	0,999687
0,24	0,594835	1,04	0,850830	1,84	0,967116	2,64	0,995855	3,44	0,999709
0,26	0,602568	1,06	0,855428	1,86	0,968557	2,66	0,996093	3,46	0,999730
0,28	0,610261	1,08	0,859929	1,88	0,969946	2,68	0,996319	3,48	0,999749
0,30	0,617911	1,10	0,864334	1,90	0,971283	2,70	0,996533	3,50	0,999767
0,32	0,625516	1,12	0,868643	1,92	0,972571	2,72	0,996736	3,52	0,999784
0,34	0,633072	1,14	0,872857	1,94	0,973810	2,74	0,996928	3,54	0,999800
0,36	0,640576	1,16	0,876976	1,96	0,975002	2,76	0,997110	3,56	0,999815
0,38	0,648027	1,18	0,881000	1,98	0,976148	2,78	0,997282	3,58	0,999828
0,40	0,655422	1,20	0,884930	2,00	0,977250	2,80	0,997445	3,60	0,999841
0,42	0,662757	1,22	0,888768	2,02	0,978308	2,82	0,997599	3,62	0,999853
0,44	0,670031	1,24	0,892512	2,04	0,979325	2,84	0,997744	3,64	0,999864
0,46	0,677242	1,26	0,896165	2,06	0,980301	2,86	0,997882	3,66	0,999874
0,48	0,684386	1,28	0,899727	2,08	0,981237	2,88	0,998012	3,68	0,999883
0,50	0,691463	1,30	0,903200	2,10	0,982136	2,90	0,998134	3,70	0,999892
0,52	0,698468	1,32	0,906582	2,12	0,982997	2,92	0,998250	3,72	0,999900
0,54	0,705401	1,34	0,909877	2,14	0,983823	2,94	0,998359	3,74	0,999908
0,56	0,712260	1,36	0,913085	2,16	0,984614	2,96	0,998462	3,76	0,999915
0,58	0,719043	1,38	0,916207	2,18	0,985371	2,98	0,998559	3,78	0,999922
0,60	0,725747	1,40	0,919243	2,20	0,986097	3,00	0,998650	3,80	0,999928
0,62	0,732371	1,42	0,922196	2,22	0,986791	3,02	0,998736	3,82	0,999933
0,64	0,738914	1,44	0,925066	2,24	0,987455	3,04	0,998817	3,84	0,999938
0,66	0,745373	1,46	0,927855	2,26	0,988089	3,06	0,998893	3,86	0,999943
0,68	0,751748	1,48	0,930563	2,28	0,988696	3,08	0,998965	3,88	0,999948
0,70	0,758036	1,50	0,933193	2,30	0,989276	3,10	0,999032	3,90	0,999952
0,72	0,764238	1,52	0,935745	2,32	0,989830	3,12	0,999096	3,92	0,999956
0,74	0,770350	1,54	0,938220	2,34	0,990358	3,14	0,999155	3,94	0,999959
0,76	0,776373	1,56	0,940620	2,36	0,990862	3,16	0,999211	3,96	0,999963
0,78	0,782305	1,58	0,942947	2,38	0,991344	3,18	0,999264	3,98	0,999966

B Folgen und Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1 \quad (\text{B.1})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{für } |x| < 1 \quad (\text{B.2})$$

$$\sum_{n=0}^k x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \quad \text{für } x \neq 1 \quad (\text{B.3})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \dots = (1+x)^r \quad \text{für } \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \dots = e^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \quad (\text{B.5})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1-x)^n}{n} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \dots = \ln(x) \quad \text{für } 0 < x \leq 2 \quad (\text{B.6})$$

$$\sum_{n=1}^k n = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (\text{B.7})$$

C Integralrechnung

$$\int \delta(x-x_0) \varphi(x) dx = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad (\text{C.1})$$

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) \quad (\text{C.2})$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^3} (a^2 x^2 - 2ax + 2) \quad (\text{C.3})$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{C.4})$$

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) \quad (\text{C.5})$$

$$\int \sin(ax) \cos(ax) dx = -\frac{\cos^2(ax)}{2a} \quad \text{für } a \neq 0 \quad (\text{C.6})$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{für } a > 0, n \in \mathbb{N} \quad (\text{C.7})$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \quad \text{für } a > 0 \quad (\text{C.8})$$

D Formeln zur Fouriertransformation

Definition

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad \circ \bullet \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = X(f) \quad (\text{D.1})$$

Eigenschaften

$$\sum c_i x_i(t) \quad \longleftrightarrow \quad \sum c_i X_i(f) \quad (\text{D.2})$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \quad \longleftrightarrow \quad (j2\pi f)^n X(f) \quad (\text{D.3})$$

$$x(t - t_0) \quad \longleftrightarrow \quad e^{-j2\pi f t_0} X(f) \quad (\text{D.4})$$

$$e^{j2\pi f_0 t} x(t) \quad \longleftrightarrow \quad X(f - f_0) \quad (\text{D.5})$$

$$x(t) * y(t) \quad \longleftrightarrow \quad X(f)Y(f) \quad (\text{D.6})$$

$$x(t)y(t) \quad \longleftrightarrow \quad X(f) * Y(f) \quad (\text{D.7})$$

$$x(t/a) \quad \longleftrightarrow \quad |a|X(af) \quad (\text{D.8})$$

Korrespondenzen

$$1 \quad \longleftrightarrow \quad \delta(f) \quad (\text{D.9})$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\delta(f + f_0) + \frac{1}{2}\delta(f - f_0) \quad (\text{D.10})$$

$$F \cdot \text{sinc}(Ft) = \frac{\sin(\pi Ft)}{\pi t} \quad \longleftrightarrow \quad X(f) = \begin{cases} 1 & \text{für } |f| < \frac{F}{2} \\ 0 & \text{für } |f| > \frac{F}{2} \end{cases} \quad (\text{D.11})$$

$$e^{-\pi t^2} \quad \longleftrightarrow \quad e^{-\pi f^2} \quad (\text{D.12})$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad T \cdot \text{sinc}(fT) = \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} \quad (\text{D.13})$$

$$\frac{1}{2}\delta(t + t_0) + \frac{1}{2}\delta(t - t_0) \quad \longleftrightarrow \quad \cos(2\pi f t_0) \quad (\text{D.14})$$

$$\delta(t) \quad \longleftrightarrow \quad 1 \quad (\text{D.15})$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{j}{2}\delta(f + f_0) - \frac{j}{2}\delta(f - f_0) \quad (\text{D.16})$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \quad (\text{D.17})$$

$$e^{-a|t|}, \quad a > 0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} \quad (\text{D.18})$$

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}, \quad a > 0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{a + j2\pi f} \quad (\text{D.19})$$

$$x(t) = \begin{cases} te^{-at} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}, \quad a > 0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{(a + j2\pi f)^2} \quad (\text{D.20})$$

$$\frac{1}{\pi t} \quad \longleftrightarrow \quad -j \text{sign}(f) \quad (\text{D.21})$$

$$j \text{sign}(t) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{\pi f} \quad (\text{D.22})$$

$$\mathcal{H}\{x(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\lambda)}{t - \lambda} d\lambda \quad \longleftrightarrow \quad -j \text{sign}(f)X(f) \quad (\text{D.23})$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) \quad (\text{D.24})$$

E Trigonometrie

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad (\text{E.1})$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad (\text{E.2})$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y)) \quad (\text{E.3})$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y)) \quad (\text{E.4})$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y)) \quad (\text{E.5})$$