

Schriftliche Prüfung zur Vorlesung
Nachrichtentechnik I
26.09.2023

Musterlösung

Hinweise

Die Prüfungsdauer beträgt **drei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **neun** Aufgaben zu bearbeiten.

Benutzen Sie nur die zur Verfügung gestellten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an.

Verwenden Sie zur Bearbeitung einen **dokumentenechten Stift** und keine rote Farbe. Schreiben Sie leserlich und vermeiden Sie, das vorgedruckte Doppelblatt zu beschriften. Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der Lösungsweg und die gültige Lösung eindeutig erkennbar sein, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann.

Abzugeben sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten und **nach Aufgabennummer sortierten Ausarbeitungen**. Nicht abzugeben sind die Aufgabenblätter, Ihre Formelsammlung sowie Ihr Konzeptpapier.

Zugelassene Hilfsmittel

Erlaubt sind **ein** beidseitig von eigener Hand mit Bleistift, Kugelschreiber, Füller o. Ä. beschriebenes **A4-Blatt** (Original, keine Kopie) sowie ein **nicht-programmierbarer** Taschenrechner.

Nach der Prüfung

Das **Ergebnis** Ihrer Prüfung erfahren Sie spätestens ab dem **24.10.2023** im Online-Notensystem. Details zur **Klausureinsicht** finden Sie auf Ilias. Dort werden Sie auch weitere Informationen zur **mündlichen Nachprüfung** finden.

Geben Sie diese Aufgaben nicht mit ab, sondern behalten Sie diese als Erinnerung für oben gegebene Termine.

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Sie betrachten einen gleichförmigen Quantisierer mit $w = 4$ Quantisierungsbits. Das Eingangssignal $B \in \mathbb{R}$ sei mittelwertfrei und im Intervall $[-4, 4]$ gleichverteilt, der Quantisierungsfehler ist somit auch gleichverteilt.

- Berechnen Sie das Signal-Rausch-Verhältnis (SNR) bei Quantisierung des Eingangssignals. Geben Sie das SNR sowohl als lineare Größe als auch in dB an. (5 Punkte)
- Geben Sie das zu erwartende SNR in dB an, wenn $w = 6$ Quantisierungsbits genutzt werden. Begründen Sie Ihr Vorgehen. (2 Punkte)

Sie nutzen nun $w = 4$ Quantisierungsbits. Die quantisierten Werte \bar{b} des Eingangssignals stellen im Folgenden Quellsymbole X dar, welchen Sie mit dem Huffman-Verfahren Codebits zuweisen möchten.

- Berechnen Sie die Entropie der Quelle. (2 Punkte)
- Geben Sie die Redundanz der Huffman-Codierung an und begründen Sie kurz. (2 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

Beim Auslesen eines Datenträgers stellen Sie fest, dass die Daten mittels des LZ77-Verfahrens komprimiert wurden. Sie lesen folgende Daten aus:

$$s_1 = [0, 0, „1“], s_2 = [0, 0, „0“], s_3 = [2, 1, „1“], s_4 = [4, 3, „0“], s_5 = [3, 5, „1“], \\ s_6 = [4, 2, „0“], s_7 = [16, 4, „1“], s_8 = [4, 4, „0“], s_9 = [11, 3, „EOF“],$$

- Rekonstruieren Sie die Daten. (4 Punkte)

Lösung

- Die Verteilungsdichte des Eingangssignals B bestimmt sich mit $b_{\max} = 4$ zu

$$f_B(b) = \begin{cases} \frac{1}{2b_{\max}} & \text{für } -b_{\max} \leq b \leq b_{\max} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad f_B(b) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{für } -4 \leq b \leq 4 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und somit die Signalleistung als das zweite Moment zu

$$S = \mathbb{E} \{ B^2 \} = \int_{-b_{\max}}^{b_{\max}} \frac{1}{2b_{\max}} b^2 db = \frac{2}{2b_{\max}} \int_0^{b_{\max}} b^2 db = \frac{1}{3} b_{\max}^2 = \frac{16}{3}$$

Alternativ kann S über den Formfaktor der Gleichverteilung $F = \frac{1}{3}$ zu $S = F b_{\max}^2 = \frac{16}{3}$ bestimmt werden.

Die Quantisierungsrauschleistung N_Q ergibt sich in diesem Fall zu

$$N_Q = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{\left(\frac{2b_{\max}}{2^w}\right)^2}{12} = \frac{\left(\frac{2 \cdot 4}{2^4}\right)^2}{12} = \frac{\frac{1}{4}}{12} = \frac{1}{48}$$

bestimmt werden.

Das SNR ergibt sich zu

$$\text{SNR} = \frac{S}{N_Q} = \frac{\left(\frac{16}{3}\right)}{\left(\frac{1}{48}\right)} = 256 \quad \text{sowie} \quad \text{SNR} \Big|_{\text{dB}} = 10 \log_{10}(\text{SNR}) \approx 24,082 \text{ dB}$$

Alternative: Über die 6-dB-pro-Bit-Regel ergibt sich

$$\text{SNR} \Big|_{\text{dB}} \approx w \cdot 6,02 = 24,08 \text{ dB} \quad \text{bzw.} \quad \text{SNR} = 255,86$$

- b) Gemäß der 6-dB-pro-Bit-Regel ist das SNR proportional zur Anzahl w der Quantisierungsbits: $\text{SNR}\Big|_{\text{dB}} = w \cdot 6,02 \text{ dB}$. Da sich für $w = 4$ ein $\text{SNR}\Big|_{\text{dB}} (w = 4) \approx 24,082 \text{ dB}$ ergibt, bestimmt sich für $w = 6$ das SNR zu:

$$\text{SNR}\Big|_{\text{dB}} (w = 6) = \text{SNR}\Big|_{\text{dB}} (w = 4) + 2 \cdot 6,02 \text{ dB} \approx 36,122 \text{ dB}$$

- c) Da der Quantisierer $w = 4$ Quantisierungsbits besitzt, existieren $K = 2^w = 16$ mögliche Quantisierungsniveaus. Das gleichverteilte Eingangssignal B führt zu gleichverteilten Quantisierungsniveaus, d.h. die Auftretenswahrscheinlichkeit der Quellsymbole X ergibt sich zu $P_X(x) = \frac{1}{K} = \frac{1}{16}$. Es ergibt sich für die Entropie $H(X)$ der Quelle:

$$\begin{aligned} H(X) &= - \sum_{i=1}^K P_X(x_i) \log_2(P_X(x_i)) \\ &= -K \cdot \frac{1}{K} \cdot \log_2\left(\frac{1}{K}\right) \\ &= \log_2(K) \\ &= 4 \frac{\text{Bit}}{\text{Symbol}}. \end{aligned}$$

- d) Da alle $K = 16$ Codewörter gleichverteilt sind wird die Huffmancodierung jedem Codewort $\log_2(K) = 4$ Bit zuweisen. Die mittlere Codewortlänge ergibt sich zu $L_C = 4 \text{ Bit/Symbol}$. Für die Redundanz des Codes ergibt sich:

$$R_C = H(X) - L_C = 0 \frac{\text{Bit}}{\text{Symbol}}.$$

- e) In folgender Tabelle stehen die je Tupel rekonstruierten Daten:

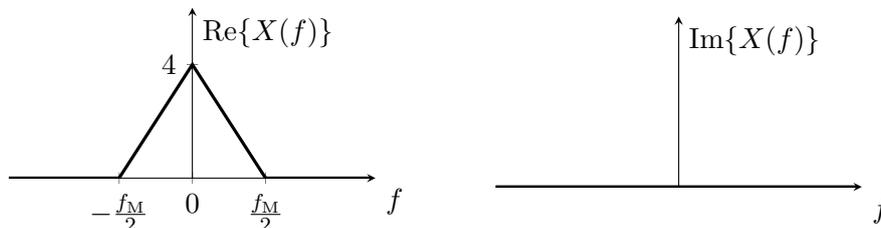
	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9
□	1	0	11	1010	010011	000	01111	11110	001

Es ergibt sich als Datenfolge:

1 0 1 1 1 0 1 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1

Aufgabe 2 (18 Punkte)

Das Spektrum $X(f)$ eines Zeitsignals $x(t)$ ist durch die folgende Abbildung gegeben:

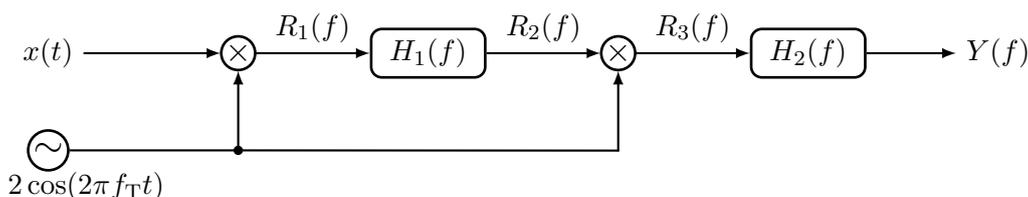


- a) Ist $x(t)$ rein reellwertig? Begründen Sie. (2 Punkte)
 b) Bestimmen Sie $x(t)$. (4 Punkte)

Das Signal $x(t)$ wird nun durch das in der nächsten Abbildung dargestellte System verarbeitet. Es besteht aus zwei Tiefpassfiltern H_1 und H_2 , welche die Frequenzgänge $H_1(f) = \text{rect}_{f_1}(f)$ und $H_2(f) = \text{rect}_{f_2}(f)$ besitzen, wobei $f_1 = 12 \text{ MHz}$, $f_2 = 6 \text{ MHz}$ und

$$\text{rect}_F(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leq \frac{F}{2} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad F \in \mathbb{R}.$$

Der Oszillator besitzt die Frequenz $f_T = 8 \text{ MHz}$.



- c) Skizzieren Sie die Spektren $R_1(f)$, $R_2(f)$, $R_3(f)$, sowie $Y(f)$, wenn $f_M = 8 \text{ MHz}$. Verwenden Sie dazu das bereitgestellte Blatt und geben Sie dieses mit Ihren Arbeitsblättern ab. (8 Punkte)
 d) Berechnen Sie die Energie E des Signals $y(t)$. Sie dürfen hierzu Ihre Skizze aus dem vorherigen Aufgabenteil verwenden. (4 Punkte)

Lösung

- a) Ja, $x(t)$ ist rein reellwertig.
 Für das Spektrum rein reellwertiger Signale muss $\text{Re}\{X(f)\} = \text{Re}\{X(-f)\}$ und weiterhin $-\text{Im}\{X(f)\} = \text{Im}\{X(-f)\}$ gelten. Da $\text{Re}\{X(f)\}$ gerade und $\text{Im}\{X(f)\}$ ungerade ist, ist $x(t) \in \mathbb{R}$.
 b) Das Spektrum kann als Faltung zweier Rechtecke der Breite $\frac{f_M}{2}$ beschrieben werden, wobei wir noch einen unbekanntem Faktor $A \in \mathbb{R}$ suchen, der $\text{Re}\{X(f=0)\} = 4$ bzw.

$X(f = 0) = 4$ erfüllt:

$$\begin{aligned} X(f) &= A \left(\text{rect}_{\frac{f_M}{2}}(f) * \text{rect}_{\frac{f_M}{2}}(f) \right) \\ &= A \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}_{\frac{f_M}{2}}(\nu) \cdot \text{rect}_{\frac{f_M}{2}}(f - \nu) d\nu \end{aligned}$$

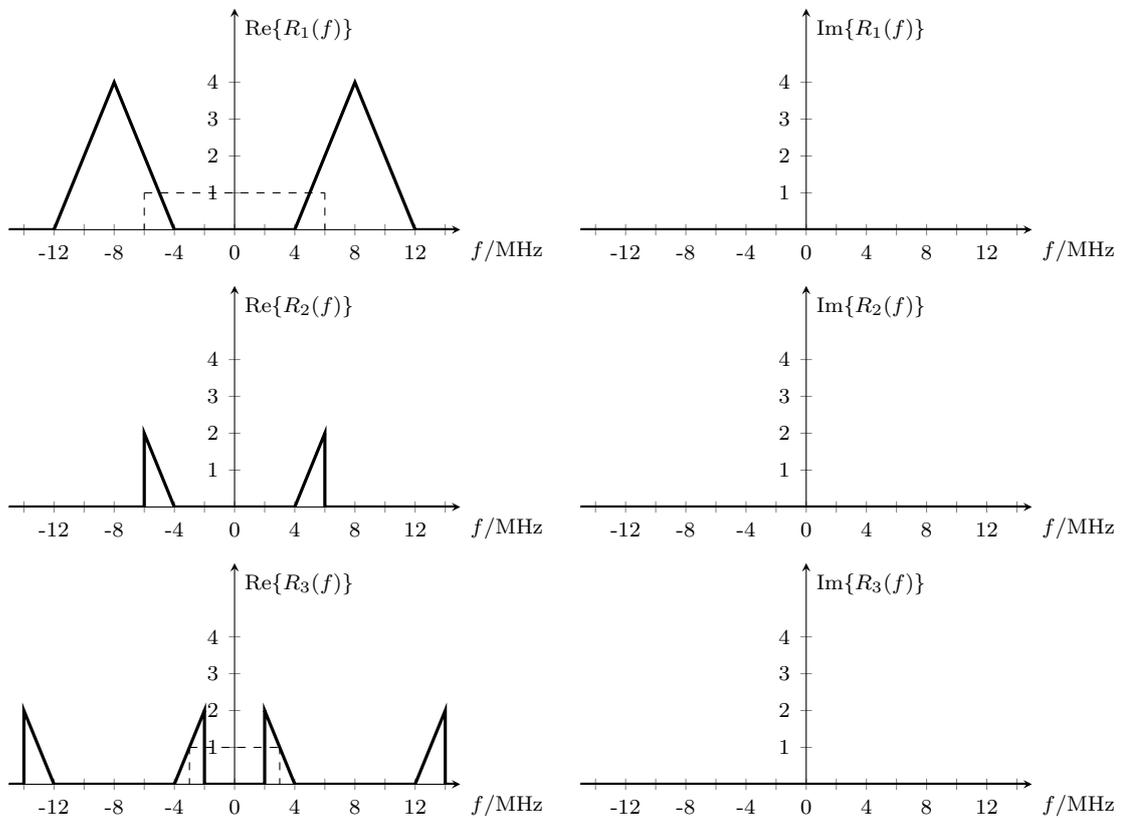
$$X(f = 0) = A \int_{-\frac{f_M}{4}}^{\frac{f_M}{4}} d\nu = A \frac{f_M}{2} \stackrel{!}{=} 4$$

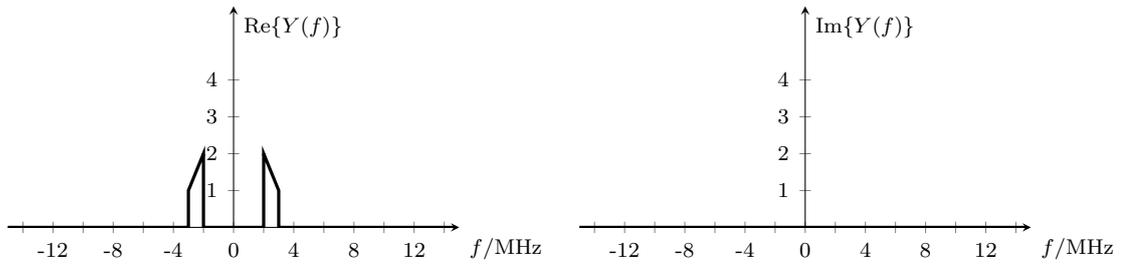
$$\Rightarrow A = \frac{8}{f_M}$$

Über die Fouriertransformation und (D.6) sowie (D.11) aus der Formelsammlung folgt:

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{8}{f_M} \left(\text{rect}_{\frac{f_M}{2}}(f) * \text{rect}_{\frac{f_M}{2}}(f) \right) \\ &\quad \circ \\ x(t) &= \frac{8}{f_M} \left(\frac{f_M}{2} \text{sinc} \left(\frac{f_M}{2} t \right) \cdot \frac{f_M}{2} \text{sinc} \left(\frac{f_M}{2} t \right) \right) \\ &= 2 f_M \text{sinc}^2 \left(\frac{f_M}{2} t \right). \end{aligned}$$

- c) Die Spektren ergeben sich wie folgt (wobei die gestrichelten Kurven die Tiefpassfilter $H_1(f)$ und $H_2(f)$ darstellen):





Zum besseren Verständnis noch die mathematische Lösung (nicht gefragt), wobei alle Operationen im Frequenzbereich ausgeführt werden: Das Spektrum

$$X(f) = \begin{cases} 4 - |f| & -4 \leq f \leq 4 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

wird durch Multiplikation mit dem Oszillatorsignal im Frequenzbereich dupliziert und verschoben:

$$r_1(t) = x(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_T t)$$



$$\begin{aligned} R_1(f) &= X(f) * (\delta(f + f_T) + \delta(f - f_T)) \\ &= X(f + f_T) + X(f - f_T) = \begin{cases} |f| - 4 & 4 \leq |f| \leq 8 \\ 12 - |f| & 8 < |f| \leq 12 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Durch das erste Tiefpassfilter $H_1(f) = \text{rect}_{f_1}(f)$ werden alle Frequenzen $|f| > 6$ MHz unterdrückt:

$$R_2(f) = R_1(f) \cdot H_1(f) = \begin{cases} |f| - 4 & 4 \leq |f| \leq 6 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Durch Multiplikation mit dem Oszillatorsignal werden die verbliebenen Anteile wieder um $\pm f_T$ verschoben:

$$R_3(f) = R_2(f + f_T) + R_2(f - f_T) = \begin{cases} 4 - |f| & 2 \leq |f| \leq 4 \\ |f| - 12 & 12 \leq |f| \leq 14 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Schließlich erfolgt die Anwendung des zweiten Tiefpassfilters $H_2(f)$, welches alle Frequenzen $|f| > 3$ MHz herausfiltert:

$$Y(f) = R_3(f) \cdot H_2(f) = \begin{cases} 4 - |f| & 2 \leq |f| \leq 3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

d) Aus der Skizze des vorherigen Aufgabenteils kann $Y(f)$ bestimmt werden:

$$Y(f) = \begin{cases} 4 - |f| & 2 \leq |f| \leq 3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Gemäß dem Parseval'schen Theorem kann die Energie E eines Signals $y(t)$ auch mit Hilfe dessen Spektrums bestimmt werden:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} E &= 2 \int_2^3 |Y(f)|^2 df \\ &= 2 \int_2^3 |-f + 4|^2 df \\ &= 2 \int_2^3 (f^2 - 8f + 16) df \\ &= 2 \left(\frac{f^3}{3} - 4f^2 + 16f \right) \Big|_2^3 \\ &= \frac{14}{3} \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (20 Punkte)

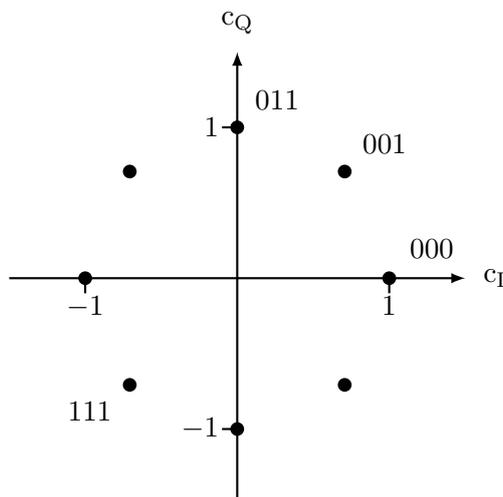
Für die Übertragung mit Symboldauer T und Symbolrate $R = 1/T$ wird am Sender das Pulsformungsfiler $g(t)$ eingesetzt, wobei

$$g(t) = \sqrt{\frac{1}{T}} \operatorname{rect}_T \left(t - \frac{T}{2} \right) \quad \text{mit} \quad \operatorname{rect}_T \left(t - \frac{T}{2} \right) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < t < T \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} .$$

- Geben Sie das zu $g(t)$ gehörende kausale Matched-Filter $h(t)$ an. (2 Punkte)
- Berechnen Sie die Gesamtimpulsantwort $h_0(t)$ des Übertragungssystems. (2 Punkte)
- Erfüllt $h_0(t)$ die 1. Nyquistbedingung? Begründen Sie kurz. (2 Punkte)
- Sie möchten die vorgeschlagene Pulsformung in einem praktischen System nutzen. Welches Problem wird auftreten? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

Gegeben ist folgende 8-PSK Konstellation \mathcal{M} mit gleichverteilten Symbolen c .



- Ergänzen Sie die fehlenden Bitzuweisungen zu den Symbolen, sodass eine Gray-Codierung vorliegt. Übertragen Sie das Konstellationsdiagramm hierfür auf Ihr Arbeitspapier. Achten Sie auf eine vollständige Achsenbeschriftung. (2 Punkte)
- Am Empfänger soll nun ein Bit-Metrik-Decoder für diese Konstellation eingesetzt werden. Kennzeichnen Sie jeweils in einem eigenen Konstellationsdiagramm die Subkonstellationen $\mathcal{M}_1^{(0)}$, $\mathcal{M}_1^{(1)}$, $\mathcal{M}_2^{(0)}$ und $\mathcal{M}_2^{(1)}$, wobei $\mathcal{M}_i^{(n)}$ die Subkonstellation des i -ten Bits beschreibt für $n \in \{0, 1\}$. (4 Punkte)
- Berechnen Sie mit dem Bit-Metrik-Decoder für einen Empfangswert von $z = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$ die likelihood ratio $\Lambda_2(z)$ des zweiten Bits B_2 und entscheiden Sie dieses. Die Übertragung erfolgte über einen AWGN-Kanal mit $\sigma_n^2 = \frac{1}{2}$. Achten Sie auf einen vollständigen Rechenweg und geben Sie gerundete Zwischenergebnisse bis auf die ersten drei Dezimalstellen ungleich Null an. (6 Punkte)

Lösung

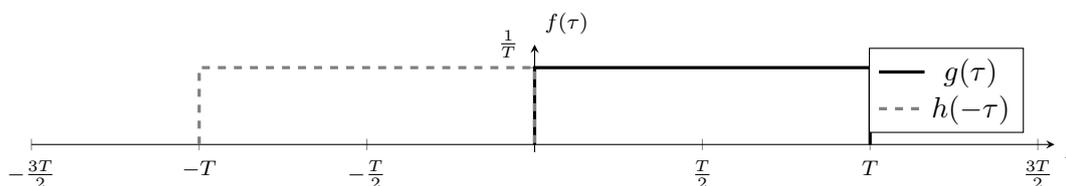
- a) Das Matched-Filter ist durch $h(t) = g^*(\kappa_0 T - t)$ gegeben. Hierbei ist $\kappa_0 \in \mathbb{N}$ so zu wählen, dass das Matched-Filter kausal ist. Da $g(t)$ rein reell ist, ergibt sich:

$$h(t) = \sqrt{\frac{1}{T}} \operatorname{rect}_T \left(\kappa_0 T - t - \frac{T}{2} \right) \stackrel{\kappa_0=1}{=} \sqrt{\frac{1}{T}} \operatorname{rect}_T \left(T - t - \frac{T}{2} \right) = \sqrt{\frac{1}{T}} \operatorname{rect}_T \left(\frac{T}{2} - t \right)$$

Aufgrund der Symmetrie der Rechteckfunktion lässt sich dies zu $h(t) = \sqrt{\frac{1}{T}} \operatorname{rect}_T \left(t - \frac{T}{2} \right) = g(t)$ vereinfachen.

- b) Die Gesamtimpulsantwort kann als Faltung $h_0(t) = g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) h(t - \tau) d\tau$ berechnet werden. Werden zwei Rechtecke der Breite T miteinander gefaltet, so ergibt sich eine Dreiecksfunktion der Breite $2T$. Aus der Skizze ist erkennbar, dass ab $t = 0$ die Überlagerung beider Rechtecke beginnt und ab einer Verschiebung von $t = 2T$ endet. Somit ist $h(t = 0) = h(t = 2T) = 0$. Eine vollständige Überlagerung beider Rechtecke ist für die Verschiebung von $h(t - \tau)$ um $t = T$ gegeben. Es ergibt sich

$$h_0(t = T) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \operatorname{rect}_T^2 \left(t - \frac{T}{2} \right) d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T d\tau = 1$$



Die Gesamtimpulsantwort ergibt sich zu:

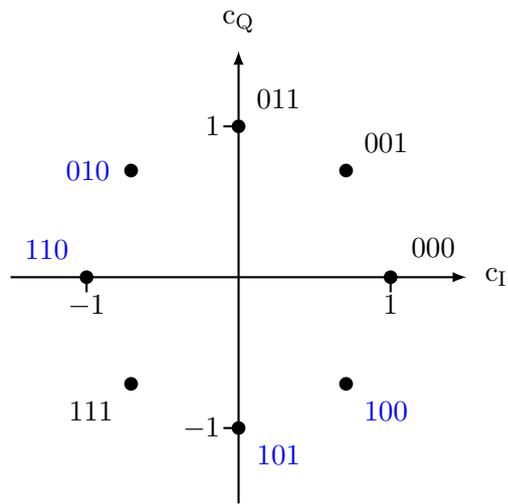
$$h_0(t) = \begin{cases} \frac{t}{T} & \text{für } 0 \leq t < T \\ 2 - \frac{t}{T} & \text{für } T \leq t < 2T \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- c) Für die erste Nyquistbedingung muss

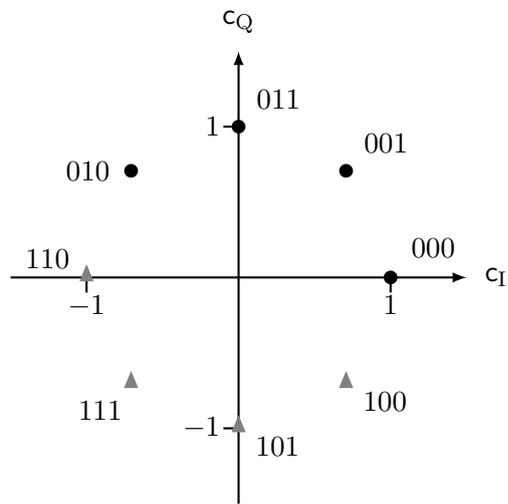
$$h_0(kT) = \begin{cases} 1 & k = \kappa_0 \\ 0 & k \neq \kappa_0 \end{cases}$$

mit $k \in \mathbb{Z}$ erfüllt sein, d.h. $h_0(t)$ muss bei Vielfachen der Symboldauer untersucht werden. Da $h(t) = 0$ für $t \leq 0$ und $t \geq 2T$ ist dies an allen Vielfachen kT , $k \neq \kappa_0$, erfüllt. Für $k = \kappa_0$ gilt $h_0(t = \kappa_0 T) = h_0(t = T) = 1$. Damit ist die 1. Nyquistbedingung erfüllt.

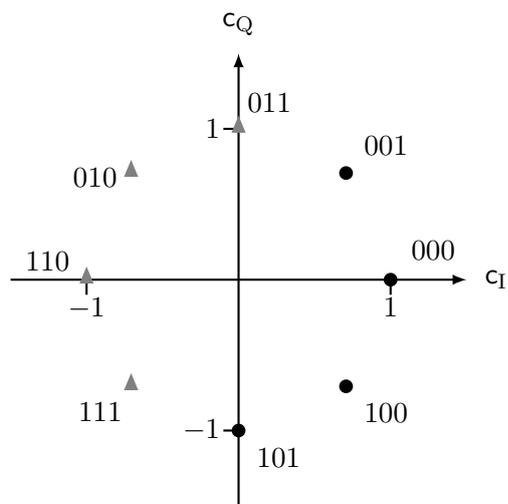
- d) Die ideale Rechteckpulsformung ist nicht bandbegrenzt, da $\operatorname{rect}_T(t) \circ \bullet T \operatorname{sinc}(Tf)$ und der sinc ein unendliches Spektrum besitzt. Da Systeme eine begrenzte Bandbreite haben, kann die ideale Rechteckpulsformung nicht realisiert werden, da keine unendlich steilen Flanken realisiert werden können.
- e) Um eine Gray-Codierung zu erhalten muss die Bitzuweisung wie folgt ergänzt werden:



f) Die Subkonstellationen $\mathcal{M}_1^{(0)} \rightarrow \bullet$ und $\mathcal{M}_1^{(1)} \rightarrow \blacktriangle$ können wie folgt bestimmt werden:



Analog für $\mathcal{M}_2^{(0)} \rightarrow \bullet$ und $\mathcal{M}_2^{(1)} \rightarrow \blacktriangle$



g) Für das zweite Bit B_2 ist die likelihood ratio $\Lambda_2(z)$ mit Entscheidungsregel formell als

$$\Lambda_2(z) = \frac{P_{B|Z}(B_2 = 0|z)}{P_{B|Z}(B_2 = 1|z)} = \frac{\sum_{c \in \mathcal{M}_2^{(0)}} f_{Z|C}(z|c) P_C(c)}{\sum_{c \in \mathcal{M}_2^{(1)}} f_{Z|C}(z|c) P_C(c)} \stackrel{\hat{B}=1}{\underset{\hat{B}=0}{>}} 1$$

definiert, wobei sich, durch die Gleichverteilung der Sendesymbole $P_C(c) = \frac{1}{|\mathcal{M}|}$ und mit $f_{Z|C}(z|c) = \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} e^{-\left(\frac{|z-c|}{\sigma_n}\right)^2}$ sowie $\sigma_n^2 = \frac{1}{2}$, die likelihood ratio vereinfacht:

$$\begin{aligned} \Lambda_2(z) &= \frac{\sum_{c \in \mathcal{M}_2^{(0)}} f_{Z|C}(z|c)}{\sum_{c \in \mathcal{M}_2^{(1)}} f_{Z|C}(z|c)} \\ &= \frac{\sum_{c \in \mathcal{M}_2^{(0)}} \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} e^{-\left(\frac{|z-c|}{\sigma_n}\right)^2}}{\sum_{c \in \mathcal{M}_2^{(1)}} \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} e^{-\left(\frac{|z-c|}{\sigma_n}\right)^2}} \\ &= \frac{\sum_{c \in \mathcal{M}_2^{(0)}} e^{-2|z-c|^2}}{\sum_{c \in \mathcal{M}_2^{(1)}} e^{-2|z-c|^2}} \end{aligned}$$

Die komplexwertigen Symbole c in der 8-PSK Konstellation sind durch

$$c_m = \cos\left(\frac{m\pi}{4}\right) + j \sin\left(\frac{m\pi}{4}\right) = e^{j\frac{m\pi}{4}} \quad \text{für } m = 0, \dots, 7$$

gegeben. Für die Berechnung von $\Lambda_2\left(z = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}\right)$ kann zuerst für jedes Modulationssymbol der Wert der Exponentialfunktion bestimmt werden:

Bitmuster	c	$-2 z-c ^2$	$e^{-2 z-c ^2}$
011	$e^{j\frac{2\pi}{4}} = j$	$-2\left \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\right ^2 = -1$	$\approx 0,368$
010	$e^{j\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + j)$	$-2\left \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + j\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right ^2 = -3$	$\approx 0,0498$
110	$e^{j\frac{4\pi}{4}} = -1$	$-2\left \frac{3}{2} + j\frac{1}{2}\right ^2 = -5$	$\approx 0,00674$
111	$e^{j\frac{5\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - j)$	$-2\left \frac{1+\sqrt{2}}{2} + j\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)\right ^2 \approx -5,83$	$\approx 0,00294$
001	$e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + j)$	$-2\left \frac{1-\sqrt{2}}{2} + j\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)\right ^2 \approx -0,172$	$\approx 0,842$
000	$e^{j\frac{0\pi}{4}} = 1$	$-2\left -\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\right ^2 = -1$	$\approx 0,368$
100	$e^{j\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - j)$	$-2\left \frac{1-\sqrt{2}}{2} + j\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right ^2 = -3$	$\approx 0,0498$
101	$e^{j\frac{6\pi}{4}} = -j$	$-2\left \frac{1}{2} + j\frac{3}{2}\right ^2 = -5$	$\approx 0,00674$

Damit ergibt sich

$$\Lambda_2\left(z = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\right) \approx \frac{0,842 + 0,368 + 0,0498 + 0,00674}{0,368 + 0,0498 + 0,00674 + 0,00294} \approx 2,963 \stackrel{\hat{B}=1}{\underset{\hat{B}=0}{>}} 1$$

und das zweite Bit würde zu $\hat{B}_2 = 0$ entschieden werden.

Aufgabe 4 (14 Punkte)

Gegeben ist eine Modulation mit den reellwertigen Symbolen c_1 und c_2 . Diese werden durch reellwertiges Rauschen $N[k]$ mit der Verteilungsdichte

$$f_N(n) = \rho \cdot e^{-|n|} \quad , \rho \in \mathbb{R}$$

gestört und es gilt $Z[k] = A[k] + N[k]$. Dabei beschreibt die Zufallsvariable $A[k]$ das Sendesymbol $A[k] \in \{c_1, c_2\}$. Zunächst sei $c_1 = -1$ und $c_2 = +1$. Weiterhin ist $P_A(c_1) = \frac{1}{4}$ und $P_A(c_2) = \frac{3}{4}$.

- Bestimmen Sie den Wert von ρ . (2 Punkte)
- Geben Sie die bedingten Dichten $f_{Z|A}(z|A = c_1)$ und $f_{Z|A}(z|A = c_2)$ an. (2 Punkte)
- Leiten Sie die optimale Entscheidungsregel gemäß der MAP-Regel her. (6 Punkte)
- Berechnen Sie die Fehlerrate $P_{e,\text{MAP}}$ bei optimaler MAP-Entscheidung. (4 Punkte)

Lösung

- a) Damit $f_N(n)$ eine Dichte ist, muss

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_N(n) \, dn = 1$$

erfüllt sein. Es ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_N(n) \, dn = 2 \int_0^{+\infty} \rho \cdot e^{-n} \, dn = 2\rho(-e^{-n}) \Big|_0^{+\infty} = 2\rho \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \quad \rho = \frac{1}{2}.$$

Somit ist:

$$f_N(n) = \frac{1}{2} \cdot e^{-|n|}.$$

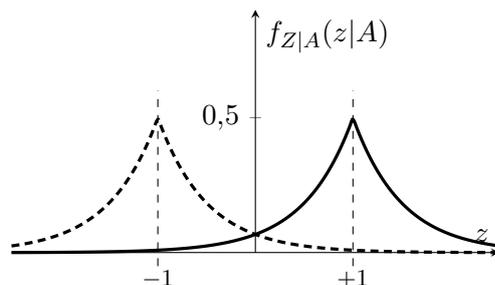
- b) Die beiden bedingten Dichten am Empfänger ergeben sich zu:

$$f_{Z|A}(z|A = c_1) = \frac{1}{2} \cdot e^{-|z+1|}$$

und

$$f_{Z|A}(z|A = c_2) = \frac{1}{2} \cdot e^{-|z-1|}.$$

Als Hilfe können beide bedingten Dichten in ein gemeinsames Diagramm skizziert werden:

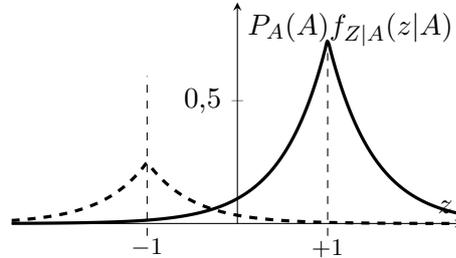


c) Für MAP ergibt sich der Hypothesentest zu

$$P_A(A = c_1) f_{Z|A}(z|A = c_1) \underset{\substack{\hat{A}=c_2 \\ > \\ \hat{A}=c_1}}{\leq} P_A(A = c_2) f_{Z|A}(z|A = c_2)$$

$$\frac{1}{8} \cdot e^{-|z+1|} \underset{\substack{\hat{A}=c_2 \\ > \\ \hat{A}=c_1}}{\leq} \frac{3}{8} \cdot e^{-|z-1|}$$

Als Hilfe können beide Funktionen in ein gemeinsames Diagramm skizziert werden:



Vereinfachen des Ausdrucks:

$$\frac{1}{8} \cdot e^{-|z+1|} \underset{\substack{\hat{A}=c_2 \\ > \\ \hat{A}=c_1}}{\leq} \frac{3}{8} \cdot e^{-|z-1|}$$

$$e^{-|z+1|} \underset{\substack{\hat{A}=c_2 \\ > \\ \hat{A}=c_1}}{\leq} 3e^{-|z-1|}$$

$$|z+1| \underset{\substack{\hat{A}=c_1 \\ > \\ \hat{A}=c_2}}{\leq} |z-1| - \ln 3$$

Fall $z \geq 1$:

$$z+1 \underset{\substack{\hat{A}=c_1 \\ > \\ \hat{A}=c_2}}{\leq} z-1 - \ln 3$$

$$2 + \ln 3 \underset{\substack{\hat{A}=c_1 \\ > \\ \hat{A}=c_2}}{\leq} 0$$

$$\Rightarrow \hat{A} = c_2$$

Fall $-1 < z < 1$:

$$z+1 \underset{\substack{\hat{A}=c_1 \\ > \\ \hat{A}=c_2}}{\leq} -(z-1) - \ln 3$$

$$z \underset{\substack{\hat{A}=c_1 \\ > \\ \hat{A}=c_2}}{\leq} -\frac{\ln 3}{2}$$

Fall $z \leq -1$:

$$-(z+1) \underset{\substack{\hat{A}=c_1 \\ > \\ \hat{A}=c_2}}{\leq} -(z-1) - \ln 3$$

$$0 \underset{\substack{\hat{A}=c_1 \\ > \\ \hat{A}=c_2}}{\leq} 2 - \ln 3 \approx 0,901$$

$$\Rightarrow \hat{A} = c_1$$

Damit ergibt sich die Entscheidungsregel zu

$$\hat{a}[k] = \begin{cases} c_1 & z[k] < -\frac{\ln 3}{2} \\ c_2 & z[k] \geq -\frac{\ln 3}{2} \end{cases}.$$

d) Die Fehlerwahrscheinlichkeit $P_{e,\text{MAP}}$ berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} P_{e,\text{MAP}} &= P_A(A = c_1)P_e(c_1) + P_A(A = c_2)P_e(c_2) \\ &= P_A(A = c_1) \int_{-\frac{\ln 3}{2}}^{+\infty} f_{Z|A}(z|A = c_1) dz + P_A(A = c_2) \int_{-\infty}^{-\frac{\ln 3}{2}} f_{Z|A}(z|A = c_2) dz \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\ln 3}{2}}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-|z+1|} dz + \frac{3}{4} \int_{-\infty}^{-\frac{\ln 3}{2}} \frac{1}{2} e^{-|z-1|} dz \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\ln 3}{2}}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-z-1} dz + \frac{3}{4} \int_{-\infty}^{-\frac{\ln 3}{2}} \frac{1}{2} e^{z-1} dz \\ &= -\frac{1}{8} e^{-z-1} \Big|_{-\frac{\ln 3}{2}}^{\infty} + \frac{3}{8} e^{z-1} \Big|_{-\infty}^{-\frac{\ln 3}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8e} + \frac{\sqrt{3}}{8e} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4e} \approx 0,159. \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (15 Punkte)

Für die Übertragung über einen symmetrischen Binärkanal (BSC) mit Bitfehlerwahrscheinlichkeit $\delta < 0,5$ soll ein $(n, 1)$ -Wiederholungscode verwendet werden.

- Beschreiben Sie, wie der Hard-Decision ML-Decoder für einen Wiederholungscode entscheidet, wenn Sie eine Bitfolge der Länge n empfangen. Wie wäre der ML-Decoder einfach zu realisieren? (2 Punkte)
- Bestimmen Sie nun n und k , sodass bei maximaler Coderate r bis zu zwei Bitfehler in einem Codewort korrigiert werden können. Geben Sie die Generatormatrix \mathbf{G} des Codes an. (3 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

Gegeben ist nun die Generatormatrix \mathbf{G} eines (n, k) -Blockcodes mit

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Übertragung findet weiterhin über einen BSC mit $\delta < 0,5$ statt.

- Geben Sie die Coderate r dieses Codes an. (1 Punkt)
- Geben Sie die Paritycheckmatrix \mathbf{H} dieses Codes an. (3 Punkte)
- Wieviele Übertragungsfehler t kann der vorliegende Code korrigieren? (3 Punkte)
- Nach Übertragung über den BSC empfangen Sie die Folge $\mathbf{y} = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)$. Berechnen Sie das Syndrom \mathbf{s} und bestimmen Sie das am wahrscheinlichsten gesendete Codewort $\hat{\mathbf{x}}$ nach Hard-Decision. Können Sie mit Sicherheit sagen, dass das bestimmte Codewort $\hat{\mathbf{x}}$ dem gesendeten Codewort entspricht? (3 Punkte)

Lösung

- Ein $(n, 1)$ -Wiederholungscode sendet das zu sendende Datenbit n mal. Enthält das Empfangswort nach Hard-Decision mehr als $n/2$ Einsen, ist es näher am Codewort $\mathbf{x} = (1 \ 1 \ \dots \ 1)$ und auf dieses wird entschieden. Im anderen Fall wird das Null-Codewort entschieden. Eine einfache Realisierung dieser Entscheidung ist eine „Mehrheitsentscheidung“

$$\frac{1}{n} \sum_i y_i \underset{\hat{u}=1}{\overset{\hat{u}=0}{>}} 0,5 \quad ,$$

wobei $y_i \in \{0, 1\}$ die Empfangswerte nach Hard-Decision sind und \hat{u} das geschätzte Datenbit.

- Für die Korrektur von t Bitfehlern gilt: $d_{\min} \geq 2t + 1$. Da bei einem Wiederholungscode die Codewörter aus n Einsen oder Nullen bestehen, ist $d_{\min} = n$. Es folgt

$$n = d_{\min} \geq 2t + 1 = 5$$

und mit der Definition der Coderate zu $r = \frac{1}{n}$ und der Forderung nach maximaler Coderate wählen wir $n = 5$.

Die Generatormatrix \mathbf{G} kann zu

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

bestimmt werden.

- c) Da die gegebene Generatormatrix $k = 3$ Informationsbits in $n = 6$ Codebits abbildet, besitzt der vorliegende Code die Coderate $r = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
- d) Um die Paritycheckmatrix \mathbf{H} zu berechnen muss zuerst die Generatormatrix in ihre systematische Form $\mathbf{G}_{\text{sys}} = (\mathbf{I}_k \mathbf{P})$ gebracht werden:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1=Z_1+Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3=Z_3+Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3=Z_3+Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich die Matrix \mathbf{P} zu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Paritycheckmatrix lässt sich durch $\mathbf{H} = (\mathbf{P}^T \mathbf{I}_{n-k})$ bestimmen:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Generatormatrix ist nicht eindeutig. Ein weiterer Weg wäre durch Tauschen der Spalten und anschließende Addition zweier Zeilen. Durch diese Form der Generatormatrix werden möglicherweise andere Codewörter konstruiert als mit der ersten Form. Die Korrekturfähigkeit des Codes bleibt aber erhalten. Um eine Paritycheckmatrix für den Code mit Generatormatrix \mathbf{G} zu erhalten muss das Vertauschen der Spalten bei der erhaltenen Paritycheckmatrix \mathbf{H}' zwingend wiederholt werden. Der Ansatz ist wie folgt beschrieben:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_4} \mathbf{G}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3=Z_3+Z_1} \mathbf{G}'_{\text{sys}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_4} \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- e) Um die Anzahl t der korrigierbaren Fehler zu bestimmen muss der minimale Hammingabstand des Codes bestimmt werden. Hierzu müssen alle Codewörter und deren Hammingabstand zum Nullwort bestimmt werden:

u	$x = uG$	$d_H(x, \mathbf{0})$
000	000 000	0
001	001 011	3
011	011 100	3
010	010 111	4
110	110 010	3
111	111 001	4
101	101 110	4
100	100 101	3

Der minimale Hammingabstand ist $d_{\min} = 3$. Die Anzahl der korrigierbaren Fehler des Codes lässt sich durch $d_{\min} \geq 2t + 1$ zu $t = 1$ bestimmen.

- f) Um das am wahrscheinlichsten gesendete Codewort nach Hard-Decision zu bestimmen muss eine Syndromdecodierung durchgeführt werden. Hierzu wird aus dem Empfangsvektor $\mathbf{y} = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)$ und der Paritycheckmatrix \mathbf{H} das Syndrom $\mathbf{s} = \mathbf{H}\mathbf{y}^T$ berechnet:

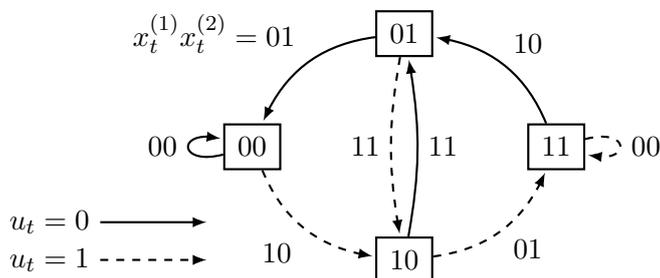
$$\mathbf{s} = \mathbf{H}\mathbf{y}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das Syndrom bestimmt sich zu $\mathbf{s} = (101)$. Dies entspricht der ersten Spalte von \mathbf{H} und suggeriert, dass das erste Bit falsch übertragen wurde. Das am wahrscheinlichsten gesendete Codewort bestimmt sich zu $\hat{\mathbf{x}} = (1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)$.

Die Decodierung ist nicht notwendigerweise korrekt, da bei einer fehlerhaften Übertragung von mindestens zwei Bit unter Umständen ein falsches Codewort decodiert wird.

Aufgabe 6 (12 Punkte)

Gegeben ist das Zustandsdiagramm eines Faltungscodierers, wobei u_t das Eingangsbit und $x_t^{(1)}$ und $x_t^{(2)}$ die Ausgangsbits pro Takt t darstellen.



- Geben Sie die Rate r und die Einflusslänge des Faltungscodierers an. Welche Eigenschaft des Faltungscodierers wird durch die Einflusslänge beschrieben? (3 Punkte)
- Bestimmen Sie die Generatorpolynome $g_1(x)$ und $g_2(x)$, welche die Erzeugung von $x_t^{(1)}$ und $x_t^{(2)}$ beschreiben. Begründen Sie Ihr Vorgehen. (3 Punkte)
- Geben Sie die Schieberegisterdarstellung des Faltungscodierers an. (2 Punkte)
- Skizzieren Sie das Trellis-Diagramm für die ersten fünf Taktschritte, wenn sich das Schieberegister im Anfangszustand $(v_1, v_2) = (1, 1)$ befindet. (4 Punkte)

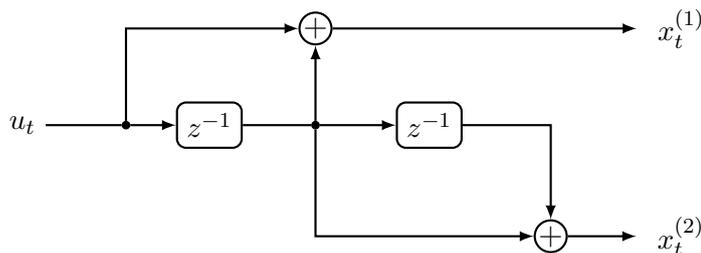
Lösung

- Pro Takt wird $k = 1$ Eingangsbit auf $n = 2$ Ausgangsbits abgebildet. Die Coderate ergibt sich zu $r = \frac{k}{n} = \frac{1}{2}$. Die Einflusslänge beschreibt, von wie vielen Eingangsbits die Ausgangsbits beeinflusst werden. Da es 4 Zustände gibt befinden sich $\log_2(4) = 2$ Bits im Speicher des Encoders. Somit ergibt sich die Einflusslänge zu 3, die Ausgangsbits hängen vom Eingangsbit sowie den zwei in den Speichergliedern gespeicherten Bits ab.
- Um die Generatorpolynome zu ermitteln wird das Schieberegister mit $(v_1, v_2) = (0, 0)$ initialisiert und durch Eingabe von $\mathbf{u} = (1 \ 0 \ 0)$ die Impulsantwort des Encoders bestimmt. Aus dem Zustandsdiagramm können die Ausgangsbitfolgen $\mathbf{x}^{(1)} = (1 \ 1 \ 0)$ und $\mathbf{x}^{(2)} = (0 \ 1 \ 1)$ abgelesen werden. Da durch Eingabe von \mathbf{u} immer genau ein "erzeugendes" Bit eins ist, können direkt die Generatorpolynome ausgelesen werden:

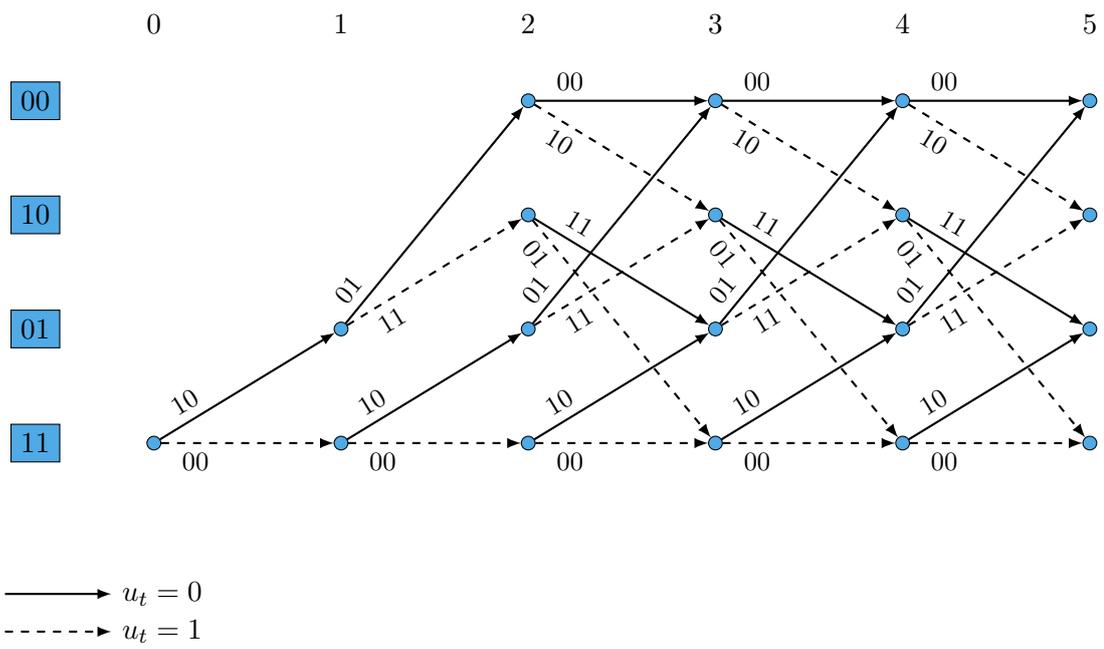
$$g_1(x) = 1 + x,$$

$$g_2(x) = x + x^2.$$

- Aus den Generatorpolynomen ergibt sich die Schieberegisterdarstellung zu:

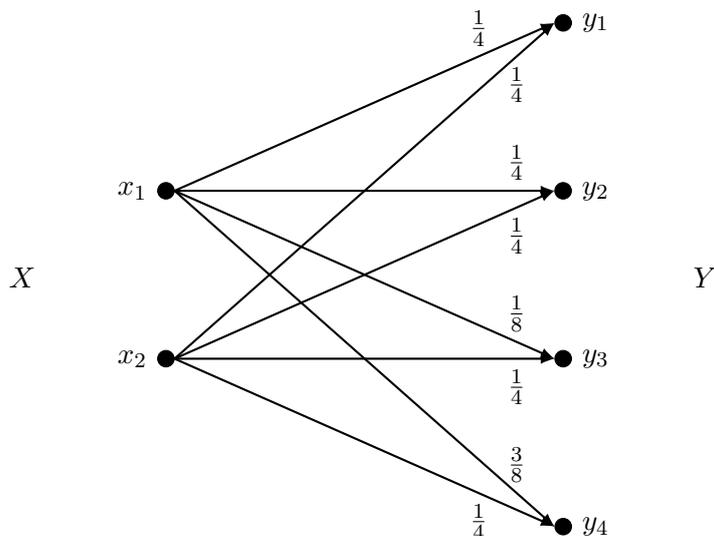


d) Das Trellis-Diagramm für die ersten 5 Taktstritte ergibt sich zu:



Aufgabe 7 (18 Punkte)

Gegeben sei der folgende Kanal:



Die Zufallsvariablen X und Y beschreiben das Sende- und Empfangssymbol, wobei $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$ die Menge der Sendesymbole und $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ die Menge der Empfangssymbole beschreibt. An den Kanten der Darstellung sind die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den verschiedenen Knoten notiert. Der Absender sendet das Symbol x_1 mit der Wahrscheinlichkeit $P_X(x_1) = u$.

- Geben Sie die Kanalübergangsmatrix $\mathbf{P}_{Y|X}$ des Kanals an. Berechnen Sie $P_Y(y_i)$ für $y_i \in \mathcal{Y}$ in Abhängigkeit von u . (4 Punkte)
- Berechnen Sie die Entropie $H(Y)$, die bedingte Entropie $H(Y|X)$ und die Transinformation $I(X; Y)$ für $u = \frac{1}{2}$. Ihr Rechenweg muss klar ersichtlich sein. (8 Punkte)
- Handelt es sich um einen schwach symmetrischen Kanal? Wenn nein, verändern Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{Y|X}(y_j|x_2)$, $j = 1, 2, 3, 4$, sodass der Kanal schwach symmetrisch wird. Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)
- Bestimmen Sie die Kapazität des veränderten Kanals. (2 Punkte)
- Zur Übertragung nutzen Sie nun einen Kanalcode mit Rate $r = 0,1$. Können Sie über den veränderten Kanal mit beliebig kleiner Fehlerrate übertragen? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

Lösung

- Die Kanalübergangsmatrix lautet:

$$\mathbf{P}_{Y|X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Über den Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P_Y(y_i) = \sum_n P_{X,Y}(y_i, x_n) = \sum_n P_{Y|X}(y_i|x_n)P_X(x_n)$$

berechnen sich die Auftretenswahrscheinlichkeiten zu:

$$\begin{aligned} P_Y(y_1) &= \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}(1-u) = \frac{1}{4} \\ P_Y(y_2) &= \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}(1-u) = \frac{1}{4} \\ P_Y(y_3) &= \frac{1}{8}u + \frac{1}{4}(1-u) = \frac{1}{4} - \frac{u}{8} \\ P_Y(y_4) &= \frac{3}{8}u + \frac{1}{4}(1-u) = \frac{1}{4} + \frac{u}{8} \end{aligned}$$

b) Die Entropie ergibt sich zu

$$\begin{aligned} H(Y) &= - \sum_{j=1}^4 P_Y(y_j) \log_2 P_Y(y_j) \\ &= - \frac{1}{4} \log_2 \left(\frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4} \log_2 \left(\frac{1}{4} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{u}{8} \right) \log_2 \left(\frac{1}{4} - \frac{u}{8} \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{u}{8} \right) \log_2 \left(\frac{1}{4} + \frac{u}{8} \right) \\ &= - \frac{1}{4} \cdot (-2) - \frac{1}{4} \cdot (-2) - \frac{3}{16} \log_2 \left(\frac{3}{16} \right) - \frac{5}{16} \log_2 \left(\frac{5}{16} \right) \\ &= 1 - \frac{3}{16} \log_2 \left(\frac{3}{16} \right) - \frac{5}{16} \log_2 \left(\frac{5}{16} \right) \\ &\approx 1,977 \frac{\text{Bit}}{\text{Symbol}}, \end{aligned}$$

die bedingte Entropie zu

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 P_{X,Y}(x_i, y_j) \log_2 (P_{Y|X}(y_j|x_i)) \\ &= - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 P_{Y|X}(y_j|x_i) P_X(x_i) \log_2 (P_{Y|X}(y_j|x_i)) \\ &= -4 \cdot \frac{1}{8} \log_2 \left(\frac{1}{4} \right) - \frac{1}{16} \log_2 \left(\frac{1}{8} \right) - \frac{1}{8} \log_2 \left(\frac{1}{4} \right) - \frac{3}{16} \log_2 \left(\frac{3}{8} \right) - \frac{1}{8} \log_2 \left(\frac{1}{4} \right) \\ &= 1 + \frac{3}{16} + \frac{1}{4} - \frac{3}{16} \log_2(3) + \frac{9}{16} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{9}{4} - \frac{3}{16} \log_2(3) \\ &\approx 1,953 \frac{\text{Bit}}{\text{Kanalzugriff}} \end{aligned}$$

und die Transinformation zu

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X) \approx 0,024 \frac{\text{Bit}}{\text{Kanalzugriff}}.$$

c) Nein. Ein Kanal ist schwach symmetrisch, wenn jede Spalte der Kanalübergangsmatrix eine Permutation jeder anderen Spalte ist und alle Zeilensummen identisch sind. Beide Bedingungen sind nicht erfüllt. Wir können aber die zweite Spalte wie folgt verändern

$$P_{Y|X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

und der Kanal ist nun schwach symmetrisch, da obige Forderungen nun erfüllt sind.

d) Die Kanalkapazität des veränderten, schwach symmetrischen Kanals ist

$$\begin{aligned} C &= \log_2(4) + \sum_{j=1}^4 P_{Y|X}(y_j|x_i) \log_2 P_{Y|X}(y_j|x_i) \\ &= 2 + \frac{1}{4} \log_2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \log_2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} \log_2\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{3}{8} \log_2\left(\frac{3}{8}\right) \\ &= \frac{3}{8} \log_2(3) - \frac{1}{2} \\ &= 0,094 \frac{\text{Bit}}{\text{Kanalzugriff}}. \end{aligned}$$

e) Nein, es ist nicht möglich.

Die Umkehrung des Kanalcodierungstheorems besagt, dass für $r > C$ eine beliebig kleine Fehlerwahrscheinlichkeit auf keinen Fall erreicht werden kann. Da die Coderate $r = 0,1$ größer als die Kanalkapazität $C = 0,094$ ist, ist eine Übertragung mit beliebig kleiner Fehlerwahrscheinlichkeit unmöglich.

Aufgabe 8 (16 Punkte)

Im Folgenden finden Sie drei Aussagen.

- a) Bewerten Sie diese mit *Richtig* oder *Falsch* und begründen Sie kurz Ihre Wahl. (6 Punkte)
- (i) Der ideale Kanal $h(t) = \delta(t)$ ist physikalisch realisierbar.
 - (ii) Wird über einen reinen AWGN-Kanal übertragen und die Gesamtimpulsantwort aus Sendepuls- und Matched-Filter erfüllt die 1. Nyquistbedingung, so ist keine Entzerrung notwendig.
 - (iii) Bewegt sich bei einer drahtlosen Übertragung der Sender, so beeinflusst dies das Spektrum des Empfangssignals nicht.

Aus der Vorlesung kennen Sie folgende Tabelle:

Fadingbegriffe	$B \ll B_C$	$B \gg B_C$
$T \ll T_C$	flat, slow	freq. selective, slow
$T \gg T_C$	flat, fast	freq. selective, fast

- b) Argumentieren und begründen Sie, welches Szenario Sie gerne für eine Übertragung vorfinden. (3 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

Sie betrachten einen Kanal, dessen Frequenzgang $H(f)$ im äquivalenten Basisband durch

$$H(f) = 0,407 \cdot e^{-j10\pi fT} + 0,815 \cdot e^{-j14\pi fT} + 0,407 \cdot e^{-j18\pi fT}$$

gegeben ist. Die Symboldauer ist $T = 1 \mu\text{s}$.

- c) Berechnen Sie die Impulsantwort $h(t)$ des Kanals. (2 Punkte)

Als Übertragungsverfahren über den gegebenen Kanal möchten Sie nun OFDM nutzen. Sie wählen 16-QAM als Modulationsformat und belegen alle $N \in \mathbb{N}$ Unterträger mit Symbolen.

- d) Bestimmen Sie die minimale Dauer des zyklischen Präfix und begründen Sie kurz Ihr Vorgehen. (2 Punkte)
- e) Bestimmen Sie die maximal erreichbare Datenrate $R_{\text{bit,max}}$ des Systems. (3 Punkte)

Lösung

- a) (i) Falsch. Da $h(t) = \delta(t) \circ \bullet H(f) = 1$ wäre der Kanal nicht *bandbegrenzt* und somit nicht realisierbar.
- (ii) Korrekt. Da der reine AWGN-Kanal keine Mehrwegeausbreitung besitzt und somit nicht zu *Intersymbolinterferenz* (ISI) führt, ist er *frequenzflach* und es ist keine Entzerrung notwendig.
- (iii) Falsch. Bewegt sich der Sender, so tritt durch den Dopplereffekt eine *Dopplerverschiebung* des Spektrums auf.
Zusatz: Da die Dopplerverschiebung frequenzabhängig ist, werden Signalanteile bei unterschiedlichen Frequenzen auch unterschiedlich stark verschoben.

- b) Ist der Kanal *flat* (frequenzflach), so ist seine Kohärenzbandbreite B_C deutlich größer als die Übertragungsbandbreite B , es tritt nahezu keine *Intersymbolinterferenz* auf und es ist keine Entzerrung notwendig. Ist der Kanal *slow* (slow fading), so ist seine Kohärenzzeit T_C deutlich größer als die Symboldauer T der Übertragung und der Kanal kann über mehrere Symbole hinweg als stationär angenommen werden. Somit ist “flat, slow” das gewünschte Szenario.
- c) Über den Verschiebungssatz der Fourier-Transformation (Formelsammlung, (D.4)) ergibt sich

$$H(f) = 0,407 \cdot e^{-j2\pi f5T} + 0,815 \cdot e^{-j2\pi f7T} + 0,407 \cdot e^{-j2\pi f9T}$$

$$\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \circ \end{array}$$

$$h(t) = 0,407 \cdot \delta(t - 5T) + 0,815 \cdot \delta(t - 7T) + 0,407 \cdot \delta(t - 9T)$$

- d) Aus der Impulsantwort $h(t)$ lässt sich der Delay-Spread T_{DS} des Kanals als Zeitdifferenz des kürzesten und des längsten Weges ermitteln. Somit ist $T_{DS} = 9T - 5T = 4T = 4 \mu\text{s}$. Um ISI zwischen OFDM-Symbolen zu vermeiden, muss das zyklische Präfix $T_{CP} \geq T_{DS}$ sein, somit ist $T_{CP} \geq 4 \mu\text{s}$.
- e) Das das zyklische Präfix minimal gewählt werden soll ist $T_{CP} = 4 \mu\text{s}$. Durch die 16-QAM werden pro QAM-Symbol $m = \log_2(16) = 4 \frac{\text{Bit}}{\text{Symbol}}$ übertragen. Pro OFDM-Symbol werden N 16-QAM-Symbole übertragen, wobei ein OFDM-Symbol $T_M + T_{CP} = N \cdot T + T_{CP}$ dauert. Die Datenrate für eine feste, gegebene Zahl an Unterträgern beträgt

$$R_{\text{bit},N} = \frac{m \cdot N}{N \cdot T + T_{CP}}.$$

Steigt die Anzahl der Unterträger N , so steigt das Verhältnis der Nutzdatendauer NT des OFDM-Symbols zur Gesamtsymboldauer $NT + T_{CP}$. Somit berechnet sich die maximal erreichbare Datenrate zu

$$R_{\text{bit,max}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m \cdot N}{N \cdot T + T_{CP}} = \frac{m}{T} = \frac{4 \text{ Bit}}{1 \mu\text{s}} = 4 \cdot 10^6 \frac{\text{Bit}}{\text{s}}.$$

Aufgabe 9 (12 Punkte)

Gegeben Sei ein MIMO-System mit der Kanalmatrix:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ H_3 & H_4 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind H_i unabhängige, gleichverteilte Zufallsvariablen, die einer Bernoulliverteilung folgen. Das bedeutet

$$P(H_i = 0) = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad P(H_i = 1) = \frac{1}{2}.$$

- Bestimmen Sie die Anzahl der Sendeantennen N_T und die Anzahl der Empfangsantennen N_R . (2 Punkte)
- Wieviele unterschiedliche Kanalmatrizen gibt es insgesamt? (1 Punkt)
- Berechnen Sie die Kapazität dieses Kanals und nehmen Sie unabhängige und identisch verteilte Eingangssymbole sowie unabhängiges, unkorreliertes und identisch verteiltes Rauschen an. Dabei ist das Signal-Rausch-Verhältnis $\text{SNR} = 2$. (9 Punkte)

Lösung

- Aus der Kanalmatrix ergibt sich direkt $N_T = N_R = 2$.
- Jeder Kanalkoeffizient kann einen von 2 unterschiedlichen Werten annehmen. Damit gibt es insgesamt $2^4 = 16$ verschiedene Kanalmatrizen.
- Die Kapazität ergibt sich unter den in der Aufgabe dargelegten Randbedingungen zu

$$C_0 = \mathbb{E} \left\{ \log_2 \left(\det \left(\mathbf{I}_{N_R} + \frac{\text{SNR}}{N_T} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right) \right) \right\} = \mathbb{E} \left\{ \log_2 \left(\det \left(\mathbf{I}_2 + \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right) \right) \right\}.$$

Es gibt 16 mögliche, gleichwahrscheinliche (mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$) Kanalmatrizen.

zen. Für jede dieser Matrizen berechnen wir $\det(\mathbf{I}_2 + \mathbf{H}\mathbf{H}^H)$ und erhalten:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &: \det(\mathbf{I}_2 + \mathbf{H}\mathbf{H}^H) = 1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &: \det(\mathbf{I}_2 + \mathbf{H}\mathbf{H}^H) = 2 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &: \det(\mathbf{I}_2 + \mathbf{H}\mathbf{H}^H) = 2 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &: \det(\mathbf{I}_2 + \mathbf{H}\mathbf{H}^H) = 3 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &: \det(\mathbf{I}_2 + \mathbf{H}\mathbf{H}^H) = 2 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &: \det(\mathbf{I}_2 + \mathbf{H}\mathbf{H}^H) = 3 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &: \det(\mathbf{I}_2 + \mathbf{H}\mathbf{H}^H) = 4 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &: \det(\mathbf{I}_2 + \mathbf{H}\mathbf{H}^H) = 5 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &: \det(\mathbf{I}_2 + \mathbf{H}\mathbf{H}^H) = 2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &: \det(\mathbf{I}_2 + \mathbf{H}\mathbf{H}^H) = 4 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &: \det(\mathbf{I}_2 + \mathbf{H}\mathbf{H}^H) = 3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &: \det(\mathbf{I}_2 + \mathbf{H}\mathbf{H}^H) = 5 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &: \det(\mathbf{I}_2 + \mathbf{H}\mathbf{H}^H) = 3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &: \det(\mathbf{I}_2 + \mathbf{H}\mathbf{H}^H) = 5 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &: \det(\mathbf{I}_2 + \mathbf{H}\mathbf{H}^H) = 5 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &: \det(\mathbf{I}_2 + \mathbf{H}\mathbf{H}^H) = 5 . \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass

$$\det(\mathbf{I}_2 + \mathbf{H}\mathbf{H}^H) = \begin{cases} 1 & \text{mit Wkt. } \frac{1}{16} \\ 2 & \text{mit Wkt. } \frac{4}{16} \\ 3 & \text{mit Wkt. } \frac{4}{16} \\ 4 & \text{mit Wkt. } \frac{2}{16} \\ 5 & \text{mit Wkt. } \frac{5}{16} \end{cases} .$$

Damit ergibt sich die Kapazität zu

$$\begin{aligned} C_0 &= \mathbb{E}\left\{\log_2\left(\det\left(\mathbf{I}_2 + \mathbf{H}\mathbf{H}^H\right)\right)\right\} \\ &= \frac{1}{16} \cdot 0 + \frac{4}{16} \cdot 1 + \frac{4}{16} \cdot \log_2(3) + \frac{2}{16} \cdot 2 + \frac{5}{16} \log_2(5) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \log_2(3) + \frac{5}{16} \log_2(5) \\ &\approx 1,622 \frac{\text{Bit}}{\text{Kanalzugriff}}. \end{aligned}$$

Formelsammlung und Tabellen/*Formulary and Tables*

A Tabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$								
0,00	0,500000	0,80	0,788145	1,60	0,945201	2,40	0,991802	3,20	0,999313
0,02	0,507978	0,82	0,793892	1,62	0,947384	2,42	0,992240	3,22	0,999359
0,04	0,515953	0,84	0,799546	1,64	0,949497	2,44	0,992656	3,24	0,999402
0,06	0,523922	0,86	0,805105	1,66	0,951543	2,46	0,993053	3,26	0,999443
0,08	0,531881	0,88	0,810570	1,68	0,953521	2,48	0,993431	3,28	0,999481
0,10	0,539828	0,90	0,815940	1,70	0,955435	2,50	0,993790	3,30	0,999517
0,12	0,547758	0,92	0,821214	1,72	0,957284	2,52	0,994132	3,32	0,999550
0,14	0,555670	0,94	0,826391	1,74	0,959070	2,54	0,994457	3,34	0,999581
0,16	0,563559	0,96	0,831472	1,76	0,960796	2,56	0,994766	3,36	0,999610
0,18	0,571424	0,98	0,836457	1,78	0,962462	2,58	0,995060	3,38	0,999638
0,20	0,579260	1,00	0,841345	1,80	0,964070	2,60	0,995339	3,40	0,999663
0,22	0,587064	1,02	0,846136	1,82	0,965621	2,62	0,995604	3,42	0,999687
0,24	0,594835	1,04	0,850830	1,84	0,967116	2,64	0,995855	3,44	0,999709
0,26	0,602568	1,06	0,855428	1,86	0,968557	2,66	0,996093	3,46	0,999730
0,28	0,610261	1,08	0,859929	1,88	0,969946	2,68	0,996319	3,48	0,999749
0,30	0,617911	1,10	0,864334	1,90	0,971283	2,70	0,996533	3,50	0,999767
0,32	0,625516	1,12	0,868643	1,92	0,972571	2,72	0,996736	3,52	0,999784
0,34	0,633072	1,14	0,872857	1,94	0,973810	2,74	0,996928	3,54	0,999800
0,36	0,640576	1,16	0,876976	1,96	0,975002	2,76	0,997110	3,56	0,999815
0,38	0,648027	1,18	0,881000	1,98	0,976148	2,78	0,997282	3,58	0,999828
0,40	0,655422	1,20	0,884930	2,00	0,977250	2,80	0,997445	3,60	0,999841
0,42	0,662757	1,22	0,888768	2,02	0,978308	2,82	0,997599	3,62	0,999853
0,44	0,670031	1,24	0,892512	2,04	0,979325	2,84	0,997744	3,64	0,999864
0,46	0,677242	1,26	0,896165	2,06	0,980301	2,86	0,997882	3,66	0,999874
0,48	0,684386	1,28	0,899727	2,08	0,981237	2,88	0,998012	3,68	0,999883
0,50	0,691463	1,30	0,903200	2,10	0,982136	2,90	0,998134	3,70	0,999892
0,52	0,698468	1,32	0,906582	2,12	0,982997	2,92	0,998250	3,72	0,999900
0,54	0,705401	1,34	0,909877	2,14	0,983823	2,94	0,998359	3,74	0,999908
0,56	0,712260	1,36	0,913085	2,16	0,984614	2,96	0,998462	3,76	0,999915
0,58	0,719043	1,38	0,916207	2,18	0,985371	2,98	0,998559	3,78	0,999922
0,60	0,725747	1,40	0,919243	2,20	0,986097	3,00	0,998650	3,80	0,999928
0,62	0,732371	1,42	0,922196	2,22	0,986791	3,02	0,998736	3,82	0,999933
0,64	0,738914	1,44	0,925066	2,24	0,987455	3,04	0,998817	3,84	0,999938
0,66	0,745373	1,46	0,927855	2,26	0,988089	3,06	0,998893	3,86	0,999943
0,68	0,751748	1,48	0,930563	2,28	0,988696	3,08	0,998965	3,88	0,999948
0,70	0,758036	1,50	0,933193	2,30	0,989276	3,10	0,999032	3,90	0,999952
0,72	0,764238	1,52	0,935745	2,32	0,989830	3,12	0,999096	3,92	0,999956
0,74	0,770350	1,54	0,938220	2,34	0,990358	3,14	0,999155	3,94	0,999959
0,76	0,776373	1,56	0,940620	2,36	0,990862	3,16	0,999211	3,96	0,999963
0,78	0,782305	1,58	0,942947	2,38	0,991344	3,18	0,999264	3,98	0,999966

B Folgen und Reihen/*Sequences and Series*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1 \quad (\text{B.1})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1 \quad (\text{B.2})$$

$$\sum_{n=0}^k x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}, \quad x \neq 1 \quad (\text{B.3})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \dots = (1+x)^r, \quad \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots = e^x, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{B.5})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \dots = \ln(x), \quad 0 < x \leq 2 \quad (\text{B.6})$$

$$\sum_{n=1}^k n = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}, \quad k \geq 1 \quad (\text{B.7})$$

C Integralrechnung/*Integrals*

$$\int \delta(x-x_0) \varphi(x) dx = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad (\text{C.1})$$

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) \quad (\text{C.2})$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^3} (a^2 x^2 - 2ax + 2) \quad (\text{C.3})$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{C.4})$$

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) \quad (\text{C.5})$$

$$\int \sin(ax) \cos(ax) dx = -\frac{\cos^2(ax)}{2a}, \quad a \neq 0 \quad (\text{C.6})$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}, \quad a > 0, n \in \mathbb{N} \quad (\text{C.7})$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \quad \text{für } a > 0 \quad (\text{C.8})$$

D Formeln zur Fouriertransformation/*Fourier Transformation*

Definition

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad \circ \bullet \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = X(f) \quad (\text{D.1})$$

Eigenschaften/*Properties*

$$\sum c_i x_i(t) \quad \circ \bullet \quad \sum c_i X_i(f) \quad (D.2)$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \quad \circ \bullet \quad (j2\pi f)^n X(f) \quad (D.3)$$

$$x(t - t_0) \quad \circ \bullet \quad e^{-j2\pi f t_0} X(f) \quad (D.4)$$

$$e^{j2\pi f_0 t} x(t) \quad \circ \bullet \quad X(f - f_0) \quad (D.5)$$

$$x(t) * y(t) \quad \circ \bullet \quad X(f)Y(f) \quad (D.6)$$

$$x(t)y(t) \quad \circ \bullet \quad X(f) * Y(f) \quad (D.7)$$

$$x(t/a) \quad \circ \bullet \quad |a|X(af) \quad (D.8)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \quad (D.9)$$

Korrespondenzen/*Transform Pairs*

$$1 \quad \circ \bullet \quad \delta(f) \quad (D.10)$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \quad \circ \bullet \quad \frac{1}{2}\delta(f + f_0) + \frac{1}{2}\delta(f - f_0) \quad (D.11)$$

$$F \cdot \text{sinc}(Ft) = \frac{\sin(\pi Ft)}{\pi t} \quad \circ \bullet \quad X(f) = \begin{cases} 1, & |f| < \frac{F}{2} \\ 0, & |f| > \frac{F}{2} \end{cases} \quad (D.12)$$

$$e^{-\pi t^2} \quad \circ \bullet \quad e^{-\pi f^2} \quad (D.13)$$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \quad \circ \bullet \quad T \cdot \text{sinc}(Tf) = \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} \quad (D.14)$$

$$\frac{1}{2}\delta(t + t_0) + \frac{1}{2}\delta(t - t_0) \quad \circ \bullet \quad \cos(2\pi f t_0) \quad (D.15)$$

$$\delta(t) \quad \circ \bullet \quad 1 \quad (D.16)$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \quad \circ \bullet \quad \frac{j}{2}\delta(f + f_0) - \frac{j}{2}\delta(f - f_0) \quad (D.17)$$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \circ \bullet \quad \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \quad (D.18)$$

$$e^{-a|t|}, \quad a > 0 \quad \circ \bullet \quad \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} \quad (D.19)$$

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad a > 0 \quad \circ \bullet \quad \frac{1}{a + j2\pi f} \quad (D.20)$$

$$x(t) = \begin{cases} te^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad a > 0 \quad \circ \bullet \quad \frac{1}{(a + j2\pi f)^2} \quad (D.21)$$

$$\frac{1}{\pi t} \quad \circ \bullet \quad -j \text{sign}(f) \quad (D.22)$$

$$j \text{sign}(t) \quad \circ \bullet \quad \frac{1}{\pi f} \quad (D.23)$$

$$\mathcal{H}\{x(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\lambda)}{t - \lambda} d\lambda \quad \circ \bullet \quad -j \text{sign}(f)X(f) \quad (D.24)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \quad \circ \bullet \quad \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) \quad (D.25)$$

E Trigonometrie/*Trigonometry*

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad (\text{E.1})$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad (\text{E.2})$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y)) \quad (\text{E.3})$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y)) \quad (\text{E.4})$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y)) \quad (\text{E.5})$$