

Schriftliche Prüfung zur Vorlesung

Nachrichtentechnik I

06.04.2018

Musterlösung

Hinweise

Die Prüfungsdauer beträgt **drei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **zehn** gleichgewichteten Aufgaben zu bearbeiten. Benutzen Sie nur die vorgedruckten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an.

Verwenden Sie zur Bearbeitung einen **dokumentenechten Stift** und keine rote Farbe. Schreiben Sie leserlich und vermeiden Sie, das vorgedruckte Doppelblatt zu beschriften. Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der **Lösungsweg** und die **gültige Lösung eindeutig erkennbar** sein, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann.

Abzugeben sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten und nach Aufgabennummer sortierten Ausarbeitungen. Nicht abzugeben sind die Aufgabenblätter sowie Ihr Konzeptpapier.

Zugelassene Hilfsmittel

Erlaubt sind **ein** beidseitig von eigener Hand mit Bleistift, Kugelschreiber, Füller o. Ä. beschriebenes **A4-Blatt** (Original, keine Kopie) sowie ein **nicht-programmierbarer** Taschenrechner.

Nach der Prüfung

Das **Ergebnis** Ihrer Prüfung erfahren Sie ab dem **27.04.2018** durch Aushang im Schaukasten des Instituts (Geb. 30.34, Lichttechnisches Institut, EG). Die **Klausureinsicht** ist am Dienstag, den **03.05.2018** im Seminarraum des Instituts (Geb. 05.01, Kreuzstr. 11, 3. OG) von 9:00 bis 11:00 Uhr. Die **mündliche Nachprüfung** findet am **08.05.2018** statt.

Aufgabe 1

Eine Quelle liefert die Zeichen $X \in \{A, B, C, D, E, F, G\}$ mit den Auftretenswahrscheinlichkeiten $P(x)$.

x	A	B	C	D	E	F	G
$P(x)$	0,1	0,05	0,1	0,3	0,2	0,03	0,22
$C(x)$	1111	11101	110	10	01	111100	00

- Geben Sie die Redundanz der Quelle an.
- Die Quellsymbole seien gemäß $C(x)$ aus obiger Tabelle codiert. Bilden die Codewörter $C(x)$ einen Huffman-Code? Begründung!
- Erzeugen Sie einen Huffman-Code für X und berechnen Sie die Redundanz dieses Codes.
- Eine andere Quelle Y liefert 2^n verschiedene Symbole, die alle dieselbe Auftretenswahrscheinlichkeit haben. Wie groß ist die Redundanz eines beliebigen Huffman-Codes für die Quelle Y ? Begründung!

Lösung

- Die Redundanz der Quelle ist $R_Q = H_0 - H(X)$, wobei $H_0 = \log_2(7) = 2,807\text{bit}/\text{Zeichen}$ und $H(X) = -\sum_{n=1}^7 P(X) \log_2 P(X) = 2,498\text{bit}/\text{Zeichen}$ ist. Es folgt $R_Q = 0,3087\text{bit}/\text{Zeichen}$.
- Nein, da $C(A)$ Präfix von $C(F)$ ist, ein Huffman-Code aber präfixfrei wäre.
- Ein möglicher Codebaum ist in der folgenden Abbildung dargestellt. Die mittlere Codewortlänge ist $H_C = 2,54\text{bit}$, woraus die Redundanz zu $R_C = 0,042\text{bit}/\text{Zeichen}$ folgt.

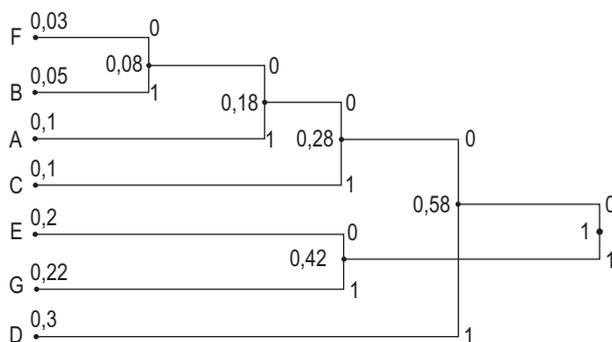


Abbildung 1: Codebaum zum Huffman-Code für das Alphabet X

- Jedes Codewort hat eine Länge von $L = \log_2(2^n) = n$. Die Entropie der Quelle ist

$$\begin{aligned}
 H(X) &= -\sum_{l=1}^n P(x) \log_2 P(x) = -2^n P(x) \log_2 P(x), \quad \text{wobei } P(x) = \frac{1}{2^n} \\
 &= -2^n \cdot \frac{1}{2^n} \log_2 \frac{1}{2^n} = n
 \end{aligned}$$

Es folgt also $R_C = L - H(X) = 0$. (Ergebnis für $H(X)$ ergibt sich auch ohne Rechnung aus der Gleichverteilung.)

Aufgabe 2

Es soll ein OFDMA-System für $K = 4$ Nutzer ausgelegt werden. Die Nutzertrennung wird dabei durch Zuteilung von je l Unterträgern an jeden Nutzer realisiert. Zur Kanalcodierung wird ein Code mit der Coderate $r = \frac{1}{2}$ eingesetzt.

Die zur Verfügung stehende Bandbreite beträgt $B = 20$ MHz. Kanalmessungen haben eine Kanalkohärenzbandbreite von $B_c = 100$ kHz und eine maximale Mehrwegelaufzeit von $\tau_{\max} = 10$ μ s ergeben.

- Welchen entscheidenden Vorteil bietet OFDM in Mehrwegekanälen gegenüber Einträgerübertragungsverfahren?
- Es soll mit möglichst wenigen Unterträgern insgesamt gearbeitet werden. Welche Werte ergeben sich unter dieser Randbedingung für die Anzahl an Unterträgern pro Nutzer l , für den Unterträgerabstand Δf und für die OFDM-Nutzsymboldauer T_N ?
- Wozu wird bei OFDM das Schutzintervall zwischen den OFDM-Nutzsymbolen benötigt und warum wird es als cyclic prefix ausgelegt?
- Geben Sie die minimale Länge L_G des Schutzintervalls in Samples an. Gehen sie dabei von einer Samplingrate $f_S = B$ aus! Welcher SNR Verlust entsteht dadurch?
- Die Systemdatenrate R_{System} soll mindestens 11 Mbit/s betragen. Wie viele Symbole muss das verwendete Modulationsverfahren mindestens besitzen, um die gewünschte Datenrate zu erreichen? Nennen Sie ein geeignetes Modulationsverfahren.

Lösung

- Durch die im Vergleich zu Einträgersystemen gleicher Systembandbreite längere Symboldauer sind OFDM-Systeme weniger anfällig für Intersymbolinterferenz, wodurch die Entzerrung vereinfacht wird.
- Aufgrund der Randbedingung, möglichst wenige Unterträger zu verwenden, ist das kleinste l gesucht, für das die Ungleichung

$$\frac{B}{N} = \frac{B}{Kl} = \Delta f \leq B_c \implies l \geq \frac{B}{KB_c}$$

erfüllt ist. Dies ist für $l = 50$ der Fall. Damit ergibt sich $N = Kl = 200$, $\Delta f = \frac{B}{N} = 100$ kHz und $T_N = \frac{N}{B} = 10$ μ s.

- Das Schutzintervall ist notwendig, damit die Mehrwegeausbreitung nicht zu Intersymbolinterferenz führt. Durch zyklische Verlängerung des OFDM-Sendesymbols resultiert die durch Mehrwege entstehende Verzögerung im Frequenzbereich lediglich in einer Phasendrehung, welche durch eine komplexe Multiplikation korrigiert werden kann.

d) $L_G = \left\lceil \frac{\tau_{\max}}{T_S} \right\rceil = \lceil \tau_{\max} B \rceil = 200$

$$\text{SNR}_{\text{loss}} = 10 \log_{10} \left(1 + \frac{L_G}{N} \right) = 3 \text{ dB}$$

(Alternative Begründung: Beide Ergebnisse folgen, da die Laufzeit genau der Symboldauer entspricht. Somit entspricht die Länge des CP genau der OFDM-Symbollänge.)

- Aus dem Ansatz

$$11 \text{ Mbit s}^{-1} = R_{\text{System}} \leq r \log_2(M) \cdot \frac{N}{T_N + T_G}$$

folgt:

$$\log_2(M) \geq \frac{R_{\text{System}}}{r} \cdot \frac{T_N + L_G T_S}{N} = 2.2 \Rightarrow M_{\min} = 5 \text{ (oder gleich 2-er Potenz: 8)}$$

Ein geeignetes, gebräuchliches Modulationsverfahren wäre bspw. 8-PSK.

Aufgabe 3

Gegeben ist ein System zur Übertragung binärer Information, welches die Signalpunkte $\{s_1 = 1, s_2 = 3\}$ verwendet. Es sei $P(s_1) = 1/4$ und $P(s_2) = 3/4$.

Der Kanal ist ein AWGN-Kanal, d.h. er addiert reellwertiges mittelwertfreies, weißes, Gauß'sches Rauschen der Rauschleistung σ^2 .

- Bestimmen Sie die Entscheidungsgrenzen im Empfänger unter Verwendung des ML- und des MAP-Kriteriums.
- Skizzieren Sie die Entscheidungsgrenzen für $\sigma^2 = 1/\ln(3)$.
- Geben Sie Bitfehlerwahrscheinlichkeiten für $\sigma^2 = 10^{-4}$ und $\sigma^2 = 10^4$ *approximativ* an. Begründen Sie!

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben gelöst werden.

- Weisen Sie nach, dass durch Abtastung des Matched-Filter-Ausgangs die Korrelation berechnet wird.

Lösung

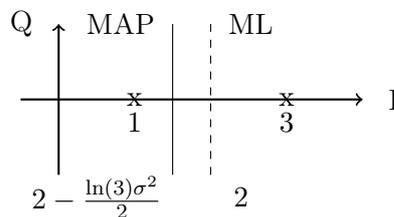
- Unter ML werden die Symbole als gleichwahrscheinlich angenommen. In diesem Fall entspricht die Entscheidungsgrenze 2.

Für die Entscheidungsgrenze γ bei MAP erhält man:

$$\begin{aligned}
 P(1)f(\gamma|1) &\stackrel{!}{=} f(\gamma|3)P(3) \iff \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{|\gamma-1|^2}{2\sigma^2}} \stackrel{!}{=} \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{|\gamma-3|^2}{2\sigma^2}} \\
 &\iff e^{-\frac{|\gamma-1|^2}{2\sigma^2}} \stackrel{!}{=} 3e^{-\frac{|\gamma-3|^2}{2\sigma^2}} \\
 &\iff \frac{|\gamma-1|^2}{2\sigma^2} \stackrel{!}{=} \frac{|\gamma-3|^2}{2\sigma^2} - \ln(3) \\
 &\iff (\gamma-1)^2 \stackrel{!}{=} (\gamma-3)^2 - \ln(3) \cdot 2\sigma^2 \\
 &\iff \gamma \stackrel{!}{=} 2 - \frac{1}{2} \ln(3)\sigma^2
 \end{aligned}$$

Die MAP-Entscheidungsgrenze folgt damit zu $(2 - \frac{1}{2} \ln(3)\sigma^2)$.

- Die Entscheidungsgrenzen sind in folgender Skizze dargestellt.



- Ohne Rauschen (bei $\sigma^2 = 10^{-4}$) entstehen keine Fehler. Damit ist

$$P_{\text{ML}, \sigma^2=10^{-4}} \approx P_{\text{MAP}, \sigma^2=10^{-4}} \approx 0.$$

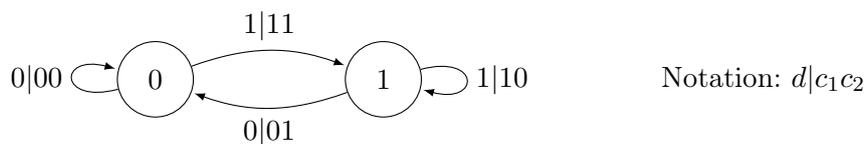
Bei $\sigma^2 = 10^4$ verschwindet das Signal im Rauschen. Der ML-Entscheider wird praktisch nur von der Rauschrealisierung beeinflusst; die Entscheidung ist nahezu unabhängig vom gesendeten Symbol! Daher geht hier die Bitfehlerrate gegen $P_{\text{ML}, \sigma^2=10^4} = 1/2$. Der MAP-Entscheider verwendet die Entscheidungsgrenze $\approx -\infty$ und entscheidet fast immer für s_2 . Damit entsteht nur dann ein Fehler, wenn s_1 gesendet wurde. Es folgt $P_{\text{MAP}, \sigma^2=10^4} = 1/4$.

d) Für das Empfangssignal $r(t)$ und $h(t) = s^*(T - t)$ rechnet man:

$$\begin{aligned} r(t) * h(t) \Big|_{t=T} &= \int_{-\infty}^{\infty} r(t - \tau) h(\tau) \, d\tau \Big|_{t=T} = \int_{-\infty}^{\infty} r(t - \tau) s^*(T - \tau) \, d\tau \Big|_{t=T} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} r(T - \tau) s^*(T - \tau) \, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} r(t') s^*(t') \, dt' \end{aligned}$$

Aufgabe 4

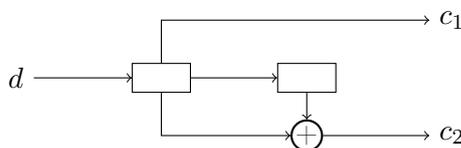
Es sei folgendes Zustandsdiagramm eines Faltungscoders gegeben. Dabei beschreibt d das eingehende Datenbit und $\mathbf{c} = (c_1 \ c_2)$ die entsprechenden Codebits.



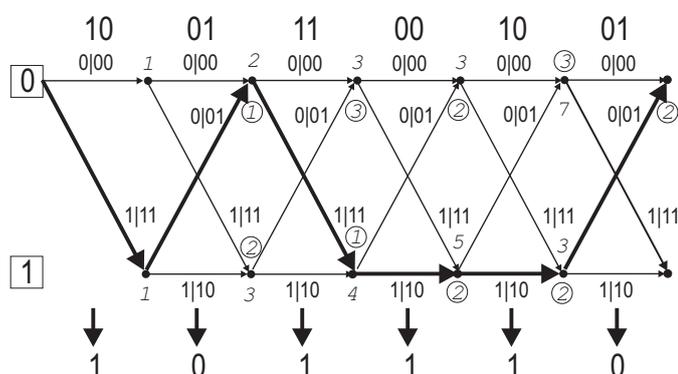
- Welche Coderate realisiert ein Faltungscoder mit dem angegebenen Zustandsdiagramm?
- Zeichnen Sie die Schieberegister-Realisierung des Faltungscoders.
- Bestimmen Sie die zu den Datenbits $\mathbf{d} = (1, 0, 1)$ gehörenden Codebits \mathbf{c} . Der Anfangszustand sei dabei 0. (**Hinweis:** Der Code wird nicht terminiert.)
- Bestimmen Sie mit Hilfe des Viterbi-Algorithmus diejenigen Datenbits, die mit höchster Wahrscheinlichkeit gesendet wurden, wenn die Codebits $\mathbf{r} = (10 \ 01 \ 11 \ 00 \ 10 \ 01)$ empfangen wurden. Der Anfangszustand sei ebenfalls 0.
- Was unterscheidet Hard-Decision (HD) von Soft-Decision (SD) bei der Decodierung von Faltungscodes? Vergleichen Sie qualitativ deren Leistungsfähigkeit.

Lösung

- $R = 1/2$
- Schieberegister-Realisierung des Faltungscoders:



- Durch Nachverfolgen im Zustandsdiagramm folgt: $\mathbf{c} = (11 \ 01 \ 11)$
- Anwendung des Viterbi-Algorithmus liefert $\mathbf{d} = (101110)$:



- Bei HD wird seitens des Demodulators auf Bits entschieden und im Decodierer der Hamming-Abstand verwendet. Bei SD liefert der Demodulator „Softwerte“, also reelle Zahlen, und der Decodierer arbeitet mit dem Euklid'schen Abstand.

Da bei SD mehr Information zur Verfügung steht, ist die Leistungsfähigkeit von SD höher.

Aufgabe 5

Sie verwenden ein 2×1 -MIMO-System zur Übertragung. Es soll die Bitfolge $(1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$ mittels 4-QAM übertragen werden.

- Erstellen Sie ein Diagramm der Modulationspunkte unter Verwendung einer Gray-Codierung, wobei 00 dem Konstellationspunkt $1 + j$ zugeordnet ist. Geben Sie die bei der Übertragung obiger Bitfolge entstehenden Symbole an.
- Die Übertragung erfolgt mit dem Alamouti-Code. Geben Sie an, zu welchem Zeitpunkt über welche Antenne welches Symbol abgestrahlt wird.
- Wie verhält sich die Kapazität dieses Systems relativ zu einem SISO-System?
- Sie empfangen die Symbole $(1 + j, 0)$ und beobachten den Kanal $(h_1, h_2) = (1, j)$. Berechnen Sie die Entscheidungsgrößen $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ und demodulieren Sie anschließend mit der Konstellation aus Teilaufgabe a).

Nun wird ein 2×2 -MIMO-System zur Übertragung derselben QAM-Symbole verwendet.

- Geben Sie die Sendesymbole der Antennen für V-BLAST und D-BLAST an.

Hinweis: Achten Sie bei Ihren Skizzen auf die Achsenbeschriftungen!

Lösung

- Mögliche Zuordnungen:

1. Mögl.	bits	2. Mögl.
$1 + j$	\leftrightarrow 00	$1 + j$
$-1 + j$	\leftrightarrow 01	$1 - j$
$-1 - j$	\leftrightarrow 11	$-1 - j$
$1 - j$	\leftrightarrow 10	$-1 + j$

Die Symbolfolge ergibt sich zu:

$$\mathbf{s} = (1 - j, -1 - j, -1 + j, 1 + j)$$

oder

$$\mathbf{s} = (-1 + j, -1 - j, 1 - j, 1 + j)$$

- Anwendung der Konstruktionsregel für Alamouti $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ -s_2^* & s_1^* \end{pmatrix}$ liefert (Achtung! Buch beinhaltet *abweichende/falsche* Form!):

$$\mathbf{G}_{\text{Alamouti}} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 - j & -1 - j & -1 + j & 1 + j \\ 1 - j & 1 + j & -1 + j & -1 - j \end{array} \right)$$

Hierbei entspricht die obere Zeile der ersten Antenne.

- Die Kapazität hängt von der Anzahl der Singulärwerte ab. Diese ist 1, womit das verwendete Schema dieselbe Kapazität wie ein SISO-System besitzt.
- Die Entscheidungsgrößen entstehen über

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^* & h_2 \\ h_2^* & -h_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r[1] \\ r^*[2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & j \\ -j & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + j \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + j \\ 1 - j \end{pmatrix}$$

Demodulation liefert die Bitfolge (0010).

e) Durch Nachvollziehen der Konstruktionsvorschrift folgt:

$$\mathbf{G}_{\text{V-BLAST}} = \begin{pmatrix} 1-j & -1+j \\ -1-j & 1+j \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{\text{D-BLAST}} = \begin{pmatrix} 1-j & -1-j & -1+j & 1+j & 0 \\ 0 & 1-j & -1-j & -1+j & 1+j \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

Das Empfangs-Bandpasssignal eines Systems laute

$$r_{\text{BP}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \cdot \text{Bsinc}(\pi B(t - nT_S)) \cdot \cos\left(2\pi f_T t - \frac{\pi}{3}\right)$$

mit $I_n \in \{-3, -1, 1, 3\}$.

- Geben Sie das Basisbandsignal des Systems an.
- Welche Modulationsart verwendet das System?
- Skizzieren Sie qualitativ die Pulsformung und deren Betragsfrequenzgang. Welche Vor- und Nachteile ergeben sich durch die gewählte Pulsformung?
- Welches Problem liegt am Empfänger vor und wie kann dieses behoben werden?

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von den bisherigen Ergebnissen gelöst werden.

- Skizzieren Sie den Aufbau eines Systems zur Erzeugung eines Basisbandsignals aus einem Bandpasssignal.

Lösung

- Das Basisbandsignal entsteht durch Vergleich mit $r_{\text{BP}}(t) = \text{Re}\{r(t)e^{j2\pi f_T t}\}$ zu:

$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \cdot \text{Bsinc}(\pi B(t - nT_S)) \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

Beachte insbesondere die Phasenverschiebung!

- Modulationsart: Aufgrund der Reellwertigkeit und der 4 Stufen ist dies eine 4-ASK. (Der konstante Phasenterm im cos entspricht hierbei einer durch den Kanal verursachten Phasendrehung.)

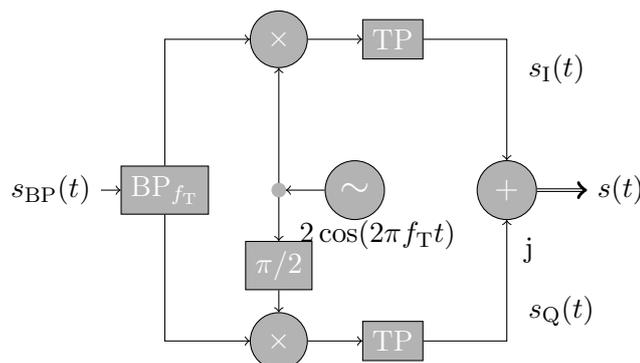
- Sinc im Zeitbereich ergibt Rechteck im Frequenzbereich. Skizze dürfte klar sein. Durch den Betrag verschwindet die Phase.

Damit besitzt das System ideale TP-Charakteristik, allerdings zum Preis (theoretisch) unendlich langer Pulsformung.

- Die Phasendrehung reduziert – sofern sie nicht korrigiert wird – den Abstand zu den Entscheidungsgrenzen, was eine höhere BER nach sich zieht. Es wird somit eine Phasenschätzung notwendig.

Der eingesetzte Puls ist unendlich ausgedehnt, und daher nicht realisierbar. Es könnte stattdessen beispielsweise ein Root-Raised Cosine eingesetzt werden.

- Der Aufbau ist wie in der Vorlesung besprochen:



Aufgabe 7

In einem CDMA-Mobilfunksystem mit rechteckiger Pulsformung im Zeitbereich senden zwei mobile Nutzer so, dass ihre Signale zeitsynchron am Empfänger der Basisstation ankommen. Nutzer 1 verwendet den OVSF-Code $\mathbf{c}_1 = (+1, +1, -1, -1)$ und Nutzer 2 den Code $\mathbf{c}_2 = (+1, -1)$.

- a) Zeigen Sie, dass die Codes im synchronen Fall orthogonal und im nicht-synchronen Fall nicht orthogonal sind.

Nun überträgt Nutzer 1 die Bits $\mathbf{b}_1 = (0, 1)$ und Nutzer 2 die Bits $\mathbf{b}_2 = (0, 0, 0, 1)$. Die Informationsbits b beider Nutzer sind BPSK-moduliert gemäß $s = (-1)^b$.

- b) Erzeugen und skizzieren Sie das ungestörte Empfangssignal. (**Hinweis:** Achsenbeschriftung!)

Zum Beginn eines Rahmens werden folgende Chipwerte empfangen:

... || +2,51 | +0,72 | -0,29 | -1,6 | +0,90 | -3,15 | +0,40 | +2,83 | ...

Dabei zeigt || den Rahmenbeginn an, und | trennt die Empfangswerte im Chiptakt. Die Abtastwerte sind durch Rauschen gestört.

- c) Prüfen Sie *durch Rechnung*, welche Bits durch einen CDMA-Empfänger rekonstruiert werden.
d) Geben Sie eine Schätzung für die mittlere Rauschleistung an.
e) Welches SNR hat Nutzer 1 nach dem Entspreizen?

Lösung

- a) Man rechnet für den synchronen Fall (periodische Wiederholung) die Orthogonalität gemäß:

$$\sum_{n=0}^2 c_{1,n} c_{2,n} = 0, \quad \sum_{n=0}^4 c_{1,n} c_{2,n} = 0$$

Im asynchronen Fall ist beispielsweise:

$$c_{1,2} c_{2,1} + c_{1,3} c_{2,2} = 2 \neq 0,$$

die Codes sind nicht orthogonal.

- b) Durch Verwendung der Bits ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{s}_1 &= +1| +1| -1| -1| -1| -1| +1| +1 \\ \hat{s}_2 &= +1| -1| +1| -1| +1| -1| -1| +1 \end{aligned}$$

und damit

$$\hat{s} = \hat{s}_1 + \hat{s}_2 = +2|0|0| -2|0| -2|0| +2$$

- c) Entspreizen von Nutzer 1:

$$\begin{aligned} b_{1,1} &= \frac{1}{4} \cdot (+2,51 + 0,72 + 0,29 + 1,60) = +1,28 > 0 \rightarrow b_{1,1} = 0 \\ b_{2,1} &= \frac{1}{4} \cdot (+0,90 - 3,15 - 0,40 - 2,83) = -1,37 < 0 \rightarrow b_{2,1} = 1 \end{aligned}$$

Entspreizen von Nutzer 2:

$$\begin{aligned}b_{1,2} &= \frac{1}{2} \cdot (+2,51 - 0,72) = +0,895 > 0 \rightarrow b_{1,2} = 0 \\b_{2,2} &= \frac{1}{2} \cdot (-0,29 + 1,60) = +0,655 > 0 \rightarrow b_{2,2} = 0 \\b_{3,2} &= \frac{1}{2} \cdot (+0,90 + 3,15) = +2,025 > 0 \rightarrow b_{3,2} = 0 \\b_{4,2} &= \frac{1}{2} \cdot (+0,40 - 2,83) = -1,215 < 0 \rightarrow b_{4,2} = 1\end{aligned}$$

- d) Rauschen entsteht als die Differenzamplituden zwischen Empfangssignal und rekonstruiertem Signal:

$$\Delta_i = | +0,51 | +0,72 | -0,29 | +0,40 | +0,90 | -1,15 | +0,40 | +0,83 | \dots$$

Schätzung für die mittlere Rauschleistung durch:

$$P_N = \frac{1}{8} \cdot \sum_{i=1}^8 \Delta_i^2 = 0,5$$

- e) Die mittlere Sendesignalleistung für Nutzer 1 ist 1 (auf Chipebene). Durch Entspreizung entsteht ein Spreizgewinn um Faktor 4. Damit folgt:

$$\text{SNR}_1 = \frac{1 \cdot 4}{\frac{1}{2}} = 8 \equiv 9 \text{ dB}$$

Aufgabe 8

Gegeben sei das Datenwort $\mathbf{d}^T = (1, 1, 0, 1)$ und das Generatorpolynom $g(x) = x^4 + x^2 + x + 1$ eines systematischen Blockcodes.

- Bestimmen Sie n und k .
- Geben Sie die Generatormatrix des systematischen Codes an.
- Kann $g(x)$ das Generatorpolynom eines zyklischen Blockcodes sein? Beweisen Sie Ihre Antwort durch Rechnung.
- Berechnen Sie durch eine geeignete Rechnung *mit Polynomen* die an das Datenwort anzuhängenden Paritycheckbits. Geben Sie das Codewort in Vektorschreibweise an.
- Prüfen Sie Ihr Ergebnis aus der letzten Teilaufgabe durch Matrix-Vektor-Rechnung.

Hinweis: Geben Sie Rechnungen und Ansätze an!

Lösung

- Die Länge von \mathbf{d} ergibt $k = 4$. Da der Grad von $g(x)$ gerade $n - k$ entspricht, folgt $n = 8$.
- Konstruktion der Generatormatrix:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Man rechnet:

$$(x^8 + 1) : g(x) = x^4 + x^2 + x, \text{ Rest } x + 1.$$

Damit ist $x^n + 1$ nicht durch $g(x)$ teilbar und es wird kein zyklischer Code erzeugt.

- Zur Berechnung des Parity-Polynoms erfolgt die Berechnung von $x^{n-k}d(x) : g(x)$:

$$x^4 \cdot (x^3 + x^2 + 1) = x^7 + x^6 + x^4$$

und damit:

$$(x^7 + x^6 + x^4) : (x^4 + x^2 + x + 1) = x^3 + x^2 + x + 1, \text{ Rest } x^3 + x^2 + 1$$

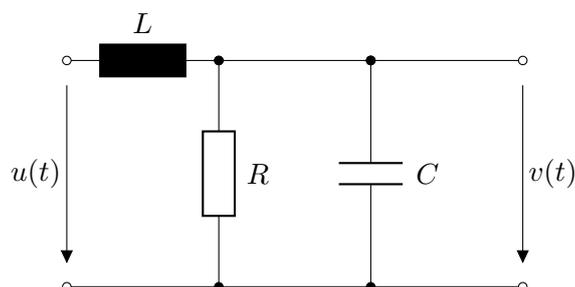
Also ist $\mathbf{c}^T = (1101 \ 1101)$.

- Die Matrix \mathbf{G} erhält man aus der zweiten Teilaufgabe. Damit folgt:

$$\mathbf{c}^T = \mathbf{d}^T \mathbf{G} = \dots = (1101 \ 1101).$$

Aufgabe 9

Gegeben sei das folgende RLC-Netzwerk:



An den Eingang des Netzwerkes wird ein Rauschgenerator angeschlossen, der weißes Gauß'sches Rauschen der Leistungsdichte N_0 erzeugt.

- Bestimmen Sie den Frequenzgang $H(f) = \frac{V(f)}{U(f)}$ des Netzwerkes.
- Geben Sie das Leistungsdichtespektrum $\Phi_{VV}(f)$ am Ausgang des Netzwerkes an. Begründen Sie, ob das System Hochpass-, Tiefpass- oder Bandpasscharakteristik besitzt.

Nun wird der Kondensator C entfernt, sodass das Netzwerk noch aus dem Rauschgenerator, der Spule L und dem Widerstand R besteht.

- Geben Sie das Leistungsdichtespektrum am Ausgang des Netzwerkes an.
- Berechnen Sie die Leistung des Eingangs- und Ausgangsprozesses des Netzwerkes *ohne Kondensator*.

Lösung

- Durch Anwendung entsprechender Regeln folgt:

$$H(f) = \frac{V(f)}{U(f)} = \frac{1}{1 - (2\pi f)^2 LC + j(2\pi f) \frac{L}{R}}$$

- Die Leistungsdichte am Ausgang entsteht als Leistungsdichte am Eingang multipliziert mit dem Betragsquadrat des Frequenzgangs und liefert:

$$\Phi_{VV}(f) = \Phi_{UU}(f) \cdot |H(f)|^2 = N_0 \cdot |H(f)|^2 = \frac{N_0}{(1 - (2\pi f)^2 LC)^2 + (2\pi f \frac{L}{R})^2}$$

Wegen $\Phi_{VV}(0) = N_0$ und $\Phi_{VV}(f) \rightarrow 0, f \rightarrow \infty$ handelt es sich um eine Tiefpass.

- Ohne Kondensator folgt:

$$\Phi_{VV}(f) = \frac{N_0}{1 + (2\pi f \frac{L}{R})^2}$$

- Die Leistung ergibt sich als Integral über die Leistungsdichte oder als AKF an der Stelle 0:

$$P_S = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{SS}(f) df = \varphi_{SS}(0).$$

Für den Eingangsprozess folgt: $\Phi_{UU}(f) = N_0 \Rightarrow P_U = \infty$.

Beim Ausgangsprozess ergibt sich über die Korrespondenz der Fourier-Transformation (s. Anhang): $P_V = \frac{N_0 R}{2L}$

Aufgabe 10

Hinweis: Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

- a) Wodurch entsteht Inter-Symbol-Interferenz? Welche Nachteile bzw. Konsequenzen ergeben sich hieraus? Wie kann dies vermieden werden?
- b) Sie betreiben ein Kommunikationssystem, welches die Daten in QPSK-Symbole moduliert. Für den Kanal gelte das Signalmodell $r = ae^{j\varphi}s$, $a > 0$. Für welche Parameter a, φ funktioniert Ihr System fehlerfrei?
- c) Erklären Sie, weswegen die Nulldurchgänge bei QPSK problematisch sein können. Welche Lösung hierfür kennen Sie? Erklären Sie, wieso die Nulldurchgänge hierdurch vermieden werden.
- d) Erläutern Sie die Idee bei der Verwendung von DPSK. In welchen Szenarien bzw. unter welchen Randbedingungen ist DPSK vorteilhaft?

Lösung

- a) ISI entsteht entweder durch einen Mehrwegekanal oder durch Nicht-Einhalten der ersten Nyquistbedingung.
Hierdurch ist der Kanal kein reiner AWGN-Kanal und die Symbole beeinflussen sich gegenseitig, wodurch die Fehlerrate ansteigt. Im schlimmsten Fall kommt es zu einem „Error-Floor“.
Beseitigung durch geeignetes OFDM oder einen Entzerrer.
- b) Bei QPSK entsprechen die Entscheidungsregionen den Quadranten (bzw. einer gedrehten Version hiervon). Damit der Sendepunkt im richtigen Quadranten bleibt, ist jedes $a > 0$ und $\varphi \in [-\pi/4, \pi/4]$ zulässig.
- c) Nulldurchgänge führen zu nicht-idealen Arbeitspunkten der Verstärker. Hierdurch entstehen Nicht-Linearitäten.
Eine mögliche Lösung ist die Verwendung von OQPSK, bei der durch Verzögerung der Quadraturkomponente die Phasensprünge nur $\pi/2$ betragen können. Eine andere Lösung wäre $\pi/4$ -DQPSK, bei der zwischen zwei Symbolen immer zwischen zwei um 45° versetzten Konstellationen gewechselt wird.
- d) Die Information steckt in der Phasendifferenz zwischen zwei Werten und nicht mehr in der Absolutphase. Hierdurch ist es nicht mehr notwendig, die absolute Phase zu schätzen.
Falls eine Frequenzabweichung vorliegt und sich die Phase somit ändert, darf die absolute Phasenänderung nicht zu groß werden.
Alternativ: Szenarien, in denen der Empfänger aus Gründen der Komplexität ohne eine Phasensynchronisation auskommen muss.

Formelsammlung und Tabellen

A Tabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$								
0,00	0,500000	0,80	0,788145	1,60	0,945201	2,40	0,991802	3,20	0,999313
0,02	0,507978	0,82	0,793892	1,62	0,947384	2,42	0,992240	3,22	0,999359
0,04	0,515953	0,84	0,799546	1,64	0,949497	2,44	0,992656	3,24	0,999402
0,06	0,523922	0,86	0,805105	1,66	0,951543	2,46	0,993053	3,26	0,999443
0,08	0,531881	0,88	0,810570	1,68	0,953521	2,48	0,993431	3,28	0,999481
0,10	0,539828	0,90	0,815940	1,70	0,955435	2,50	0,993790	3,30	0,999517
0,12	0,547758	0,92	0,821214	1,72	0,957284	2,52	0,994132	3,32	0,999550
0,14	0,555670	0,94	0,826391	1,74	0,959070	2,54	0,994457	3,34	0,999581
0,16	0,563559	0,96	0,831472	1,76	0,960796	2,56	0,994766	3,36	0,999610
0,18	0,571424	0,98	0,836457	1,78	0,962462	2,58	0,995060	3,38	0,999638
0,20	0,579260	1,00	0,841345	1,80	0,964070	2,60	0,995339	3,40	0,999663
0,22	0,587064	1,02	0,846136	1,82	0,965621	2,62	0,995604	3,42	0,999687
0,24	0,594835	1,04	0,850830	1,84	0,967116	2,64	0,995855	3,44	0,999709
0,26	0,602568	1,06	0,855428	1,86	0,968557	2,66	0,996093	3,46	0,999730
0,28	0,610261	1,08	0,859929	1,88	0,969946	2,68	0,996319	3,48	0,999749
0,30	0,617911	1,10	0,864334	1,90	0,971283	2,70	0,996533	3,50	0,999767
0,32	0,625516	1,12	0,868643	1,92	0,972571	2,72	0,996736	3,52	0,999784
0,34	0,633072	1,14	0,872857	1,94	0,973810	2,74	0,996928	3,54	0,999800
0,36	0,640576	1,16	0,876976	1,96	0,975002	2,76	0,997110	3,56	0,999815
0,38	0,648027	1,18	0,881000	1,98	0,976148	2,78	0,997282	3,58	0,999828
0,40	0,655422	1,20	0,884930	2,00	0,977250	2,80	0,997445	3,60	0,999841
0,42	0,662757	1,22	0,888768	2,02	0,978308	2,82	0,997599	3,62	0,999853
0,44	0,670031	1,24	0,892512	2,04	0,979325	2,84	0,997744	3,64	0,999864
0,46	0,677242	1,26	0,896165	2,06	0,980301	2,86	0,997882	3,66	0,999874
0,48	0,684386	1,28	0,899727	2,08	0,981237	2,88	0,998012	3,68	0,999883
0,50	0,691463	1,30	0,903200	2,10	0,982136	2,90	0,998134	3,70	0,999892
0,52	0,698468	1,32	0,906582	2,12	0,982997	2,92	0,998250	3,72	0,999900
0,54	0,705401	1,34	0,909877	2,14	0,983823	2,94	0,998359	3,74	0,999908
0,56	0,712260	1,36	0,913085	2,16	0,984614	2,96	0,998462	3,76	0,999915
0,58	0,719043	1,38	0,916207	2,18	0,985371	2,98	0,998559	3,78	0,999922
0,60	0,725747	1,40	0,919243	2,20	0,986097	3,00	0,998650	3,80	0,999928
0,62	0,732371	1,42	0,922196	2,22	0,986791	3,02	0,998736	3,82	0,999933
0,64	0,738914	1,44	0,925066	2,24	0,987455	3,04	0,998817	3,84	0,999938
0,66	0,745373	1,46	0,927855	2,26	0,988089	3,06	0,998893	3,86	0,999943
0,68	0,751748	1,48	0,930563	2,28	0,988696	3,08	0,998965	3,88	0,999948
0,70	0,758036	1,50	0,933193	2,30	0,989276	3,10	0,999032	3,90	0,999952
0,72	0,764238	1,52	0,935745	2,32	0,989830	3,12	0,999096	3,92	0,999956
0,74	0,770350	1,54	0,938220	2,34	0,990358	3,14	0,999155	3,94	0,999959
0,76	0,776373	1,56	0,940620	2,36	0,990862	3,16	0,999211	3,96	0,999963
0,78	0,782305	1,58	0,942947	2,38	0,991344	3,18	0,999264	3,98	0,999966

B Folgen und Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1 \quad (\text{B.1})$$

$$\sum_{n=0}^k x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \quad \text{für } x \neq 1 \quad (\text{B.2})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \binom{r}{3} x^3 + \dots = (1+x)^r \quad \text{für } \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \dots = e^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \quad (\text{B.4})$$

$$\sum_{n=1}^k n = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (\text{B.5})$$

C Integralrechnung

$$\int \delta(x-x_0) \varphi(x) dx = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad (\text{C.1})$$

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) \quad (\text{C.2})$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^3} (a^2 x^2 - 2ax + 2) \quad (\text{C.3})$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{C.4})$$

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) \quad (\text{C.5})$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{für } a > 0, n \in \mathbb{N} \quad (\text{C.6})$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \quad \text{für } a > 0 \quad (\text{C.7})$$

D Formeln zur Fouriertransformation

Definition

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad \circ \bullet \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = X(f) \quad (\text{D.1})$$

Eigenschaften

$$\sum c_i x_i(t) \longleftrightarrow \sum c_i X_i(f) \quad (\text{D.2})$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \longleftrightarrow (j2\pi f)^n X(f) \quad (\text{D.3})$$

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j2\pi f t_0} X(f) \quad (\text{D.4})$$

$$e^{j2\pi f_0 t} x(t) \longleftrightarrow X(f - f_0) \quad (\text{D.5})$$

$$x(t) * y(t) \longleftrightarrow X(f)Y(f) \quad (\text{D.6})$$

$$x(t)y(t) \longleftrightarrow X(f) * Y(f) \quad (\text{D.7})$$

$$x(t/a) \longleftrightarrow |a|X(af) \quad (\text{D.8})$$

Korrespondenzen

$$1 \longleftrightarrow \delta(f) \quad (\text{D.9})$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\delta(f + f_0) + \frac{1}{2}\delta(f - f_0) \quad (\text{D.10})$$

$$\frac{\sin(\pi F t)}{\pi t} \longleftrightarrow X(f) = \begin{cases} 1 & \text{für } |f| < \frac{F}{2} \\ 0 & \text{für } |f| > \frac{F}{2} \end{cases} \quad (\text{D.11})$$

$$e^{-\pi t^2} \longleftrightarrow e^{-\pi f^2} \quad (\text{D.12})$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \longleftrightarrow \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} \quad (\text{D.13})$$

$$\frac{1}{2}\delta(t + t_0) + \frac{1}{2}\delta(t - t_0) \longleftrightarrow \cos(2\pi f t_0) \quad (\text{D.14})$$

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1 \quad (\text{D.15})$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{j}{2}\delta(f + f_0) - \frac{j}{2}\delta(f - f_0) \quad (\text{D.16})$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \longleftrightarrow \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \quad (\text{D.17})$$

$$e^{-a|t|}, \quad a > 0 \longleftrightarrow \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} \quad (\text{D.18})$$

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}, \quad a > 0 \longleftrightarrow \frac{1}{a + j2\pi f} \quad (\text{D.19})$$

$$x(t) = \begin{cases} te^{-at} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}, \quad a > 0 \longleftrightarrow \frac{1}{(a + j2\pi f)^2} \quad (\text{D.20})$$

$$\frac{1}{\pi t} \longleftrightarrow -j \operatorname{sign}(f) \quad (\text{D.21})$$

$$j \operatorname{sign}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{\pi f} \quad (\text{D.22})$$

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\lambda)}{t - \lambda} d\lambda \longleftrightarrow -j \operatorname{sign}(f)X(f) \quad (\text{D.23})$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \longleftrightarrow \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) \quad (\text{D.24})$$

E Trigonometrie

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad (\text{E.1})$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad (\text{E.2})$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \left(\cos(x - y) + \cos(x + y) \right) \quad (\text{E.3})$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} \left(\cos(x - y) - \cos(x + y) \right) \quad (\text{E.4})$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \left(\sin(x - y) + \sin(x + y) \right) \quad (\text{E.5})$$