Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Nachrichtentechnik
Prof. Dr.-Ing. Laurent Schmalen

Schriftliche Prüfung zur Vorlesung

Nachrichtentechnik I

16.03.2021

Musterlösung

Hinweise

Die Prüfungsdauer beträgt **drei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **neun** Aufgaben zu bearbeiten. Benutzen Sie nur die vorgedruckten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an.
Verwenden Sie zur Bearbeitung einen **dokumentenechten Stift** und keine rote Farbe. Schreiben Sie leserlich und vermeiden Sie, das vorgedruckte Doppelblatt zu beschriften. Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der **Lösungsweg und die gültige Lösung eindeutig erkennbar** sein, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann.
Abzugeben sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten und **nach Aufgabennummer sortierten Ausarbeitungen**. Nicht abzugeben sind die Aufgabenblätter, Ihre Formelsammlung sowie Ihr Konzeptpapier.

Zugelassene Hilfsmittel

Erlaubt sind **ein** beidseitig von eigener Hand mit Bleistift, Kugelschreiber, Füller o. Ä. beschriebenes **A4-Blatt** (Original, keine Kopie) sowie ein **nicht-programmierbarer** Taschenrechner.

Nach der Prüfung

Das **Ergebnis** Ihrer Prüfung erfahren Sie ab dem **21.04.2021** im Online-Notensystem. Details zur **Klausureinsicht** finden Sie in Kürze auf den Webseiten des Instituts. Dort werden wir auch weitere Informationen zur **mündlichen Nachprüfung** finden.

Geben Sie diese Aufgaben nicht mit ab, sondern behalten Sie diese als Erinnerung für oben gegebene Termine.

Aufgabe 1 (22 Punkte)

Gegeben sei ein gleichförmiger Quantisierer mit $K = 2$ Quantisierungsniveaus und $b_{\max} = 1$. Das zu quantisierende Signal ist gemäß der Verteilungsdichte

$$f_B(b) = \begin{cases} 1-a & \text{für } -1 \leq b < 0 \\ 2a \cdot b & \text{für } 0 \leq b < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

verteilt, wobei $\frac{1}{4} < a \leq 1$.

a) Geben Sie die Quantisierungsrauschleistung N in Abhängigkeit von a an. *(5 Punkte)*

b) Für welches a wird das Signal-Rausch-Verhältnis am Ausgang des Quantisierers maximal? Geben Sie in diesem Fall den Signal-Rausch-Abstand an. *(3 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

Es soll eine Folge von Symbolen x_i mit dem LZ77-Verfahren codiert werden, um Wiederholungen zu eliminieren. Die Symbole s_i nach LZ77-Codierung werden anschließend mit einem zweiten Code codiert, um eine Bitfolge zu erzeugen. Die Codierung der Symbole nach LZ77-Codierung erfolgt mittels folgender Tabelle. Dabei sind auch die Auftrittswahrscheinlichkeiten der einzelnen LZ77-Symbole angegeben.

Symbol s	Auftritts-wahrscheinlichkeit	Code
$[0, 0, $„n“$]$	0,2	111110
$[0, 0, $„t“$]$	0,2	10
$[0, 0, $„1“$]$	0,2	11110
$[0, 0, $„2“$]$	0,1	1110
$[2, 5, $„3“$]$	0,1	111111
$[3, 8, $„2“$]$	0,1	0
$[1, 2, $„q“$]$	0,1	110

c) Besitzt der Code die Präfixeigenschaft? Begründen Sie Ihre Antwort. *(2 Punkte)*

d) Berechnen Sie die mittlere Länge L des Codes. *(2 Punkte)*

e) Sie empfangen die Bitfolge 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 0. Bestimmen Sie die ursprüngliche Zeichenfolge nach LZ77-Decodierung. *(3 Punkte)*

f) Konstruieren Sie für die Symbole s eine Codierung mit Präfixeigenschaft und kleinster mittlerer Wortlänge. Geben Sie die dazugehörige Baumdarstellung an. *(4 Punkte)*

g) Welche mittlere Länge L erhalten Sie mit der von Ihnen konstruierten Codierung? Geben Sie die Redundanz der Codierung an. *(3 Punkte)*

Lösung

a) Für diesen Quantisierer gilt $\Delta = 1$ und mit $b_{\max} = 1$ ist $\bar{b}_1 = -\frac{\Delta}{2} = -\frac{1}{2}$ und $\bar{b}_2 = +\frac{\Delta}{2} = +\frac{1}{2}$. Die Quantisierungsrauschleistung setzt sich aus zwei Beiträgen zusammen:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - b\right)^2 f_B(b)\mathrm{d}b \\
&= 2a \int_0^1 \left(\frac{b}{4} - b^2 + b^3\right) \mathrm{d}b \\
&= \frac{a}{12} \\
N_2 &= \int_{-1}^0 \left(-\frac{1}{2} - b\right)^2 f_B(b)\mathrm{d}b \\
&= (1-a) \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{4} + b + b^2\right) \mathrm{d}b \\
&= \frac{1-a}{12}
\end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich die Rauschleistung zu

$$N = N_1 + N_2 = \frac{1}{12}$$

und ist unabhängig von a.

b) Die Signalleistung berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^1 b^2 f_B(b)\mathrm{d}b = (1-a)\int_{-1}^0 b^2\mathrm{d}b + 2a\int_0^1 b^3\mathrm{d}b \\
&= \frac{1}{3} + \frac{a}{6}
\end{aligned}$$

Der Signal-Rausch-Abstand wird maximal, wenn a maximal wird, also für $a = 1$ und er beträgt in diesem Fall

$$\frac{S}{N} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}}{\frac{1}{12}} = 6$$

c) Ja, der Code besitzt die Präfixeigenschaft, da kein Codewort dem Anfang eines anderen Codewortes entspricht.

d) Die mittlere Länge beträgt

$$L = 0{,}2 \cdot 6 + 0{,}2 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot 5 + 0{,}1 \cdot 4 + 0{,}1 \cdot 6 + 0{,}1 \cdot 1 + 0{,}1 \cdot 3 = 4$$

e) Zuerst erfolgt eine Decodierung des Präfixcodes. Dieser liefert die Symbolfolge:

$$[0, 0, „\texttt{n}“],\ [0, 0, „\texttt{t}“]\ [0, 0, „\texttt{1}“]\ [3, 8, „\texttt{2}“]$$

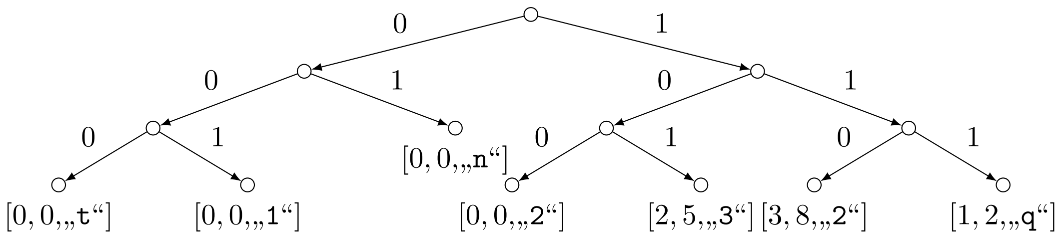
Nach LZ77-Decodierung ergibt sich

`n t 1 n t 1 n t 1 n t 2`

f) Die kleinste mittlere Wortlänge ergibt sich mit der Huffman-Codierung. Eine mögliche Codierung lautet:

Symbol s	Auftritts-wahrscheinlichkeit	Code
[0, 0, „n“]	0,2	01
[0, 0, „t“]	0,2	000
[0, 0, „1“]	0,2	001
[0, 0, „2“]	0,1	100
[2, 5, „3“]	0,1	101
[3, 8, „2“]	0,1	110
[1, 2, „q“]	0,1	111

Die Baumdarstellung ergibt sich für diese Codierung zu



g) Die neue Codierung führt zu einer mittleren Länge von

$$L = 0{,}2 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot 3 + 0{,}2 \cdot 3 + 0{,}1 \cdot 3 + 0{,}1 \cdot 3 + 0{,}1 \cdot 3 + 0{,}1 \cdot 3 = 2{,}8$$

Die Entropie der Quelle berechnet sich zu

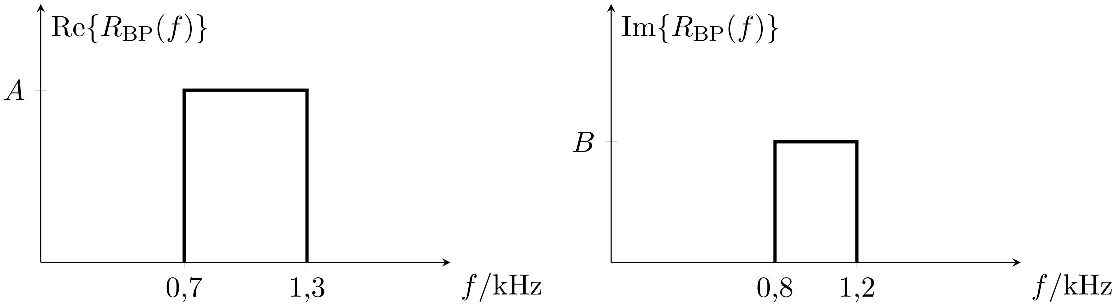
$$\begin{aligned} H(S) &= -3 \cdot 0{,}2 \cdot \log_2(0{,}2) - 4 \cdot 0{,}1 \cdot \log_2(0{,}1) \\ &= -0{,}6 \cdot (\log_2(2) - \log_2(10)) - 0{,}4 \cdot (\log_2(1) - \log_2(10)) \\ &= -0{,}6 + \log_2(10) \\ &\approx 2{,}72 \end{aligned}$$

Demzufolge beträgt die Redundanz der Codierung

$$R_{\mathrm{C}} = L - H(S) = 3{,}4 - \log_2(10) \approx 0{,}0781$$

Aufgabe 2 (14 Punkte)

Sie empfangen ein *reellwertiges* Signal $r_{\mathrm{BP}}(t)$, welches im Bereich der positiven Frequenzen folgendes Spektrum aufweist:

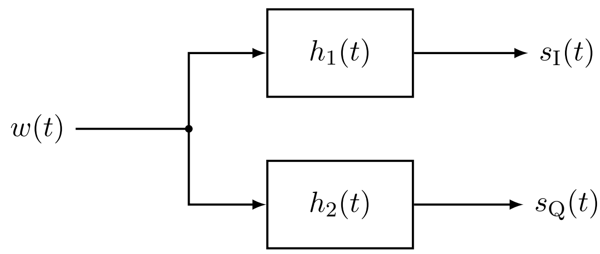


a) Zeichnen Sie das Spektrum $R_{\mathrm{BP}}(f)$ im Bereich der negativen Frequenzen. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie das zugehörige Zeitsignal $r_{\mathrm{BP}}(t)$. Geben Sie die komplexe Einhüllende $k(t)$ an. *(5 Punkte)*

c) Skizzieren und benennen Sie einen Aufbau, welcher zur Transformation des Signals $r_{\mathrm{BP}}(t)$ in den Basisband-Bereich verwendet werden kann. Erklären Sie die Funktion aller relevanter Elemente und spezifizieren Sie diese so genau wie möglich. *(3 Punkte)*

Nehmen Sie im Folgenden an, dass ein Signal $s(t) = s_{\mathrm{I}}(t) + \mathrm{j} \cdot s_{\mathrm{Q}}(t)$ wie in nachfolgender Abbildung entstanden ist.

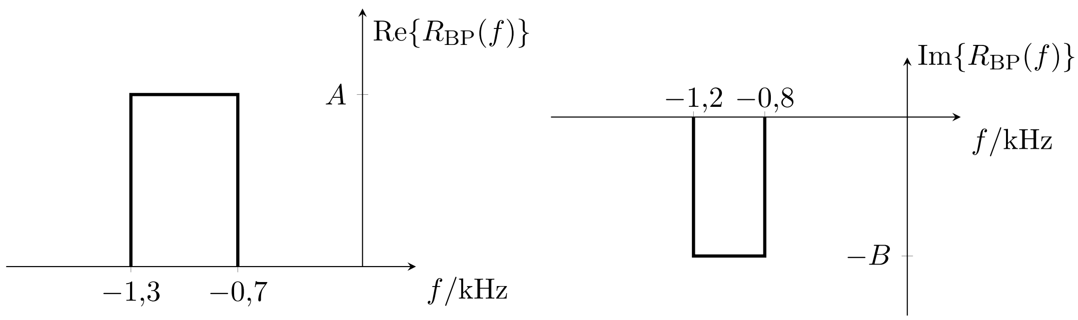


Dabei ist $w(t)$ eine Realisierung eines reellwertigen weißen Rauschprozesses mit Leistungsdichte $\frac{N_0}{2}$. Die Impulsantworten $h_1(t)$ und $h_2(t)$ besitzen die Kreuzenergiedichte $\varphi^{\mathrm{E}}_{h_1h_2}(\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\mu)h_2(\mu+\tau)\mathrm{d}\mu$.

d) Berechnen Sie die Kreuzkorrelationsfunktion $\varphi_{S_{\mathrm{I}}S_{\mathrm{Q}}}(\tau)$. Geben Sie das Ergebnis in Abhängigkeit von N_0 und $\varphi^{\mathrm{E}}_{h_1h_2}(\tau)$ an. *(4 Punkte)*

Lösung

a) Für reellwertige Signale gilt: $R(-f) = R^*(f)$



b) Für eine bessere Übersichtlichkeit werden Einheiten im Folgenden nicht angegeben. Das Spektrum $R_{\mathrm{BP}}(f)$ kann dann beschrieben werden durch

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{BP}}(f) &= A \cdot \mathrm{rect}_{600}(f-1000) + A \cdot \mathrm{rect}_{600}(f+1000) \\ &\quad + \mathrm{j}B \cdot \mathrm{rect}_{400}(f-1000) - \mathrm{j}B \cdot \mathrm{rect}_{400}(f+1000) \\ &= 2A \cdot \mathrm{rect}_{600}(f) * \left[\frac{1}{2}\delta(f+1000) + \frac{1}{2}\delta(f-1000)\right] \\ &\quad - 2B \cdot \mathrm{rect}_{400}(f) * \left[\frac{\mathrm{j}}{2}\delta(f+1000) - \frac{\mathrm{j}}{2}\delta(f-1000)\right] \end{aligned}$$

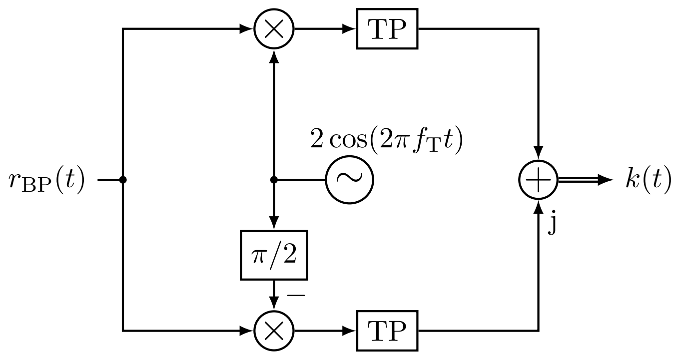
$$\bullet\!-\!\!\circ$$

$$\begin{aligned} r_{\mathrm{BP}}(t) &= \underbrace{2A \cdot \mathrm{sinc}(600 \cdot t) \cdot 600}_{=\,k_{\mathrm{I}}(t)} \cdot \cos(2\pi \cdot 1000 \cdot t) \\ &\quad \underbrace{+2B \cdot \mathrm{sinc}(400 \cdot t) \cdot 400}_{=\,k_{\mathrm{Q}}(t)} \cdot (-\sin(2\pi \cdot 1000 \cdot t)) \end{aligned}$$

Es handelt sich um ein Bandpass-Signal mit der Trägerfrequenz 1 kHz. Die komplexe Einhüllende ist

$$k(t) = k_{\mathrm{I}}(t) + \mathrm{j}k_{\mathrm{Q}}(t) = 1200A \cdot \mathrm{sinc}(600 \cdot t) + \mathrm{j} \cdot 800B \cdot \mathrm{sinc}(400 \cdot t).$$

c) Um das Bandpass-Signal $r_{\mathrm{BP}}(t)$ in das Basisband zu transformieren, kann ein IQ-Demodulator benutzt werden:



Das Empfangssignal wird aufgeteilt, wobei es einmal mit einer Cosinus-Schwingung und einmal mit einer Sinus-Schwingung gemischt wird. Beide kommen aus dem gleichen Oszillator mit einer Frequenz möglichst gleich der Trägerfrequenz, hier also $f_{\mathrm{T}} = 1\,\mathrm{kHz}$. Die Sinus-Schwingung wird durch eine $\pi/2$-Phasendrehung des Signals aus diesem Oszillator erzeugt.
Beim Mischen entstehen zwei Terme mit addierten bzw. subtrahierten Frequenzen der beiden gemischten harmonischen Schwingungen. Da wir nur an letzterem Mischterm interessiert sind, müssen wir noch ein Tiefpassfilter (TP) einsetzen, das den Mischterm mit den addierten Frequenzen herausfiltert. Entsprechend müssen beide Tiefpassfilter eine Grenzfrequenz kleiner der doppelten Trägerfrequenz abzüglich der halben Bandbreite des Basisbandsignals aufweisen. Idealerweise liegt die Grenzfrequenz so nahe wie möglich an der Bandbreite des Basisbandsignals.

d) Wir haben

$$
\begin{aligned}
\varphi_{S_\mathrm{I} S_\mathrm{Q}}(\tau) &= \mathbb{E}\left\{S_\mathrm{I}(t) S_\mathrm{Q}(t-\tau)\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{[(W * h_1)(t)] \cdot [(W * h_2)(t-\tau)]\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\mu) W(t-\mu)\,\mathrm{d}\mu \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\nu) W(t-\tau-\nu)\,\mathrm{d}\nu\right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}\left\{W(t-\mu) W(t-\tau-\nu)\right\} h_1(\mu) h_2(\nu)\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\nu
\end{aligned}
$$

Mit der Substitution $\nu = \omega + \mu$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\varphi_{S_\mathrm{I} S_\mathrm{Q}}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}\left\{W(t-\mu) W(t-\tau-\omega-\mu)\right\} h_1(\mu) h_2(\omega+\mu)\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{WW}(\tau+\omega) \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\mu) h_2(\mu+\omega)\,\mathrm{d}\mu\right]\,\mathrm{d}\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{WW}(\tau+\omega)\ \varphi^{\mathrm{E}}_{h_1 h_2}(\omega)\,\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

Für einen reellwertigen weißen Rauschprozesses gilt $\varphi_{WW}(\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot \delta(\tau)$, und es folgt

$$
\begin{aligned}
\varphi_{S_\mathrm{I} S_\mathrm{Q}}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} \cdot \delta(\tau+\omega)\ \varphi^{\mathrm{E}}_{h_1 h_2}(\omega)\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{N_0}{2} \cdot \varphi^{\mathrm{E}}_{h_1 h_2}(-\tau)\ .
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3 (18 Punkte)

Sie möchten gleichverteilte Bits über einen AWGN-Kanal mittels QAM übertragen, wobei exakt 4 Bit pro Symbol übertragen werden und eine Datenrate von $20\,\frac{\text{kbit}}{\text{s}}$ erreicht werden soll.

a) Welche Größe muss das Modulationsalphabet $\mathcal{M}$ zur Übertragung besitzen? *(1 Punkt)*

b) Bestimmen Sie die Menge $\mathcal{M}$ der Symbolpunkte, wenn die Symbolenergie auf $E_\mathsf{s} = 2$ normiert sein soll. Skizzieren Sie das Konstellationsdiagramm. Achten Sie auf eine vollständige Beschriftung! *(4 Punkte)*

c) Nennen Sie einen Vorteil der M-QAM im Vergleich zur M-PSK für $M \geq 8$. *(2 Punkte)*

Als Sendefilter wird eine Rechteckpulsformung der Symboldauer T mit $g(t) = \alpha\,\mathrm{rect}_T(t)$ und dem Skalierungsfaktor $\alpha \in \mathbb{R}$ genutzt.

d) Berechnen Sie das akausale Matched-Filter $h(t)$ sowie das akausale Gesamtfilter $h_0(t) = g(t) * h(t)$ und den Normierungsfaktor α, wobei im Abtastzeitpunkt die Kette aus Pulsformungsfilter und Matched-Filter das zu übertragende Signal um den Faktor $2T$ skalieren soll. *(4 Punkte)*

e) Berechnen Sie die Symboldauer T, die notwendig ist, um die geforderte Datenrate genau zu erreichen. *(2 Punkte)*

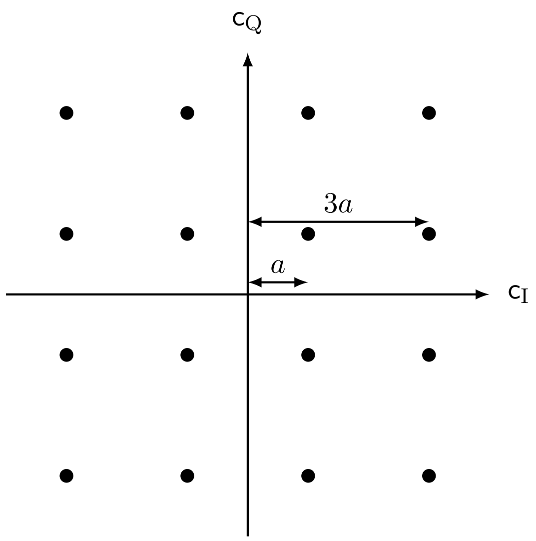
Für eine robustere Übertragung nutzen Sie nun BPSK mit den Symbolen $\mathsf{c}_1 = -1$ und $\mathsf{c}_2 = +1$. Die reellwertige Störung des Kanals sei gaußverteilt mit $\mathcal{N}(0; \frac{1}{2})$. Aus einer senderseitigen Statistik stellen Sie fest, dass $P_C(\mathsf{c}_1) = \frac{1}{4}$ beträgt.

f) Bestimmen Sie die optimale MAP-Entscheidungsschwelle θ. *(5 Punkte)*

Lösung

a) Um $m = 4$ Bit pro Symbol zu übertragen, werden $2^m = 2^4 = 16$ Symbolpunkte benötigt. Somit muss zur Übertragung eine 16-QAM genutzt werden.

b) Es sollen die Symbolpunkte der 16-QAM berechnet werden, für welche die Übertragung eine normierte Symbolenergie von $E_\mathsf{s} = 2$ aufweist. Die Symbolpunkte sind wie folgt gegeben:



Mit gleichverteilten Bits ergibt sich die Auftretenswahrscheinlichkeit der Symbole zu $P_{\mathrm{C}}(\mathsf{c}_i) = \frac{1}{16}$. Die Energie lässt sich zu

$$\begin{aligned} E_{\mathsf{s}} &= \sum_{i=1}^{|\mathcal{M}|=16} P_{\mathrm{C}}(\mathsf{c}_i) \cdot |\mathsf{c}_i|^2 \\ &= \frac{1}{4}\Big((a^2+a^2) + (a^2+(3a)^2) + ((3a)^2+a^2) + ((3a)^2+(3a)^2)\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(4a^2 + 4\cdot 9a^2\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(40a^2\Big) \\ &= 10a^2 \end{aligned}$$

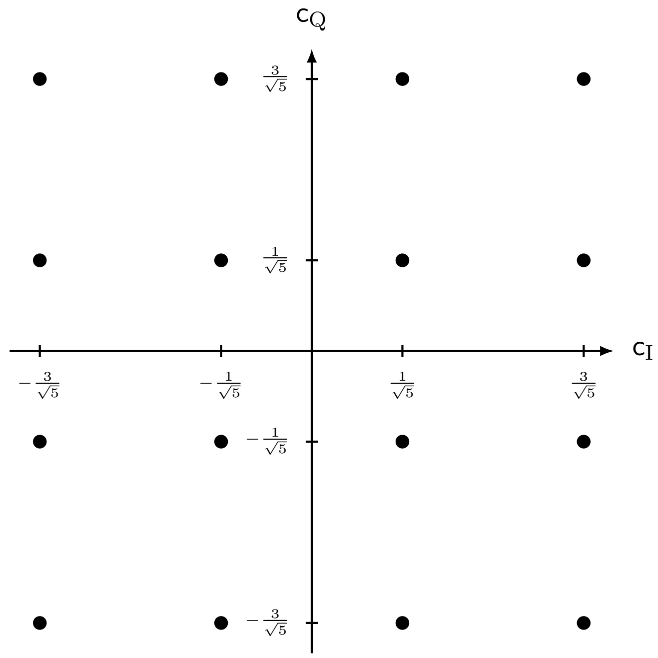
bestimmen. Um $E_{\mathsf{s}} \overset{!}{=} 2$ zu erfüllen, muss

$$a = \sqrt{\frac{E_{\mathsf{s}}}{10}} = \sqrt{\frac{2}{10}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\,.$$

Die Menge der Symbolpunkte ergibt sich zu

$$S = \left\{ m \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \mathrm{j} \cdot n \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \right\} \quad \text{mit } m, n \in \{\pm 1, \pm 3\}\,.$$

Das Konstellationsdiagramm ergibt sich zu:



c) Ein Vorteil der QAM liegt darin, dass diese bei einer festen normierten Symbolenergie E_{s} größere Abstände zwischen den einzelnen Symbolpunkte als die gleichstufige PSK besitzt. Sie ist somit robuster gegen AWGN.

d) Das Sendefilter ist zu $g(t) = \alpha\,\mathrm{rect}_T(t)$ gegeben, somit folgt für das Matched-Filter $h(t) = \alpha\,\mathrm{rect}_T(\kappa_0 T - t)$. Da das akausale Matched-Filter gesucht ist, kann $\kappa_0 = 0$ gewählt werden. Aus der Symmetrie der Rechteckfunktion kann es zu

$$h(t) = \alpha\,\mathrm{rect}(t)$$

bestimmt werden.

Das Gesamtfilter berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
h_0(\tau) &= g(t) * h(t) \\
&= \int g(t) \cdot h(\tau - t)\mathrm{d}t \\
&= \alpha^2 \int \mathrm{rect}_T(t) \cdot \mathrm{rect}_T(\tau - t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Es ist erkennbar, dass zwei y-achsensymmetrische Rechtecke der Breite T gefaltet werden müssen. Die Faltung zweier Rechtecke der Breite T ergibt ein Dreieck der Breite $2T$.

Da beide Dreiecke identisch sind, ergibt sich der Peak der Faltung für $\tau = 0$:

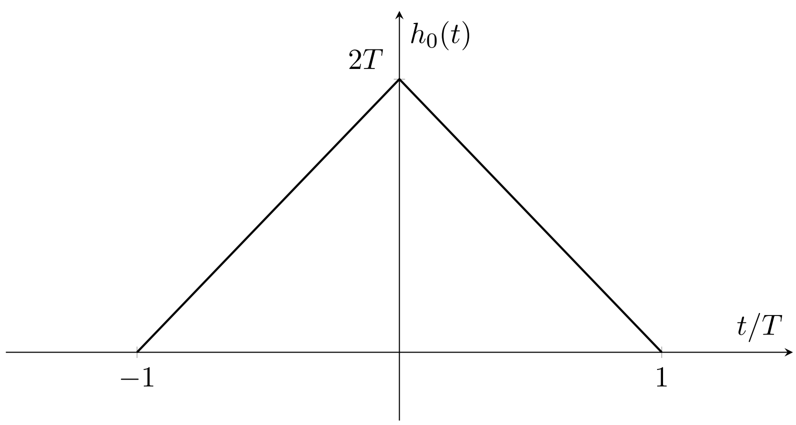
$$\begin{aligned}
h_0(\tau = 0) &= g(t) * h(t) \\
&= \alpha^2 \int \mathrm{rect}_T^2(t)\mathrm{d}t \\
&= \alpha^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1^2\mathrm{d}t \\
&= \alpha^2 T
\end{aligned}$$

Die Skalierung des zu übertragenden Signals im Abtastpunkt entspricht der Normierung der Höhe des durch die Faltung erzeugten Dreiecks:

$$\begin{aligned}
h_0(\tau = 0) &\overset{!}{=} 2T \\
\Leftrightarrow \alpha^2 T &= 2T \\
\Leftrightarrow \alpha &= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Das akausale Gesamtfilter ergibt sich zu:

$$h_0(t) = \begin{cases} 2T - 2|t| & \text{für} \quad |t| \leq T \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Hinweis: Die Skizze ist nicht gefordert! Sie dient nur der Veranschaulichung.

e) Es soll eine Datenrate von $20\,\frac{\mathrm{kbit}}{\mathrm{s}}$ erreicht werden. Da eine 16-QAM mit $m = 4$ genutzt wird, werden 4 Bit durch ein Symbol übertragen. Somit muss die Symbolrate

$$\frac{1}{m} 20\,\frac{\mathrm{kbit}}{\mathrm{s}} = 5000\,\frac{\mathrm{Symbole}}{\mathrm{s}}$$

erreicht werden. Die Symboldauer kann zu

$$T = \frac{1}{5000}\,\mathrm{s} = 0{,}2\,\mathrm{ms}$$

bestimmt werden.

f) Es wird nun BPSK mit $P_C(\mathsf{c}_1 = -1) = \frac{1}{4}$ genutzt. Das Rauschen ist rein reellwertig und mittelwertfrei mit der Rauschleistung $\sigma^2 = \frac{1}{2}$.

Die Verteilungsfunktion des Rauschens ist zu

$$f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{n^2}{2\sigma^2}\right)$$

gegeben. Z sei die Zufallsvariable, welche das Empfangssignal beschreibt. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen $f_{Z|C}(z|\mathsf{c}_1)$ und $f_{Z|C}(z|\mathsf{c}_2)$ ergeben sich zu:

$$f_{Z|C}(z|\mathsf{c}_1 = -1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(z+1)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$f_{Z|C}(z|\mathsf{c}_2 = +1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(z-1)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Anwenden der MAP-Regel

$$\frac{f_{Z|C}(z|\mathsf{c}_1 = -1)P_C(\mathsf{c}_1 = -1)}{f_Z(z)} \underset{\hat{C}=\mathsf{c}_1}{\overset{\hat{C}=\mathsf{c}_2}{\lesseqgtr}} \frac{f_{Z|C}(z|\mathsf{c}_2 = +1)P_C(\mathsf{c}_2 = +1)}{f_Z(z)}$$

für $f_Z(z) > 0$

$$f_{Z|C}(z|\mathsf{c}_1 = -1)P_C(\mathsf{c}_1 = -1) \underset{\hat{C}=\mathsf{c}_1}{\overset{\hat{C}=\mathsf{c}_2}{\lesseqgtr}} f_{Z|C}(z|\mathsf{c}_2 = +1)P_C(\mathsf{c}_2 = +1)$$

Aufstellen der Likelihood-Ratio:

$$\Lambda(z) = \frac{f_{Z|C}(z|\mathsf{c}_1 = -1)P_C(\mathsf{c}_1 = -1)}{f_{Z|C}(z|\mathsf{c}_2 = +1)P_C(\mathsf{c}_2 = +1)} \underset{\hat{C}=\mathsf{c}_1}{\overset{\hat{C}=\mathsf{c}_2}{\lesseqgtr}} 1$$

Einsetzen der bekannten Größen und $P_C(\mathsf{c}_1) = \frac{1}{4}$ sowie $P_C(\mathsf{c}_2) = 1 - P_C(\mathsf{c}_1) = \frac{3}{4}$:

$$\begin{aligned}
\Lambda(z) = \frac{f_{Z|C}(z|\mathsf{c}_1 = -1)P_C(\mathsf{c}_1 = -1)}{f_{Z|C}(z|\mathsf{c}_2 = +1)P_C(\mathsf{c}_2 = +1)} &\underset{\hat{C}=\mathsf{c}_1}{\overset{\hat{C}=\mathsf{c}_2}{\lesseqgtr}} 1 \\
\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(z+1)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(z-1)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{3}{4}} &\underset{\hat{C}=\mathsf{c}_1}{\overset{\hat{C}=\mathsf{c}_2}{\lesseqgtr}} 1 \\
\Leftrightarrow \frac{1}{3} \frac{\exp\left(-\frac{(z+1)^2}{2\sigma^2}\right)}{\exp\left(-\frac{(z-1)^2}{2\sigma^2}\right)} &\underset{\hat{C}=\mathsf{c}_1}{\overset{\hat{C}=\mathsf{c}_2}{\lesseqgtr}} 1 \\
\Leftrightarrow \exp\left(\frac{-(z+1)^2 + (z-1)^2}{2\sigma^2}\right) &\underset{\hat{C}=\mathsf{c}_1}{\overset{\hat{C}=\mathsf{c}_2}{\lesseqgtr}} 3
\end{aligned}$$

Umschreiben und Anwenden des natürlichen Logarithmus auf beiden Seiten:

$$\frac{-(z+1)^2 + (z-1)^2}{2\sigma^2} \underset{\hat{C}=\mathsf{c}_1}{\overset{\hat{C}=\mathsf{c}_2}{\lesseqgtr}} \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2z}{\sigma^2} \underset{\hat{C}=\mathsf{c}_1}{\overset{\hat{C}=\mathsf{c}_2}{\lesseqgtr}} \ln(3)$$

Mit $\sigma^2 = \frac{1}{2}$ ergibt sich:

$$\frac{-2z}{\left(\frac{1}{2}\right)} \underset{\hat{C}=\mathsf{c}_1}{\overset{\hat{C}=\mathsf{c}_2}{\lesseqgtr}} \ln(3)$$

$$-4z \underset{\hat{C}=\mathsf{c}_1}{\overset{\hat{C}=\mathsf{c}_2}{\lesseqgtr}} \ln(3)$$

$$z \underset{\hat{C}=\mathsf{c}_2}{\overset{\hat{C}=\mathsf{c}_1}{\lesseqgtr}} -0,275$$

Die optimale MAP-Entscheidungsschwelle liegt bei $\theta = -0,275$.

Aufgabe 4 (16 Punkte)

Gegeben ist ein Wiederholungscode der Länge n, wobei n ungerade ist. Die durch den Wiederholungscode erzeugten Codewörter werden über einen symmetrischen Binärkanal (BSC) mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit $\delta < 0{,}5$ übertragen. Dieser wird mittels Maximum-Likelihood-Verfahren (ML-Verfahren) decodiert.

a) Beschreiben Sie, wie der ML-Decoder für den gegebenen Wiederholungscode entscheidet, wenn Sie eine Bitfolge der Länge n empfangen. Wie wäre der ML-Decoder einfach zu realisieren? *(2 Punkte)*

b) Geben Sie einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Codewort falsch decodiert wird. *(2 Punkte)*

c) Nun sei $\delta > 0{,}5$. Wie ändert sich die Entscheidungsvorschrift des ML Decoders? *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

Gegeben ist nun die Generatormatrix $\boldsymbol{G}$ eines (n, k)-Blockcodes.

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Übertragung findet weiterhin über einen BSC mit $\delta < 0{,}5$ statt.

d) Geben Sie die Coderate r an. *(1 Punkt)*

e) Geben Sie die Paritycheckmatrix $\boldsymbol{H}$ des Codes an. *(3 Punkte)*

f) Wieviele Übertragungsfehler t kann der vorliegende Code korrigieren? *(3 Punkte)*

g) Nach Übertragung über den BSC empfangen Sie die Folge $\boldsymbol{y} = (0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0)$. Berechnen Sie das Syndrom $\boldsymbol{s}$ und bestimmen Sie das am wahrscheinlichsten gesendete Codewort $\hat{\boldsymbol{x}}$ nach Hard-Decision. Können Sie mit Sicherheit sagen, dass das bestimmte Codewort $\hat{\boldsymbol{x}}$ dem gesendeten Codewort entspricht? *(3 Punkte)*

Lösung

a) Der BSC verfälscht ein gesendetes Bit mit einer Wahrscheinlichkeit von $\delta < 0{,}5$.
Der ML-Decoder vergleicht das Empfangswort mittels des Hamming-Abstands mit beiden Codeworten des Codes. Wenn das Empfangswort mehr als $n/2$ „1"en enthält, ist es näher am Codewort $(1\ 1\ \ldots 1)$ und dieses wird entschieden. Im anderen Fall wird das Null-Codewort entschieden.
Für einen Wiederholungscode der Länge n, wobei n ungerade ist, wird auf eine „0" als gesendetes Bit entschieden, wenn die Anzahl der empfangenen „0"-en größer als $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ist. Andernfalls wird auf eine „1" als gesendetes Bit entschieden. Eine einfache Realisierung dieser Entscheidung ist eine „Mehrheitsentscheidung".

b) Ein Codewort wird falsch decodiert, wenn bei der Übertragung mindestens $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ Fehler auftreten. Die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet sich zu

$$\sum_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} \binom{n}{i} \delta^i (1-\delta)^{n-i} = 1 - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{i} \delta^i (1-\delta)^{n-i}$$

c) Für $\delta > 0{,}5$ wird ein gesendetes Bit öfter verfälscht als korrekt übertragen. Der ML-Decoder entscheidet nun auf eine gesendete „0“, wenn am Empfänger mehr „1“-en als „0’en empfangen werden und umgekehrt.

d) Da die gegebene Generatormatrix $k = 3$ Informationsbits in $n = 6$ Codebits abbildet, besitzt der vorliegende Code die Coderate $r = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

e) Um die Paritycheckmatrix $\boldsymbol{H}$ zu berechnen, muss zuerst die Generatormatrix in ihre systematische Form, $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{I}_k\ \boldsymbol{P})$, gebracht werden.

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{Z_1=Z_1+Z_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{Z_3=Z_3+Z_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{Z_3=Z_3+Z_1}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich die Matrix $\boldsymbol{P}$ zu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Paritycheckmatrix lässt sich durch $\boldsymbol{H} = \left(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{I}_{n-k}\right)$ bestimmen:

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Generatormatrix ist nicht eindeutig. Ein weiterer Weg wäre durch Tauschen der Spalten und anschließende Addition zweier Zeilen wie folgt gegeben:

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{S_1 \leftrightarrow S_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{Z_3=Z_3+Z_1}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Durch diese Form der Generatormatrix werden andere Codewörter konsturiert als mit der ersten Form. Die Korrekturfähigkeit des Codes bleibt aber erhalten.

f) Um die Anzahl t der korrigierbaren Fehler zu bestimmen, muss der minimale Hammingabstand des Codes bestimmt werden. Hierzu müssen alle Codewörter und deren Hammingabstand zum Nullwort bestimmt werden:

$\boldsymbol{u}$	$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{uG}$	$d_\mathrm{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})$
000	000 000	0
001	001 011	3
011	011 100	3
010	010 111	4
110	110 010	3
111	111 001	4
101	101 110	4
100	100 101	3

Der minimale Hammingabstand ist $d_\mathrm{min} = 3$. Die Anzahl der korrigierbaren Fehler des Codes lässt sich durch

$$
\begin{aligned}
&& d_\mathrm{min} &\geq 2t + 1 \\
\Leftrightarrow && \frac{1}{2}(d_\mathrm{min} - 1) &\geq t \\
\Leftrightarrow && \left\lfloor \frac{1}{2}(d_\mathrm{min} - 1) \right\rfloor &= t \\
\Leftrightarrow && \left\lfloor \frac{1}{2}(3 - 1) \right\rfloor &= t \\
\Leftrightarrow && \lfloor 1 \rfloor &= t
\end{aligned}
$$

zu $t = 1$ bestimmen.

g) Um das am wahrscheinlichsten gesendete Codewort nach Hard-Decision zu bestimmen muss eine Syndromdecodierung durchgeführt werden. Hierzu wird aus dem Empfangsvektor $\boldsymbol{y} = (0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0)$ und der Paritycheckmatrix $\boldsymbol{H}$ das Syndrom $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{y}^\mathrm{T}$ berechnet:

$$
\boldsymbol{s} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{y}^\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Das Syndrom bestimmt sich zu $\boldsymbol{s} = (101)$. Dies entspricht der ersten Spalte von $\boldsymbol{H}$ und suggeriert, dass das erste Bit falsch übertragen wurde. Das am wahrscheinlichsten gesendete Codewort bestimmt sich zu $\hat{\boldsymbol{x}} = (1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0)$.
Die Codierung ist nicht notwendigerweise korrekt, da bei einer fehlerhaften Übertragung von mehr als zwei Bit unter Umständen ein falsches Codewort bestimmt wird.

Aufgabe 5 (16 Punkte)

Sie verwenden einen Faltungscodierer der Rate $\frac{1}{2}$, dessen Zustandsraumdiagramm 4 Zustände besitzt. Das den Faltungscodierer beschreibende Schieberegister ist mit $(v_1; v_2) = (0; 0)$ initialisiert.
Dieser Faltungscodierer erzeugt aus der Eingangsfolge $u_t = (1\,0\,1\,0\,0)$ die Codefolgen $x_t^{(1)} = (0\,1\,1\,1\,1)$ und $x_t^{(2)} = (1\,0\,0\,0\,1)$. Die Codebits $x_t^{(2)}$ werden über eine Verknüpfung gemäß $g_2(x) = 1 + x^2$ erzeugt.

a) Bestimmen Sie das Polynom, welches die Erzeugung von $x_t^{(1)}$ beschreibt. Ihr Lösungsweg muss klar ersichtlich sein. *(2 Punkte)*

Wenn Sie Teilaufgabe a) nicht lösen konnten, rechnen Sie im Folgenden mit $g_1(x) = x + x^2$.

b) Geben Sie die Schieberegisterdarstellung und die Zustandsraumdarstellung des Faltungscodierers an. *(4 Punkte)*

c) Erstellen Sie die Trellis-Darstellung des Codes für die ersten fünf Taktschritte und beschriften Sie die Übergänge vollständig. *(3 Punkte)*

d) Am Empfänger beobachten Sie nach der Übertragung der Bits mittels BPSK über einen AWGN-Kanal am Ausgang des Matched-Filters die Empfangsfolge

$$y_t = \begin{pmatrix} +0{,}8 & +1{,}1 & -0{,}1 & -1{,}0 & -0{,}7 & -0{,}5 & +0{,}8 & -0{,}9 & -0{,}1 & +0{,}1 \end{pmatrix}$$

Decodieren Sie die gesendete Folge mit Hilfe des Soft-Decision Viterbi-Algorithmus. Achten Sie auf eine vollständige Beschriftung Ihrer Lösung, so dass der Lösungsweg klar ersichtlich ist. *(5 Punkte)*

e) Begründen Sie, inwieweit sich Ihr Decodierergebnis ändern würde, wenn der Code terminiert wäre. *(2 Punkte)*

Lösung

a) Aus den Informationen folgt der Ansatz

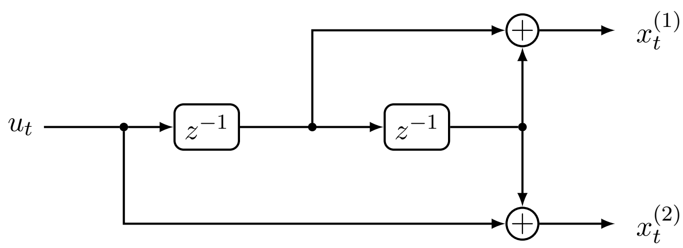
$$x_t^{(1)} = au_t + bu_{t-1} + cu_{t-2}$$

und daraus mit Einsetzen:

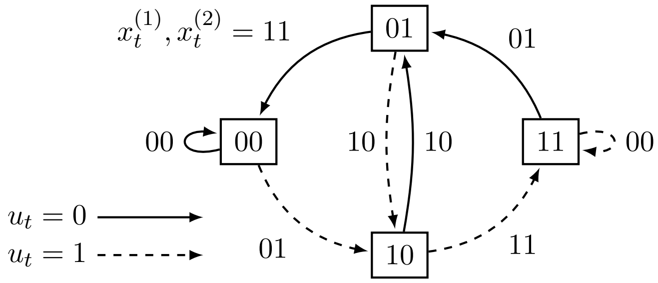
$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0 \Rightarrow a = 0 \\ 1 &= a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 0 \Rightarrow b = 1 \\ 1 &= a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 1 \Rightarrow c = 1 \end{aligned}$$

Somit ist $x_t^{(1)} = u_{t-1} + u_{t-2}$ und das Generatorpolynom lässt sich zu $g_1(x) = x + x^2$ bestimmen.

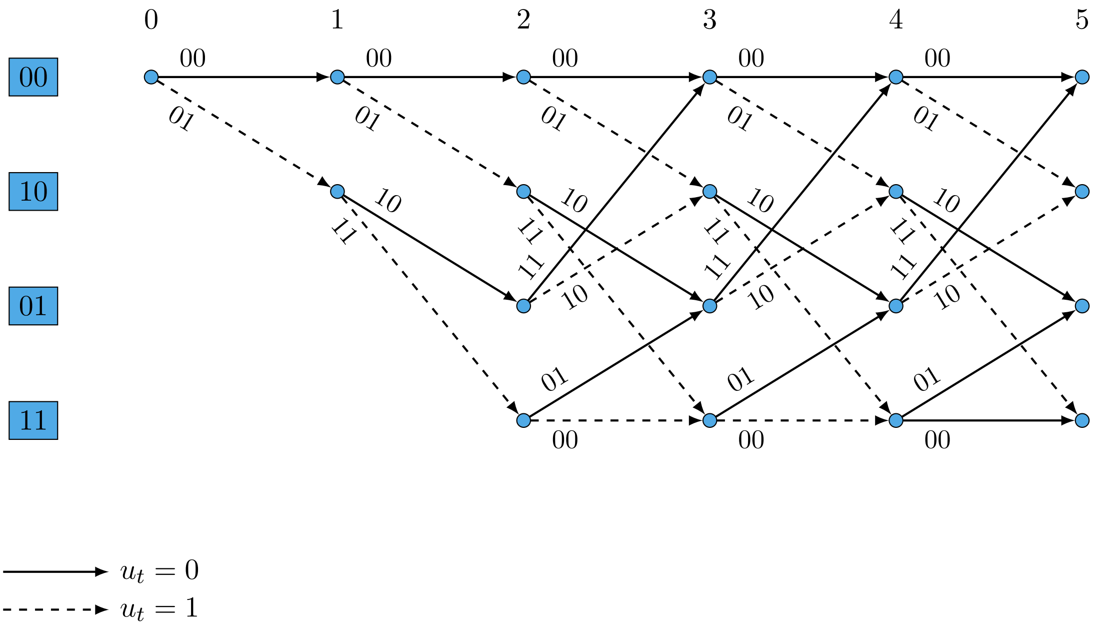
b) Es ergeben sich die Registerdarstellung



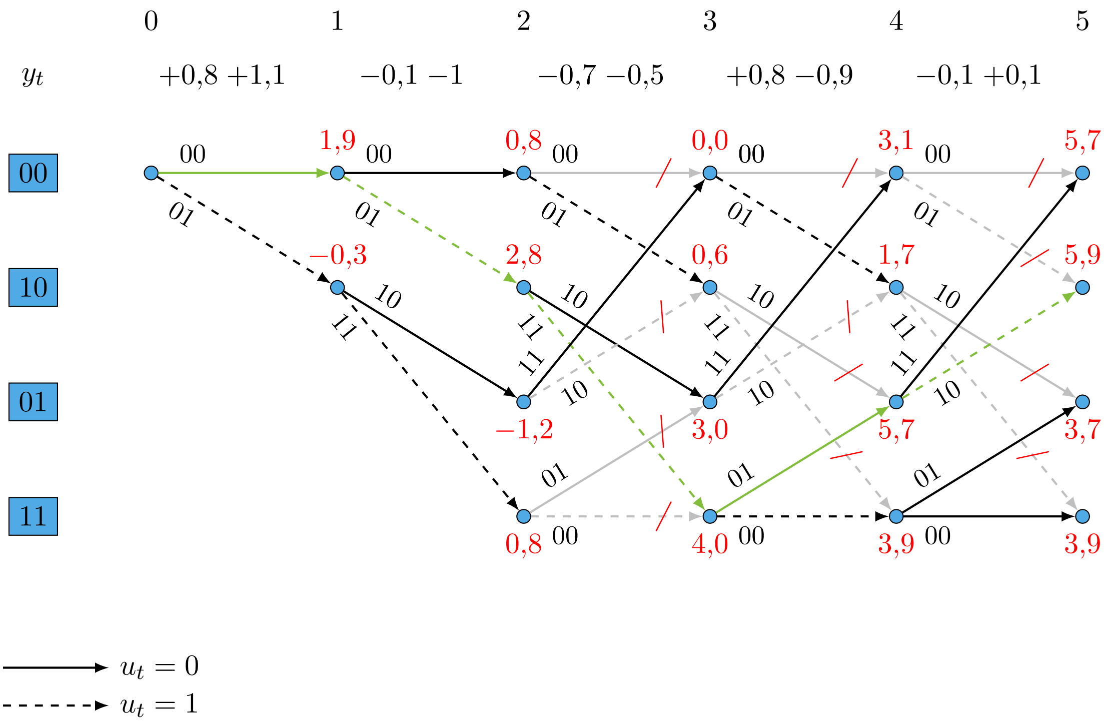
und die Zustandsraumdarstellung:



c) Das Trellis-Diagramm ergibt sich aus dem Zustandsdiagramm zu folgendem Bild:



d) Wir verwenden den Trellis aus der vorherigen Teilaufgabe:



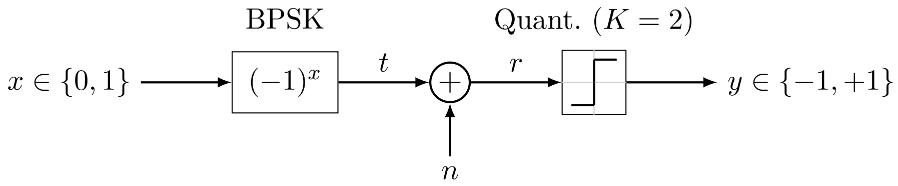
Der Pfad mit maximaler Metrik hat das Endgewicht 5,9, sodass die Rückverfolgung die decodierte Codebitfolge (00 01 11 01 10) und damit die decodierte Datenfolge (0 1 1 0 1) liefert.

e) Wenn der Code terminiert wäre, so wüsste der Decoder, dass am Ende der Zustand (00) erreicht sein muss. Die Decodierung würde die Datenfolge ($0\,1\,1\,0\,\underline{0}$) liefern.

   (Der Unterschied ist in diesem Fall nicht gravierend, da die beiden Pfade im vorletzten Taktschritt übereinstimmen.)

Aufgabe 6 (16 Punkte)

Gegeben ist das folgende Blockdiagramm eines BPSK-Übertragungssystems mit einem gedächtnislosen Kanal:



Die Schwelle des Quantisierers liegt bei 0; das symmetrisch verteilte Rauschen besitzt die Verteilungsfunktion

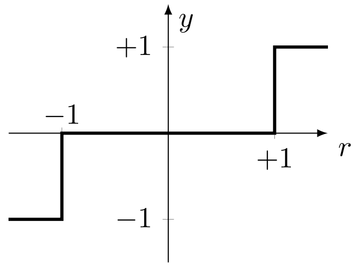
$$F_N(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\ln(2)\cdot n} & \text{für } n < 0 \\ 1 - 2^{-(n+1)} & \text{für } n \geq 0. \end{cases}$$

a) Zeichnen Sie das diskrete gedächtnislose Kanalmodell. Achten Sie dabei auf eine vollständige Beschriftung und geben Sie alle Übergangswahrscheinlichkeiten an. *(2 Punkte)*

b) Geben Sie die Kanalübergangsmatrix an und bestimmen Sie die Kapazität. Geben Sie außerdem die zum Erreichen der Kapazität notwendige Eingangsverteilung $P(X = 0)$ und $P(X = 1)$ an. *(3 Punkte)*

c) Sie ersetzen den Quantisierer durch einen mit der Abbildungsvorschrift

$$y = \begin{cases} -1 & r < -1 \\ 0 & -1 \leq r < 1 \\ +1 & 1 \leq r. \end{cases}$$

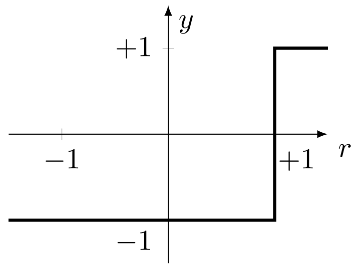


Zeichnen Sie das diskrete Kanalmodell zwischen X und Y. Berechnen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten und tragen Sie diese in das Diagramm ein. *(3 Punkte)*

d) Berechnen sie alle auftretenden Informationsdichten $i(x_n; y_m)$ und die Transinformation $I(X; Y)$ für den modifizierten Quantisierer. Nutzen Sie hierfür die in Teilaufgabe b) berechnete Eingangsverteilung. *(6 Punkte)*

e) Durch einen Produktionsfehler fällt die mittlere Quantisierungsstufe aus. Die Quantisierung lautet somit

$$y = \begin{cases} -1 & r < 1 \\ +1 & r \geq 1. \end{cases}$$

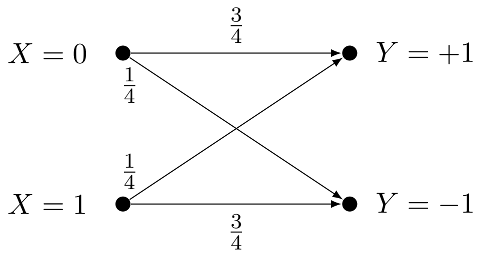


Sie senden nun Symbole $X \in \{0, 1\}$ mit $P(X = 0) = \alpha$ und $P(X = 1) = 1 - \alpha$. Berechnen Sie das α, das die Wahrscheinlichkeit minimiert, auf ein y zu entscheiden, das nicht dem gesendeten $t = (-1)^x$ entspricht. *(2 Punkte)*

Lösung

a) Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned}
P(Y=+1|X=0) &= P(N>-1)\\
&= 1-P(N\le -1) = 1-F_N(-1)\\
&= 1-\frac{1}{2}e^{\ln(2)\cdot(-1)}\\
&= 1-\frac{1}{2}2^{-1} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$



$$P(Y=-1|X=0) = 1-P(Y=+1|X=0) = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}
P(Y=+1|X=1) &= P(N>1)\\
&= 1-P(N\le 1) = 1-F_N(1)\\
&= 1-\left(1-2^{-(1+1)}\right)\\
&= 2^{-2} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$P(Y=-1|X=1) = 1-P(Y=+1|X=1) = \frac{3}{4}$$

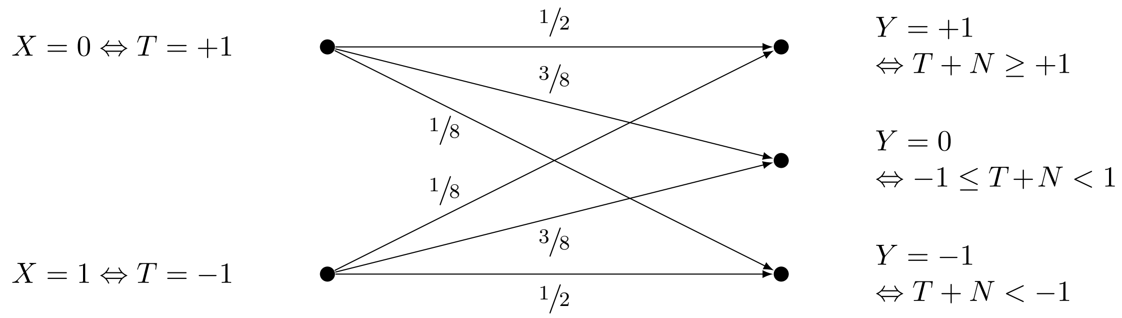
b)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Da jede Spalte von **P** eine Permutation jeder anderen Spalte ist und die Zeilensummen identisch sind, ist der Kanal schwach symmetrisch. Aus dieser Symmetrie folgt: $P(X=0) = P(X=1) = \frac{1}{2}$ und somit

$$\begin{aligned}
C &= \log_2(M) + \sum_{i=1}^{M} P_{i,j}\log_2\left(P_{i,j}\right)\\
&= 1+\frac{3}{4}\log_2\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{4}\log_2\left(\frac{1}{4}\right)\\
&= 1+\frac{3}{4}\log_2(3)-\frac{3}{4}\log_2(4)-\frac{1}{4}\log_2(4)\\
&= \frac{3}{4}\log_2(3)-1\\
&\approx 0{,}1887
\end{aligned}$$

c) Übergangsdiagramm: Zwei verschiedene Eingaben in den Kanal, drei mögliche Ausgänge.



Die Übergangswahrscheinlichkeiten ergeben sich durch:

$$
\begin{aligned}
P(Y = +1|X = 0) &= P(T + N \geq +1|T = +1) \\
&= P(N \geq 0) = 1 - F_N(0) \\
&= \frac{1}{2} \\
P(Y = -1|X = 0) &= P(T + N < -1|T = +1) \\
&= P(N < -2) = F_N(-2) \\
&= \frac{1}{8} \\
P(Y = 0|X = 0) &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \\
P(Y = -1|X = 1) &= F_N(0) = \frac{1}{2} \\
P(Y = +1|X = 1) &= 1 - F_N(2) = \frac{1}{8} \\
P(Y = 0|X = 1) &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

d) Definition Informationsdichte:

$$
i(x_n; y_m) = i(y_m; x_n) = \log_2 \frac{P(Y = y_m|X = x_n)}{P(Y = y_m)}
$$

Benötigte Ausgangswahrscheinlichkeiten mit $P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$:

$$
\begin{aligned}
P(Y = +1) &= P(X = 0)\frac{1}{2} + P(X = 1)\frac{1}{8} = \frac{5}{16} \\
P(Y = -1) &= P(X = 0)\frac{1}{8} + P(X = 1)\frac{1}{2} = P(Y = +1) = \frac{5}{16} \\
P(Y = 0) &= 1 - 2P(Y = -1) = \frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

Berechnung der Informationsdichten $i(x_n; y_m)$:

$$\begin{aligned}
i(0;+1) &= \log_2 \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{16}} = \log_2 \frac{1}{2} - \log_2 \frac{5}{16} = -\log_2(2) - \log_2 5 + \log_2(16) = 3 - \log_2 5 \\
i(0;-1) &= \log_2 \frac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{16}} = \log_2 \frac{1}{8} - \log_2 \frac{5}{16} = -\log_2(8) - \log_2 5 + \log_2(16) = 1 - \log_2 5 \\
i(1;-1) &= \log_2 \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{16}} = 3 - \log_2 5 \\
i(1;+1) &= \log_2 \frac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{16}} = 1 - \log_2 5 \\
i(0;0) &= \log_2 \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{8}} = 0 \\
i(1;0) &= \log_2 \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{8}} = 0
\end{aligned}$$

$i(\downarrow;\rightarrow)$	$+1$	0	-1
0	$3-\log_2 5$	0	$1-\log_2 5$
1	$1-\log_2 5$	0	$3-\log_2 5$

$$\begin{aligned}
I(X;Y) &= \sum_{y\in\{+1,0,-1\}} \sum_{x\in\{0,1\}} P(X=x, Y=y) i(x;y) \\
&= \sum_{y\in\{+1,0,-1\}} \sum_{x\in\{0,1\}} P(Y=y|X=x) \underbrace{P(X=x)}_{=\frac{1}{2}} i(x;y) \\
&= \frac{1}{2}(P(Y=+1|X=0)i(0;+1) + P(Y=+1|X=1)i(1;+1) + P(Y=0|X=0)i(0;0) \\
&\quad + P(Y=0|X=1)i(1;0) + P(Y=-1|X=0)i(0;-1) + P(Y=-1|X=1)i(1;-1)) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(3-\log_2 5) + \frac{1}{8}(1-\log_2 5) + \frac{3}{8}\cdot 0 + \frac{3}{8}\cdot 0 + \frac{1}{8}(1-\log_2 5) + \frac{1}{2}(3-\log_2 5)\right) \\
&= \frac{1}{2}(3-\log_2 5) + \frac{1}{8}(1-\log_2 5) \\
&= \frac{13}{8} - \frac{5}{8}\log_2 5
\end{aligned}$$

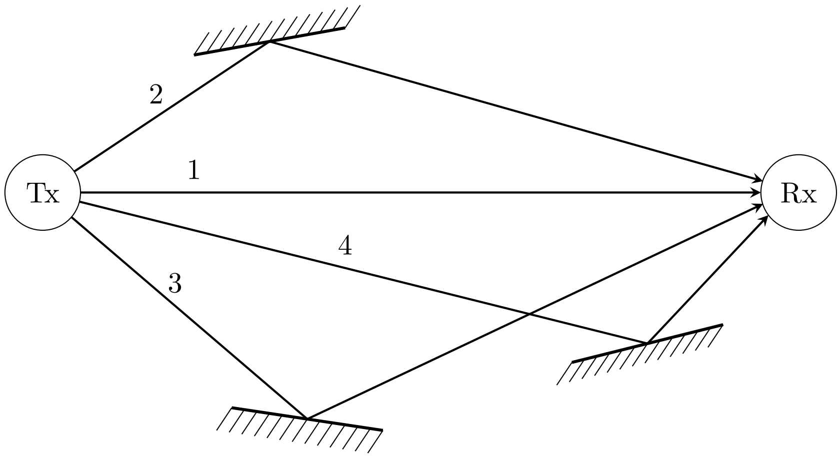
e) Fehlerfälle: $x = 0 \mapsto y = -1$, $x = 1 \mapsto y = +1$

$$\begin{aligned}
P_{\mathrm{E}}(\alpha) &= P(Y=-1|X=0)\cdot P(X=0) + P(Y=+1|X=1)\cdot P(X=1) \\
&= F_N(0)\cdot\alpha + (1-F_N(2))\cdot(1-\alpha) \\
&= \alpha\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8} \\
&= \frac{3}{8}\alpha + \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Da $P_{\mathrm{E}}(\alpha)$ eine lineare, streng monoton steigende Funktion ist und $0 \leq \alpha \leq 1$ gelten muss, ist $\alpha_{\text{opt}} = \arg\min_\alpha P_E(\alpha) = 0$.

Aufgabe 7 (14 Punkte)

Sie vermessen einen Mehrwege-Kanal, wobei die in der Tabelle dargestellten Werte die Dämpfung a in dB sowie die Distanz d in km der verschiedenen Pfade wiedergibt. „Tx“ ist der Sender und „Rx“ ist der Empfänger. Das Szenario kann als stationär angenommen werden. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle sei zu $c_0 = 3 \cdot 10^8 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ gegeben. Nehmen Sie an, dass die reflektierenden Materialien derart sind, dass keine Phasendrehung auftritt und dass die Pfadlängen ganzzahlige Vielfache der Wellenlänge sind.



Pfad	a/dB	d/km
1	0,00	0,3
2	6,00	1,2
3	20,00	1,8
4	12,00	1,5

a) Bestimmen Sie die Kanalimpulsantwort $h(t)$ des Kanals im äquivalenten Basisband. Stellen Sie $h(t)$ so dar, dass der kürzeste Pfad keine Verzögerung aufweist. *(3 Punkte)*

b) Berechnen Sie den Frequenzgang $H(f)$ des Kanals im äquivalenten Basisband. *(2 Punkte)*

c) Bestimmen Sie den Delay-Spread T_{DS} sowie Doppler-Spread B_{DS} des gegebenen Kanals. Begründen Sie Ihre Ergebnisse! *(2 Punkte)*

Die Impulsantwort $h_0(t)$ der Kombination aus Sende- und Empfangsfilter erfüllt $h_0(kT) = h_0[k] = \frac{1}{2}\delta[k]$ in den Abtastpunkten $t = kT$ mit $T = 1\,\mu\mathrm{s}$. Weiterhin kann der Kanal als rauschfrei angenommen werden und das gewählte Modulationsverfahren ist BPSK.

d) Sie möchten die diskrete Symbolfolge

$$c[k] = \begin{pmatrix} -1 & +1 & +1 \end{pmatrix}$$

senden. Bestimmen Sie die Impulsantwort $\tilde{h}[k]$ des diskreten Kanalmodells sowie die diskrete Empfangsfolge $r[k]$ nach Empfangsfilterung. *(5 Punkte)*

e) Nun empfangen Sie die Folge

$$r[k] = \begin{pmatrix} +0{,}5 & -0{,}5 & +0{,}5 & +0{,}25 & -0{,}125 & +0{,}175 & +0{,}075 & +0{,}05 \end{pmatrix},$$

wobei alle Empfangswerte danach und davor Null sind. Sie wissen, dass 3 Symbole gesendet wurden. Bestimmen Sie die Sendefolge $c[k]$ und begründen Sie ausführlich Ihren Lösungsweg! *(2 Punkte)*

Lösung

a) Um die Kanalimpulsantwort $h(t)$ im Basisband zu bestimmen, muss für jeden Pfad i die in der Tabelle gegebene Dämpfung $a|_{\mathrm{dB},i}$ in den linearen Wert sowie die gegebene Distanz in die zeitliche Verzögerungen τ_i umgerechnet werden. Mit

$$a|_{\mathrm{lin}} = 10^{\frac{-a|_{\mathrm{dB}}}{20}} \quad \text{und} \quad \tau_i = \frac{d}{c_0}$$

folgt

Pfad i	$a\|_{\mathrm{lin,i}}$	τ_i[µs]
1	1	1,0
2	$\frac{1}{2}$	4,0
3	$\frac{1}{10}$	6,0
4	$\frac{1}{4}$	5,0

Da $h(t)$ so dargestellt werden soll, dass der kürzeste Pfad, hier Pfad 1, keine Verzögerung aufweist, ist für die Kanalimpulsantwort die Differenz der Pfade zum kürzesten Pfad von Interesse:

$$\begin{aligned} h(t) &= \sum_i a|_{\mathrm{lin,i}} \delta(t - (\tau_i - \tau_1)) \\ &= \delta(t) + \frac{1}{2}\delta(t - 3\,\mathrm{µs}) + \frac{1}{4}\delta(t - 4\,\mathrm{µs}) + \frac{1}{10}\delta(t - 5\,\mathrm{µs}) \end{aligned}$$

b) Aus dem Verschiebungssatz der DFT mit

$$\delta(t-\tau) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f \tau} \qquad \text{sowie} \qquad h(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad H(f)$$

lässt sich der Frequenzgang des Kanals zu

$$H(f) = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f \cdot 3\,\mathrm{µs}} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f \cdot 4\,\mathrm{µs}} + \frac{1}{10}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f \cdot 5\,\mathrm{µs}}$$

bestimmen.

c) Der Delay-Spread ist definiert als die Zeitdifferenz des kürzesten Pfades zum längsten Pfad. Er ergibt sich zu $T_{\mathrm{DS}} = \tau_3 - \tau_1 = 5\,\mathrm{µs}$.
Da das Szenario als stationär angenommen werden kann, ändert sich weder die Position des Senders, des Empfängers, noch der reflektierenden Objekte. Somit ändert sich der Kanal über die Zeit nicht und kann als zeitinvariant angenommen werden. Da der Doppler-Spread B_{DS} das Inverse der Kanalkohärenzzeit T_{C} ist, kann dieser zu $B_{\mathrm{DS}} = 0$ bestimmt werden.

d) Es soll nun der diskrete Kanal betrachtet werden. Hierzu muss die Impulsantwort des diskreten Kanals betrachtet werden, welche sich zu $\tilde{h}[k] = h_0[k] * h[k]$ ergibt. Da $h_0[k] = \frac{1}{2}\delta[k]$ im Abtastpunkt gilt sowie Sendefilter und Matched-Filter so gewählt sind, dass sie keine Intersymbolinterferenz erzeugen, ist $\tilde{h}[k] = \frac{1}{2}h[k]$. Die Kanalimpulsantwort des mit $T = 1\,\mathrm{µs}$ diskretisierten Kanals ergibt sich zu

$$\tilde{h}[k] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{20} \end{pmatrix} .$$

Die Empfangsfolge $r[k]$ berechnet sich über die Faltung der Sendefolge mit der gegebenen Kanalimpulsantwort

$$r[k] = \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}[l] c[k-l] \, ,$$

wobei L die Länge von $\tilde{h}[k]$ sei.
Die einzelnen Empfangssymbole berechnen sich zu

$$\begin{aligned}
r[0] &= \tilde{h}[0]c[0] = \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2} \\
r[1] &= \tilde{h}[0]c[1] = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \\
r[2] &= \tilde{h}[0]c[2] = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \\
r[3] &= \tilde{h}[3]c[0] = \frac{1}{4} \cdot (-1) = -\frac{1}{4} \\
r[4] &= \tilde{h}[3]c[1] + \tilde{h}[4]c[0] = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot (-1) = \frac{1}{8} \\
r[5] &= \tilde{h}[3]c[2] + \tilde{h}[4]c[1] + \tilde{h}[5]c[0] = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{20} = \frac{10+5-2}{40} = \frac{13}{40} \\
r[6] &= \tilde{h}[4]c[2] + \tilde{h}[5][c1] = \frac{1}{8} + \frac{1}{20} = \frac{7}{40} \\
r[7] &= \tilde{h}[5]c[2] = \frac{1}{20}
\end{aligned}$$

Die Empfangsfolge $r[k]$ lässt sich zu

$$r[k] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{8} & +\frac{13}{40} & +\frac{7}{40} & +\frac{1}{20} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$r[k] = \begin{pmatrix} -0{,}5 & +0{,}5 & +0{,}5 & -0{,}25 & +0{,}125 & +0{,}325 & +0{,}175 & +0{,}05 \end{pmatrix}$$

bestimmen.

e) Da die Empfangsfolge aus $M = 8$ Werten besteht und die diskrete Kanalimpulsantwort $\tilde{h}[k]$ aus $L = 6$ Werten besteht, muss die Sendefolge $N = M + 1 - L = 3$ Werten bestehen. (Eine Faltung einer Folge der Länge L mit einer anderen Folge der Länge N resultiert in einer Folge der Länge $M = N + L - 1$.) Da in der diskreten Kanalimpulsantwort $\tilde{h}[k]$ das erste Tap $\tilde{h}[0] \neq 0$ und das zweite bzw. dritte Tap $\tilde{h}[1] = \tilde{h}[2] = 0$ ist, kann aus den ersten drei Werten der Empfangsfolge die Sendefolge abgelesen werden. Dabei ist zu beachten, dass durch $h_0[k] = \frac{1}{2}\delta[k]$ im Abtastpunkt die Empfangsfolge noch mit dem Faktor 2 multipliziert werden muss. Die Sendefolge bestimmt sich zu

$$c[k] = \begin{pmatrix} +1 & -1 & +1 \end{pmatrix} .$$

Anmerkung: Das Aufstellen eines linearen Gleichungssystems wie in der vorherigen Aufgabe führt auch zum Ziel.

Aufgabe 8 (12 Punkte)

Sie untersuchen den WLAN-Standard IEEE-802.11n, welcher OFDM als Mehrträgerübertragungsverfahren nutzt. Bei Ihrer Recherche finden Sie folgende Parameter des Standards:

- Trägerfrequenz: $f_{\mathrm{T}} = 5\,\mathrm{GHz}$
- Unterträgerabstand: $\Delta f = 312{,}5\,\mathrm{kHz}$
- Anzahl der mit Symbolen belegten Träger: $N_{\mathrm{belegt}} = 108$
- Anzahl der mit Nullen belegten Träger: $N_{\mathrm{Null}} = 20$
- Dauer eines OFDM-Symbols inklusive zyklischem Präfix: $T_{\mathrm{ges}} = 4\,\mathrm{\mu s}$
- Digitales Modulationsverfahren: 64-QAM

Weiterhin wird zur Kanalcodierung ein Code mit der Rate $r = \frac{2}{3}$ eingesetzt.

a) Berechnen Sie Sie Anzahl der Stützstellen der IDFT beziehungsweise DFT, die Dauer eines OFDM-Symbols exklusive zyklischem Präfix T_{M} sowie die Dauer des zyklischen Präfix T_{P}. *(3 Punkte)*

b) Berechnen Sie die maximal mögliche Systemdatenrate R_{bit}. *(3 Punkte)*

Die folgende Aufgabe kann unabhängig von den vorhergehenden Aufgaben bearbeitet werden.

Sie nutzen nun ein OFDM-System mit $N = 4$ Unterträgern, von denen alle mit BPSK-Symbolen belegt sind. Das zyklische Präfix betrage 25% des OFDM-Symbols exklusive zyklischen Präfix.

c) Berechnen Sie das zu übertragende Zeitsignal $s[n]$, wenn Sie die Datenfolge

$$c[n] = \begin{pmatrix} +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

senden möchten. *(6 Punkte)*

Lösung

a) Die Anzahl der Stützstellen der IDFT bzw. DFT entspricht der Anzahl der Unterträger. Diese lässt sich aus der Anzahl der mit Symbolen belegten Träger sowie der Anzahl der mit Nullen belegten Träger berechnen:

$$N = N_{\mathrm{belegt}} + N_{\mathrm{Null}} = 108 + 20 = 128$$

Aus dem Unterträgerabstand Δf lässt sich die Zeitdauer des OFDM-Symbols exklusive zyklischen Präfix berechnen:

$$T_{\mathrm{M}} = \frac{1}{\Delta f} = \frac{1}{312{,}5\,\mathrm{kHz}} = 3{,}2\,\mathrm{\mu s}$$

Da ein OFDM-Symbol inklusive zyklischem Präfix $T_{\mathrm{ges}} = 4\,\mathrm{\mu s}$ dauert, berechnet sich die zeitliche Dauer des zyklischen Präfix zu

$$T_{\mathrm{P}} = T_{\mathrm{ges}} - T_{\mathrm{M}} = 4\,\mathrm{\mu s} - 3{,}2\,\mathrm{\mu s} = 0{,}8\,\mathrm{\mu s}\,.$$

b) Da für jedes OFDM-Symbol nur N_{belegt} Unterträger mit Symbolen belegt werden, berechnet sich die Symbolrate des OFMD-Systems zu

$$R_{\text{sym}} = \frac{1}{T_{\text{P}} + T_{\text{M}}} \cdot N_{\text{belegt}}$$

Durch Nutzung einer 64-QAM als Modulationsverfahren mit $M = 64$ Symbolpunkten, werden $\log_2(M) = 6$ Bit zu einem Symbol zusammengefasst. Weiterhin wird eine Kanalcodierung der Rate $r = \frac{2}{3}$ eingesetzt. Die maximal mögliche Systemdatenrate ergibt sich zu

$$\begin{aligned} R_{\text{bit}} &= R_{\text{sym}} \log_2(M) r \\ &= \frac{N_{\text{belegt}}}{T_{\text{P}} + T_{\text{M}}} \log_2(M) r \\ &= \frac{108}{4\,\mu\text{s}} \log_2(64) \frac{2}{3} \\ &= 108\,{}^{\text{Mbit}}/_{\text{s}} \end{aligned}$$

c) Da die Sendefolge $c[n]$ aus 8 zu sendenden Symbolen besteht und das OFDM-System $N = 4$ Unterträger besitzt, müssen zwei OFDM-Symbole berechnet werden. Die Sendefolge lässt sich aufteilen in

$$c_1[n] = \begin{pmatrix} +1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad c_2[n] = \begin{pmatrix} +1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich die Belegung der Unterträger $k\,, k \in \{0, 1, 2, 3\}$ für das OFDM-Symbol ℓ zu

$$c_k[\ell = 1] = \begin{pmatrix} +1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad c_k[\ell = 2] = \begin{pmatrix} +1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da die Belegung der Unterträger für beide Signale gleich ist, genügt die Berechnung des Zeitsignals für $c_k[\ell = 1]$. Mittels der IDFT aus der Formelsammlung

$$x[k] = \text{IDFT}\{X_\mu\} = \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} X_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi \frac{k\mu}{M}}$$

berechnen sich beide Zeitsignale zu

$$
\begin{aligned}
s_1[n=0] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} c_k[\ell=1]e^{\mathrm{j}2\pi\frac{0k}{N}} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{N-1} c_k[\ell=1] \\
&= \frac{1}{4}(1+(-1)+(-1)+(-1)) \\
&= -\frac{1}{2} \\
s_1[n=1] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} c_k[\ell=1]e^{\mathrm{j}2\pi\frac{1k}{N}} \\
&= \frac{1}{4}\left(1+(-1)e^{\mathrm{j}\pi\frac{1}{2}}+(-1)e^{\mathrm{j}\pi}+(-1)e^{\mathrm{j}\pi\frac{3}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{4}(1-\mathrm{j}+1+\mathrm{j}) \\
&= \frac{1}{2} \\
s_1[n=2] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} c_k[\ell=1]e^{\mathrm{j}2\pi\frac{2k}{N}} \\
&= \frac{1}{4}\left(1+(-1)e^{\mathrm{j}\pi}+(-1)e^{\mathrm{j}2\pi}+(-1)e^{\mathrm{j}3\pi}\right) \\
&= \frac{1}{4}(1+1-1+1) \\
&= \frac{1}{2} \\
s_1[n=3] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} c_k[\ell=1]e^{\mathrm{j}2\pi\frac{3k}{N}} \\
&= \frac{1}{4}\left(1+(-1)e^{\mathrm{j}\frac{3}{2}\pi}+(-1)e^{\mathrm{j}\frac{6}{2}\pi}+(-1)e^{\mathrm{j}\frac{9}{2}\pi}\right) \\
&= \frac{1}{4}(1+\mathrm{j}+1-\mathrm{j}) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Die beiden Zeitsignale ohne zyklisches Präfix ergeben sich zu

$$
s_1[n] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad s_2[n] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \end{pmatrix} .
$$

Da das zyklische Präfix 25% des OFDM-Symbols exklusive zyklischen Präfix beträgt, müssen das letzte Sample der erhaltenen Zeitfolgen als zyklisches Präfix den errechneten Zeitfolgen vorangestellt werden. Für die gesamte Sendefolge ergibt sich

$$
s[n] = \begin{pmatrix} +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & | +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \end{pmatrix} .
$$

Aufgabe 9 (12 Punkte)

Sie übertragen zwei Symbole mit Hilfe des Alamouti-Verfahrens und empfangen an der Empfangsantenne die beiden folgenden Symbole:

$$r[1] = 0$$
$$r[2] = -4 - 8\mathrm{j}\,.$$

Die beiden Kanalkoeffizienten lauten

$$h_1 = 1 + \mathrm{j}$$
$$h_2 = 1 - \mathrm{j}$$

a) Rekonstruieren Sie die beiden Sendesymbole c_1 und c_2. Ignorieren Sie etwaige Rauscheinflüsse. *(4 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

Sie betrachten im Folgenden ein 2×2 MIMO-System mit $N_{\mathrm{T}} = 2$ Sende- und $N_{\mathrm{R}} = 2$ Empfangsantennen. Die Kanalmatrix ergibt sich zu

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie den Zero-Forcing-Detektor für diesen Kanal. *(3 Punkte)*

c) Bestimmen Sie die Kapazität dieses Kanals für SNR = 2. *(2 Punkte)*

Um die Empfangsqualität zu verbessern, rüsten Sie Ihren Empfänger mit einer zusätzlichen Antenne auf. Damit ergibt sich eine neue Kanalmatrix

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Wie verändert sich die Kapazität durch die zusätzliche Antenne? Berechnen Sie dazu die Kapazität des Kanals mit zusätzlicher Antenne (SNR = 2). *(3 Punkte)*

Lösung

a) Wir erhalten

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1^\star r[1] + h_2 r^\star[2] \\ &= (1 - \mathrm{j})(-4 + 8\mathrm{j}) \\ &= 4 + 12\mathrm{j} \\ y_2 &= h_2^\star r[1] - h_1 r^\star[2] \\ &= -(1 + \mathrm{j})(-4 + 8\mathrm{j}) \\ &= 12 - 4\mathrm{j} \end{aligned}$$

Wir haben weiterhin

$$|h_1|^2 = 2$$
$$|h_2|^2 = 2$$

Unter Nichtbeachtung der Rauscheinflüsse ergibt sich

$$y_1 = (|h_1|^2 + |h_2|^2) \cdot c_1 \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = \frac{y_2}{4} = 1 + 3\mathrm{j}$$

sowie

$$y_2 = (|h_1|^2 + |h_2|^2) \cdot c_2 \qquad \Rightarrow \qquad c_2 = \frac{y_2}{4} = 3 - \mathrm{j}$$

b) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_{\mathrm{ZF}} &= (\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}} \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Da die Matrix quadratisch und invertierbar ist, können Sie alternativ auch direkt die Inverse bilden

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{ZF}} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{H})} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

c) Die Kapazität ergibt sich mittels der Log-Det-Formel

$$\begin{aligned}
C_0 &= \log_2 \left(\det \left(\boldsymbol{I}_2 + \frac{\mathrm{SNR}}{2} \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}} \right) \right) \\
&= \log_2 \left(\det \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right) \right) \\
&= \log_2 \left(\det \left(\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right) \right) \\
&= \log_2(17) \\
&\approx 4{,}0875
\end{aligned}$$

d) Durch die zusätzliche Antenne ergibt sich eine neue Kapazität:

$$\begin{aligned}
C_0 &= \log_2\left(\det\left(\boldsymbol{I}_3 + \frac{\mathrm{SNR}}{2}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)\right) \\
&= \log_2\left(\det\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\right)\right) \\
&= \log_2\left(\det\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\ 4 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\right)\right) \\
&= \log_2\left(\det\left(\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 4 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\right)\right) \\
&= \log_2(33) \\
&\approx 5{,}0444
\end{aligned}$$

Durch die zusätzliche Antenne wird die Kapazität um ungefähr 1 Bit/Kanalzugriff erhöht.

Formelsammlung und Tabellen

A Tabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	0,80	0,788145	1,60	0,945201	2,40	0,991802	3,20	0,999313
0,02	0,507978	0,82	0,793892	1,62	0,947384	2,42	0,992240	3,22	0,999359
0,04	0,515953	0,84	0,799546	1,64	0,949497	2,44	0,992656	3,24	0,999402
0,06	0,523922	0,86	0,805105	1,66	0,951543	2,46	0,993053	3,26	0,999443
0,08	0,531881	0,88	0,810570	1,68	0,953521	2,48	0,993431	3,28	0,999481
0,10	0,539828	0,90	0,815940	1,70	0,955435	2,50	0,993790	3,30	0,999517
0,12	0,547758	0,92	0,821214	1,72	0,957284	2,52	0,994132	3,32	0,999550
0,14	0,555670	0,94	0,826391	1,74	0,959070	2,54	0,994457	3,34	0,999581
0,16	0,563559	0,96	0,831472	1,76	0,960796	2,56	0,994766	3,36	0,999610
0,18	0,571424	0,98	0,836457	1,78	0,962462	2,58	0,995060	3,38	0,999638
0,20	0,579260	1,00	0,841345	1,80	0,964070	2,60	0,995339	3,40	0,999663
0,22	0,587064	1,02	0,846136	1,82	0,965621	2,62	0,995604	3,42	0,999687
0,24	0,594835	1,04	0,850830	1,84	0,967116	2,64	0,995855	3,44	0,999709
0,26	0,602568	1,06	0,855428	1,86	0,968557	2,66	0,996093	3,46	0,999730
0,28	0,610261	1,08	0,859929	1,88	0,969946	2,68	0,996319	3,48	0,999749
0,30	0,617911	1,10	0,864334	1,90	0,971283	2,70	0,996533	3,50	0,999767
0,32	0,625516	1,12	0,868643	1,92	0,972571	2,72	0,996736	3,52	0,999784
0,34	0,633072	1,14	0,872857	1,94	0,973810	2,74	0,996928	3,54	0,999800
0,36	0,640576	1,16	0,876976	1,96	0,975002	2,76	0,997110	3,56	0,999815
0,38	0,648027	1,18	0,881000	1,98	0,976148	2,78	0,997282	3,58	0,999828
0,40	0,655422	1,20	0,884930	2,00	0,977250	2,80	0,997445	3,60	0,999841
0,42	0,662757	1,22	0,888768	2,02	0,978308	2,82	0,997599	3,62	0,999853
0,44	0,670031	1,24	0,892512	2,04	0,979325	2,84	0,997744	3,64	0,999864
0,46	0,677242	1,26	0,896165	2,06	0,980301	2,86	0,997882	3,66	0,999874
0,48	0,684386	1,28	0,899727	2,08	0,981237	2,88	0,998012	3,68	0,999883
0,50	0,691463	1,30	0,903200	2,10	0,982136	2,90	0,998134	3,70	0,999892
0,52	0,698468	1,32	0,906582	2,12	0,982997	2,92	0,998250	3,72	0,999900
0,54	0,705401	1,34	0,909877	2,14	0,983823	2,94	0,998359	3,74	0,999908
0,56	0,712260	1,36	0,913085	2,16	0,984614	2,96	0,998462	3,76	0,999915
0,58	0,719043	1,38	0,916207	2,18	0,985371	2,98	0,998559	3,78	0,999922
0,60	0,725747	1,40	0,919243	2,20	0,986097	3,00	0,998650	3,80	0,999928
0,62	0,732371	1,42	0,922196	2,22	0,986791	3,02	0,998736	3,82	0,999933
0,64	0,738914	1,44	0,925066	2,24	0,987455	3,04	0,998817	3,84	0,999938
0,66	0,745373	1,46	0,927855	2,26	0,988089	3,06	0,998893	3,86	0,999943
0,68	0,751748	1,48	0,930563	2,28	0,988696	3,08	0,998965	3,88	0,999948
0,70	0,758036	1,50	0,933193	2,30	0,989276	3,10	0,999032	3,90	0,999952
0,72	0,764238	1,52	0,935745	2,32	0,989830	3,12	0,999096	3,92	0,999956
0,74	0,770350	1,54	0,938220	2,34	0,990358	3,14	0,999155	3,94	0,999959
0,76	0,776373	1,56	0,940620	2,36	0,990862	3,16	0,999211	3,96	0,999963
0,78	0,782305	1,58	0,942947	2,38	0,991344	3,18	0,999264	3,98	0,999966

B Folgen und Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1 \tag{B.1}$$

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \quad \text{für } x \neq 1 \tag{B.2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \cdots = (1+x)^r \quad \text{für } \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \tag{B.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots = \mathrm{e}^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \tag{B.4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{(1-x)^n}{n} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \cdots = \ln(x) \quad \text{für } 0 < x \leq 2 \tag{B.5}$$

$$\sum_{n=1}^{k} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \tag{B.6}$$

C Integralrechnung

$$\int \delta(x - x_0)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \tag{C.1}$$

$$\int x\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2}(ax - 1) \tag{C.2}$$

$$\int x^2\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2) \tag{C.3}$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \tag{C.4}$$

$$\int \mathrm{e}^{ax} \sin(bx)\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2 + b^2}\Big(a \sin(bx) - b \cos(bx)\Big) \tag{C.5}$$

$$\int \sin(ax) \cos(ax)\, \mathrm{d}x = -\frac{\cos^2(ax)}{2a} \quad \text{für } a \neq 0 \tag{C.6}$$

$$\int_0^{\infty} x^n\, \mathrm{e}^{-ax}\, \mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{für } a > 0, n \in \mathbb{N} \tag{C.7}$$

$$\int_0^{\infty} x^2\, \mathrm{e}^{-ax^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \quad \text{für } a > 0 \tag{C.8}$$

D Formeln zur diskreten Fouriertransformation

Definition

$$x[k] = \mathrm{IDFT}\{X_\mu\} = \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} X_\mu \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{M}k\mu} \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \sum_{k=0}^{M-1} x[k] \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{M}k\mu} = \mathrm{DFT}\{x[k]\} = X_\mu \tag{D.1}$$

E Formeln zur Fouriertransformation

Definition

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\, \mathrm{d}f \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\, \mathrm{d}t = X(f) \tag{E.1}$$

Eigenschaften

$$\sum c_i x_i(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \sum c_i X_i(f) \tag{E.2}$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad (\mathrm{j}2\pi f)^n \; X(f) \tag{E.3}$$

$$x\left(t-t_0\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_0} \; X(f) \tag{E.4}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t} \; x(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X\left(f-f_0\right) \tag{E.5}$$

$$x(t) * y(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f)Y(f) \tag{E.6}$$

$$x(t)y(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f) * Y(f) \tag{E.7}$$

$$x(t/a) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad |a|X(af) \tag{E.8}$$

Korrespondenzen

$$1 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \delta(f) \tag{E.9}$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2}\delta(f+f_0) + \frac{1}{2}\delta(f-f_0) \tag{E.10}$$

$$\frac{\sin(\pi F t)}{\pi t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f) = \begin{cases} 1 \text{ für } |f| < \frac{F}{2} \\ 0 \text{ für } |f| > \frac{F}{2} \end{cases} \tag{E.11}$$

$$\mathrm{e}^{-\pi t^2} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{e}^{-\pi f^2} \tag{E.12}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 \text{ für } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 \text{ für } |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} \tag{E.13}$$

$$\frac{1}{2}\delta(t+t_0) + \frac{1}{2}\delta(t-t_0) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \cos(2\pi f t_0) \tag{E.14}$$

$$\delta(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 1 \tag{E.15}$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\mathrm{j}}{2}\delta(f+f_0) - \frac{\mathrm{j}}{2}\delta(f-f_0) \tag{E.16}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 \text{ für } t > 0 \\ 0 \text{ für } t < 0 \end{cases} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{\mathrm{j}2\pi f} \tag{E.17}$$

$$\mathrm{e}^{-a|t|}\,, \quad a > 0 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} \tag{E.18}$$

$$x(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-at} \text{ für } t > 0 \\ 0 \text{ für } t < 0 \end{cases}, \quad a > 0 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{a + \mathrm{j}2\pi f} \tag{E.19}$$

$$x(t) = \begin{cases} t\mathrm{e}^{-at} \text{ für } t > 0 \\ 0 \text{ für } t < 0 \end{cases}, \quad a > 0 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{\left(a + \mathrm{j}2\pi f\right)^2} \tag{E.20}$$

$$\frac{1}{\pi t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -\,\mathrm{j}\ \mathrm{sign}(f) \tag{E.21}$$

$$\mathrm{j}\ \mathrm{sign}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{\pi f} \tag{E.22}$$

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\lambda)}{t-\lambda}\, d\lambda \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -\,\mathrm{j}\ \mathrm{sign}(f)X(f) \tag{E.23}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) \tag{E.24}$$

F Trigonometrie

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \tag{F.1}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \tag{F.2}$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\Big) \tag{F.3}$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big) \tag{F.4}$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\Big) \tag{F.5}$$