Schriftliche Prüfung zur Vorlesung

Nachrichtentechnik I

07.03.2022

Musterlösung

Hinweise

Die Prüfungsdauer beträgt **drei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **zehn** Aufgaben zu bearbeiten.
Benutzen Sie nur die zur Verfügung gestellten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an.
Verwenden Sie zur Bearbeitung einen **dokumentenechten Stift** und keine rote Farbe. Schreiben Sie leserlich und vermeiden Sie, das vorgedruckte Doppelblatt zu beschriften. Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der **Lösungsweg und die gültige Lösung eindeutig erkennbar** sein, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann.
Abzugeben sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten und **nach Aufgabennummer sortierten Ausarbeitungen**. Nicht abzugeben sind die Aufgabenblätter, Ihre Formelsammlung sowie Ihr Konzeptpapier.

Zugelassene Hilfsmittel

Erlaubt sind **ein** beidseitig von eigener Hand mit Bleistift, Kugelschreiber, Füller o. Ä. beschriebenes **A4-Blatt** (Original, keine Kopie) sowie ein **nicht-programmierbarer** Taschenrechner.

Nach der Prüfung

Das **Ergebnis** Ihrer Prüfung erfahren Sie spätestens am **04.04.2022** im Online-Notensystem. Details zur **Klausureinsicht** finden Sie auf Ilias. Dort werden Sie auch weitere Informationen zur **mündlichen Nachprüfung** finden.

Geben Sie diese Aufgaben nicht mit ab, sondern behalten Sie diese als Erinnerung für oben gegebene Termine.

Aufgabe 1 (18 Punkte)

Zur Datenkomprimierung soll die Zeichenfolge X mit dem LZ77-Verfahren codiert werden. X ist gegeben als:

$$X = \texttt{rhabarberbarbara}$$

a) Encodieren Sie X nach dem LZ77-Algorithmus. *(3 Punkte)*

b) Bei der Speicherung erfolgt ein Fehler und das dritte Tupel wird als $\tilde{s}_3 = [0, 0, \text{„}\texttt{u}\text{“}]$ gespeichert. Wie lautet die nach Auslesen des Speichers decodierte Zeichenfolge? *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

Für eine Studie zeichnen Studierende ihre tägliche Schlafdauer in Stunden in einer App auf, wobei die Schlafdauer täglich an die Studienleiterin übermittelt werden soll. Um die Menge der zu übertragenden Daten zu reduzieren, soll die tägliche Schlafdauer durch Codierung komprimiert werden. Bei einer Stichprobe erhalten Sie folgende Messdaten für die tägliche Schlafdauer:

Tägliche Schlafdauer	0 – 2 h	2 – 4 h	4 – 6 h	6 – 8 h	8 – 10 h
Anzahl Studierende	4	16	36	50	34

c) Entwerfen Sie, anhand der gegebenen Tabelle, für die tägliche Schlafdauer einen präfixfreien Code kleinster mittlerer Wortlänge. Geben Sie die Codewörter explizit an. *(3 Punkte)*

d) Berechnen Sie die mittlere Codewortlänge. *(2 Punkte)*

e) Berechnen Sie die Redundanz der Codierung. *(3 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

Gegeben sei ein gleichförmiger Quantisierer mit $K = 2$ Quantisierungsniveaus und $b_{\max} = 2$. Das zu quantisierende Signal besitzt die Verteilungsdichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2) & \text{für} \quad -2 \leq x \leq 0 \\ -\frac{1}{4}(x-2) & \text{für} \quad 0 < x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und der Quantisierungsfehler sei näherungsweise gleichverteilt.

f) Geben Sie den Signal-Rausch-Abstand des Quantisierers an. *(5 Punkte)*

Lösung

a) Die Codierung erfolgt nach der folgenden Tabelle:

	r h a b a r b e r b a r b a r a	s_1=[0,0, „r“]
r	h a b a r b e r b a r b a r a	s_2=[0,0, „h“]
r h	a b a r b e r b a r b a r a	s_3=[0,0, „a“]
r h a	b a r b e r b a r b a r a	s_4=[0,0, „b“]
r h a b	**a** r b e r b a r b a r a	s_5=[2,1, „r“]
r h a b a r	**b** e r b a r b a r a	s_6=[3,1, „e“]
r h a b a r b e	**r b** a r b a r a	s_7=[3,2, „a“]
r h a b a r b e r b a	**r b a r** a	s_8=[3,4, „a“]

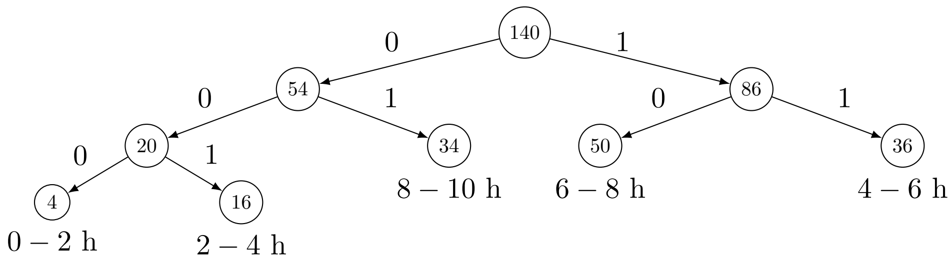
b) Der dritte übertragene Buchstabe, sowie alle Zeichenfolgen, in denen wieder auf s_3 verwiesen wird, sind fehlerhaft. Die Decodierung kann wie folgt tabellarisch nachvollzogen werden:

s_1=[0,0, „r“]		r
s_2=[0,0, „h“]	r	h
$\tilde{s}_3$=[0,0, „u“]	rh	u
s_4=[0,0, „b“]	rhu	b
s_5=[2,1, „r“]	rhub	ur
s_6=[3,1, „e“]	rhubur	be
s_7=[3,2, „a“]	rhuburbe	rba
s_8=[3,4, „a“]	rhuburberba	rbara

Die encodierte Folge ist:

$$\tilde{X} = \texttt{rhuburberbarbara}$$

c) Eine mögliche Baumdarstellung des Codes ergibt sich zu:



Die dem Baum entsprechende Codewortzuordnung ist:

Tägliche Schlafdauer	$0-2\,\text{h}$	$2-4\,\text{h}$	$4-6\,\text{h}$	$6-8\,\text{h}$	$8-10\,\text{h}$
Anzahl	4	16	36	50	34
Codewort	000	001	11	10	01

d) Für die mittlere Codewortlänge werden die absoluten Häufigkeiten zunächst in Wahrscheinlichkeiten umgewandelt:

Tägliche Schlafdauer	$0-2\,\text{h}$	$2-4\,\text{h}$	$4-6\,\text{h}$	$6-8\,\text{h}$	$8-10\,\text{h}$
Wahrscheinlichkeit $P(x_n)$	4/140	16/140	36/140	50/140	34/140
Codewortlänge $L(x_n)$	3	3	2	2	2

Die mittlere Codewortlänge ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} L &= \sum_{n=1}^{5} P(x_n) \cdot L(x_n) \\ &= 3 \cdot \frac{4}{140} + 3 \cdot \frac{16}{140} + 2 \cdot \frac{36}{140} + 2 \cdot \frac{50}{140} + 2 \cdot \frac{34}{140} \\ &= \frac{300}{140} = \frac{15}{7} \\ &\approx 2{,}143 \, \frac{\text{bit}}{\text{Symbol}} \end{aligned}$$

e) Die Redundanz einer Codierung ist gegeben durch:

$$R_{\mathrm{C}} = L - H(X)$$

Die Quellentropie beträgt:

$$\begin{aligned}
H(X) &= -\sum_{n=1}^{5} P(x_n) \cdot \log_2\left(P(x_n)\right) \\
&= -\frac{4}{140}\log_2\left(\frac{4}{140}\right) - \frac{16}{140}\log_2\left(\frac{16}{140}\right) - \frac{36}{140}\log_2\left(\frac{36}{140}\right) \\
&\quad - \frac{50}{140}\log_2\left(\frac{50}{140}\right) - \frac{34}{140}\log_2\left(\frac{34}{140}\right) \\
&\approx 2{,}034\frac{\text{bit}}{\text{Symbol}}
\end{aligned}$$

Demnach beträgt die Redundanz der Codierung

$$R_{\mathrm{C}} = 2{,}143\frac{\text{bit}}{\text{Symbol}} - 2{,}034\frac{\text{bit}}{\text{Symbol}} \approx 0{,}109\frac{\text{bit}}{\text{Symbol}}$$

f) Da $x \in [-2, 2]$, $K = 2$ und der Quantisierer gleichförmig ist, sind die Quantisierungsniveaus $b_1 = -1$ und $b_2 = 1$. Die Signalleistung wird berechnet durch:

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{0} x^2 \cdot \frac{1}{4}(x+2)\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} x^2 \cdot \frac{1}{4}(-x+2)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Mit der Substitution $x' = -x$ im ersten Integral wird klar, dass die Integrale äquivalent sind und die Verteilungsfunktion gerade Symmetrie aufweist. Deshalb können sie gemeinsam berechnet werden:

$$\begin{aligned}
S &= 2\int_{0}^{2} x^2 \cdot \frac{1}{4}(-x+2)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{0}^{2} -\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2\mathrm{d}x \\
&= 2\left[-\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{6}x^3\right]_0^2 \\
&= 2\left(-\frac{2^4}{16} + \frac{2^3}{6}\right) \\
&= 2 \cdot \left(\frac{8}{6} - 1\right) \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Da das Quantisierungsrauschen annähernd gleichverteilt ist, gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{2b_{\max}}{k} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2 \\
N_{\mathrm{Q}} &= \frac{\Delta^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg für Quantisierungsrauschen: Da die Verteilung symmetrisch ist, reicht es, die Rauschleistung nur für ein Quantisierungsniveau zu berechnen und dann zu verdoppeln.

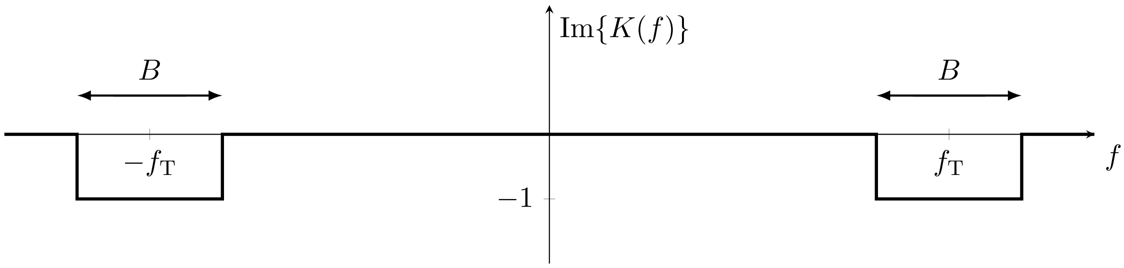
$$\begin{aligned}
N_{\mathrm{Q}} &= 2 \cdot \int_0^2 (b_2 - x)^2 \cdot \frac{1}{4}\,(2-x)\,dx \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 \left(2 - 4x + 2x^2 - x + 2x^2 - x^3\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 \left(2 - 5x + 4x^2 - x^3\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \left[2x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 \\
&= \frac{1}{2} \left(4 - \frac{20}{2} + \frac{32}{3} - 4\right) \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Das SNR ergibt sich zu

$$\mathrm{SNR} = \frac{S}{N_{\mathrm{Q}}} = 2\,.$$

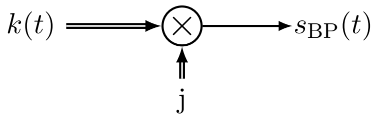
Aufgabe 2 (16 Punkte)

Das Spektrum eines zu übertragenden Signals $k(t)$ der Bandbreite B sei durch folgende Skizze gegeben, wobei $\mathrm{Re}\{K(f)\} = 0$. Dabei gilt $B \ll f_\mathrm{T}$.



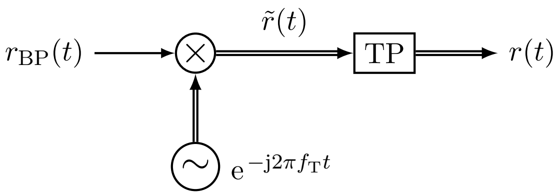
a) Ist $k(t)$ reellwertig? Begründen Sie! *(2 Punkte)*

Das oben beschriebene Signal soll nun durch folgende Schaltung modifiziert werden:



b) Berechnen Sie $S_\mathrm{BP}(f)$ sowie $s_\mathrm{BP}(t)$. *(5 Punkte)*

Das Signal $s_\mathrm{BP}(t)$ wird nun übertragen, wobei am Empfänger $r_\mathrm{BP}(t) = s_\mathrm{BP}(t)$ empfangen wird. Die Empfängerschaltung ist im Folgenden abgebildet, das Tiefpassfilter besitzt eine Grenzfrequenz $f_\mathrm{g} = f_\mathrm{T}$.



c) Berechnen Sie sowohl $\tilde{r}(t)$ als auch $r(t)$. *(5 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

Gegeben sei ein reeller weißer gaußscher Rauschprozess $X(t)$, welcher durch ein Tiefpassfilter mit Frequenzgang

$$G(f) = \sqrt{\frac{2}{1 + (2\pi f)^2}}$$

gefiltert und danach mit Abtastrate $f_\mathrm{s} = 1/T$ abgetastet wird.

d) Berechnen Sie die minimal mögliche Abtastperiode T, damit die Abtastwerte als unkorreliert angenommen werden können. Nehmen Sie hierzu an, dass Unkorreliertheit vorliegt, wenn die Autokorrelationsfunktion eines Prozesses weniger als 10% ihres Maximums beträgt. *(4 Punkte)*

Lösung

a) Das Spektrum eines reellwertiges Signales muss $K^*(f) = K(-f)$ erfüllen. Für den Imaginärteil muss somit $-\mathrm{Im}\{K(f)\} = \mathrm{Im}\{K(-f)\}$ (ungerade Symmetrie) gelten.
Da für den Imaginärteil des gegebenen Spektrums $\mathrm{Im}\{K(f)\} = \mathrm{Im}\{K(-f)\}$ gilt und er keine ungerade Symmetrie aufweist, ist $k(t)$ nicht reellwertig.

b) Das Spektrum des ursprünglichen Signals kann zu

$$K(f) = -\mathrm{j}\,\mathrm{rect}_B(f + f_\mathrm{T}) - \mathrm{j}\,\mathrm{rect}_B(f - f_\mathrm{T})$$

bestimmt werden und die Multiplikation mit j direkt im Frequenzbereich $S_\mathrm{BP}(f) = \mathrm{j}K(f)$ ausgeführt werden:

$$S_\mathrm{BP}(f) = \mathrm{rect}_B(f + f_\mathrm{T}) + \mathrm{rect}_B(f - f_\mathrm{T})$$

Somit ergibt sich $s_\mathrm{BP}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{S_\mathrm{BP}(f)\}$ zu:

$$\begin{aligned} s_\mathrm{BP}(t) &= B\,\mathrm{sinc}(Bt)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f_\mathrm{T}t} + B\,\mathrm{sinc}(Bt)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_\mathrm{T}t} \\ &= B\,\mathrm{sinc}(Bt)\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f_\mathrm{T}t} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_\mathrm{T}t}\right] \\ &= 2B\,\mathrm{sinc}(Bt)\cos(2\pi f_\mathrm{T}t) \end{aligned}$$

Anmerkung: Man sieht sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich, dass $s_\mathrm{BP}(t)$ ein reellwertiges Signal ist.

c) Das durch Mischung erzeugte Signal $\tilde{r}(t)$ berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} \tilde{r}(t) &= 2B\,\mathrm{sinc}(Bt)\cos(2\pi f_\mathrm{T}t)\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f_\mathrm{T}t} \\ &= 2B\,\mathrm{sinc}(Bt)\left[\cos(2\pi f_\mathrm{T}t)\cos(2\pi f_\mathrm{T}t) - \mathrm{j}\cos(2\pi f_\mathrm{T}t)\sin(2\pi f_\mathrm{T}t)\right] \\ &= 2B\,\mathrm{sinc}(Bt)\left[\frac{1}{2}\cos(0) + \frac{1}{2}\cos(2\pi 2f_\mathrm{T}t) - \left(\frac{\mathrm{j}}{2}\sin(0) + \frac{\mathrm{j}}{2}\sin(2\pi 2f_\mathrm{T}t)\right)\right] \\ &= 2B\,\mathrm{sinc}(Bt)\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi 2f_\mathrm{T}t) - \frac{\mathrm{j}}{2}\sin(2\pi 2f_\mathrm{T}t)\right] \\ &= B\,\mathrm{sinc}(Bt)\left[1 + \cos(2\pi 2f_\mathrm{T}t) - \mathrm{j}\sin(2\pi 2f_\mathrm{T}t)\right] \end{aligned}$$

Durch Tiefpassfilterung fallen die Terme der doppelten Trägerfrequenz weg. Somit ergibt sich $r(t)$ zu

$$r(t) = B\,\mathrm{sinc}(Bt)\ .$$

d) Mit $\Phi_{XX}(f) = C$, $C \in \mathbb{R}$, lässt sich das Leistungsdichtespektrum des Ausgangsprozesses zu

$$\Phi_{YY}(f) = |G(f)|^2\Phi_{XX}(f) = \frac{2}{1 + (2\pi f)^2}C$$

bestimmen. Unter Ausnutzung von (D.18) der Korrespondenztabelle mit $a = 1$ kann die AKF des Ausgangsprozesses zu

$$\varphi_{YY}(\tau) = C\mathrm{e}^{-|\tau|}$$

bestimmt werden. Damit Abtastwerte als unkorreliert angesehen werden können, muss laut Aufgabenstellung die AKF 10% ihres Maximums betragen. Da $\varphi_{YY}(\tau)$ gerade Symmetrie aufweist und für $t > 0$ streng monoton fallend ist, genügt die Betrachtung für $t > 0$ und die minimale Abtastzeit kann zu

$$\begin{aligned}
\frac{1}{10}\varphi_{YY}(\tau = 0) &= \varphi_{YY}(\tau = T) \\
\frac{C}{10} &= C\mathrm{e}^{-|T|} \\
-\ln 10 &= -T \\
T &= \ln 10 \\
&\approx 2{,}303\,\mathrm{s}
\end{aligned}$$

bestimmt werden.

Aufgabe 3 (11 Punkte)

Zur Datenübertragung verwenden Sie folgendes Pulsformungsfilter:

$$g(t) = \sqrt{a} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{T}} \qquad a, T \in \mathbb{R},\, a > 0,\, T > 0\,.$$

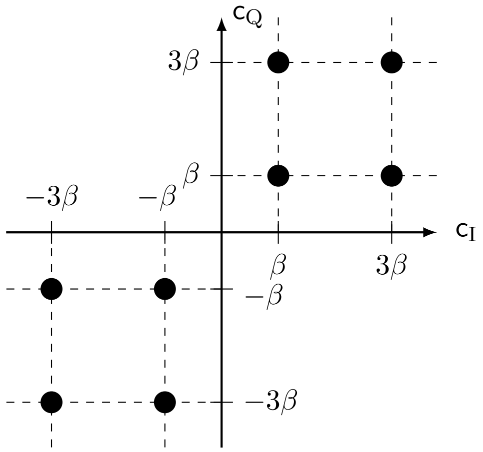
a) Geben Sie das zu $g(t)$ zugehörige *akausale* Matched-Filter an. *(1 Punkt)*

b) Bestimmen Sie $a > 0$ so, dass der Sendepuls normiert ist, d.h., $\int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|^2 \,\mathrm{d}\tau = 1$. *(3 Punkte)*

c) Erfüllt das Gesamtsystem bestehend aus Pulsformungsfilter und Matched-Filter die 1. Nyquist-Bedingung? Begründen Sie Ihre Antwort. *(3 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

Wir betrachten nun folgende Konstellation:



d) Berechnen Sie β so, dass die Energie pro Bit $E_\mathrm{b} = \frac{5}{6}$ ist. Nehmen Sie dabei an, dass alle Konstellationspunkte gleichwahrscheinlich sind, d.h. $P(A = \mathsf{c}_i) = \frac{1}{8}$. *(3 Punkte)*

e) Geben Sie eine Gray-Codierung für diese Konstellation an. *(1 Punkt)*

Lösung

a) Das akausale Matched-Filter $h(t)$ ergibt sich zu

$$h(t) = g^\star(-t) = \sqrt{a} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{T}} = g(t)\,.$$

b) Es gilt

$$1 \stackrel{!}{=} a \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{2\tau^2}{T}} \,\mathrm{d}\tau$$

Der Term $\mathrm{e}^{-\frac{2\tau^2}{T}}$ kann in die Form $b \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}$ gebracht werden, wobei $\sigma^2 = \frac{T}{4}$ und $b = \sqrt{2\pi\sigma^2} = \sqrt{\pi\frac{T}{2}}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} 1 &\stackrel{!}{=} a\sqrt{\pi\frac{T}{2}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{T}{4}}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\tau^2}{2\frac{T}{4}}} \,\mathrm{d}\tau}_{=1} \\ &= a\sqrt{\frac{\pi T}{2}}\,. \end{aligned}$$

Schlussendlich ist
$$a = \sqrt{\frac{2}{\pi T}}\,.$$

c) Die Gesamtimpulsantwort ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
h_0(t) &= (g * h)(t) = (g * g)(t) = a \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{T}} * \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{T}} \\
&= a \cdot \mathrm{e}^{-\pi\left(\frac{t}{\sqrt{\pi T}}\right)^2} * \mathrm{e}^{-\pi\left(\frac{t}{\sqrt{\pi T}}\right)^2} \\
&\quad\circ\!\!-\!\!\bullet \\
H_0(f) &= a\pi T \cdot \mathrm{e}^{-\pi\left(\sqrt{\pi T} f\right)^2} \mathrm{e}^{-\pi\left(\sqrt{\pi T} f\right)^2} \\
&= a\pi T \mathrm{e}^{-2\pi^2 T f^2} \\
&= a\sqrt{\frac{\pi T}{2}} \sqrt{2\pi T} \mathrm{e}^{-\pi\left(\sqrt{2\pi T} f\right)^2} \\
&\quad\bullet\!\!-\!\!\circ \\
h_0(t) &= a\sqrt{\frac{\pi T}{2}} \mathrm{e}^{-\pi\left(\frac{t}{\sqrt{2\pi T}}\right)^2} = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2T}}\,.
\end{aligned}$$

Die 1. Nyquist-Bedingung ist *nicht* erfüllt, da $h_0(t) \neq 0$.

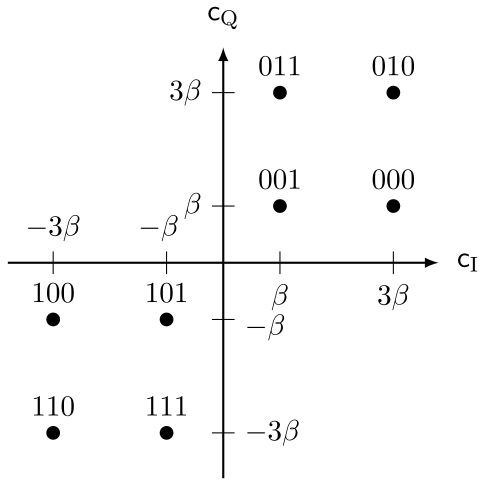
Alternativ: Da $h_0(t) = (g * h)(t) = (g * g)(t)$ gilt und $\forall t\, g(t) > 0$, folgt $\forall t\, h_0(t) > 0$. Die Faltung zweier positiver Funktionen $h_0(t) = (g * g)(t)$ kann nie $h_0(t) = 0$ werden.

d) Die Konstellation besitzt $M = 8$ Symbole, d.h., es gilt $m = \log_2 M = 3$ Bit/Symbol. Da $E_\mathrm{b} = \frac{5}{6}$, gilt $E_\mathrm{s} = m \cdot E_\mathrm{b} = \frac{5}{2}$. Nun ist

$$\begin{aligned}
E_\mathrm{s} &= \sum_{i=1}^{8} |\mathsf{c}_i|^2 P(A = \mathsf{c}_i) \\
&= \frac{1}{8}\Big(2 \cdot (\beta^2 + \beta^2) + 2 \cdot (9\beta^2 + 9\beta^2) + 4 \cdot (\beta^2 + 9\beta^2)\Big) \\
&= \frac{4 + 36 + 40}{8}\beta^2 \\
&= 10\beta^2 \\
&\overset{!}{=} \frac{5}{2}\,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\beta^2 = \frac{1}{4}$ und somit $\beta = \frac{1}{2}$.

e) Die Gray-Codierung ist nicht eindeutig. Eine mögliche Gray-Codierung ist folgende:


c_Q
c_I
011
010
001
000
100
101
110
111
3β
β
$-\beta$
-3β
-3β
$-\beta$
β
3β

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Wir betrachten eine Modulation mit zwei Symbolpunkten c_1 und c_2. Diese werden durch reellwertiges Rauschen mit der Verteilungsdichte

$$f_N(n) = \begin{cases} \frac{4+n}{2} & -4 \leq n < -3 \\ \frac{n+1}{4} & -1 \leq n < +1 \\ \frac{4-n}{2} & +3 \leq n < +4 \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$$

gestört und es gilt $z[k] = a[k] + n[k]$. Dabei beschreibt die Zufallsvariable A das Sendesymbol $a[k] \in \{\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2\}$. Zunächst sei $\mathsf{c}_1 = +\frac{1}{2}$ und $\mathsf{c}_2 = -1$.

a) Skizzieren Sie $f_Z(z|A = \mathsf{c}_1)$ und $f_Z(z|A = \mathsf{c}_2)$. Achten Sie auf eine vollständige Achsenbeschriftung. *(4 Punkte)*

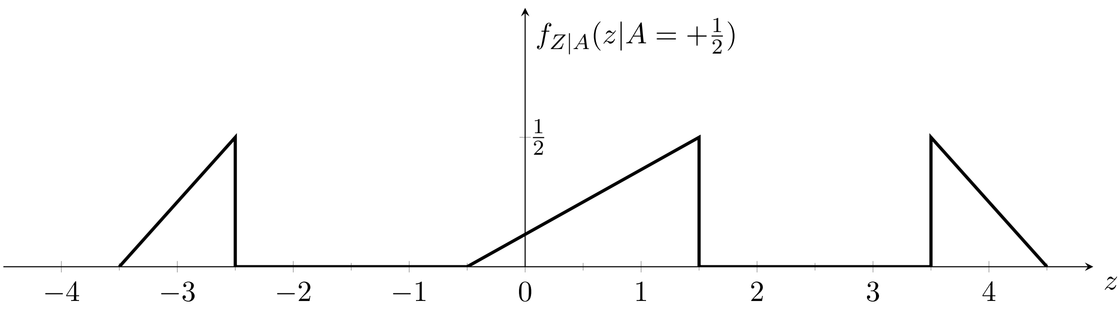
b) Leiten Sie die optimale Entscheidungsregel nach der ML-Regel her und geben Sie einen Ausdruck an, der in Abhängigkeit des Empfangssymbols $z[k]$ die optimale Symbolentscheidung liefert. *(4 Punkte)*

c) Bestimmen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit P_e des hergeleiteten ML-Entscheiders. Nehmen Sie dazu an, dass $P_A(A = \mathsf{c}_1) = P_A(A = \mathsf{c}_2) = \frac{1}{2}$. *(4 Punkte)*

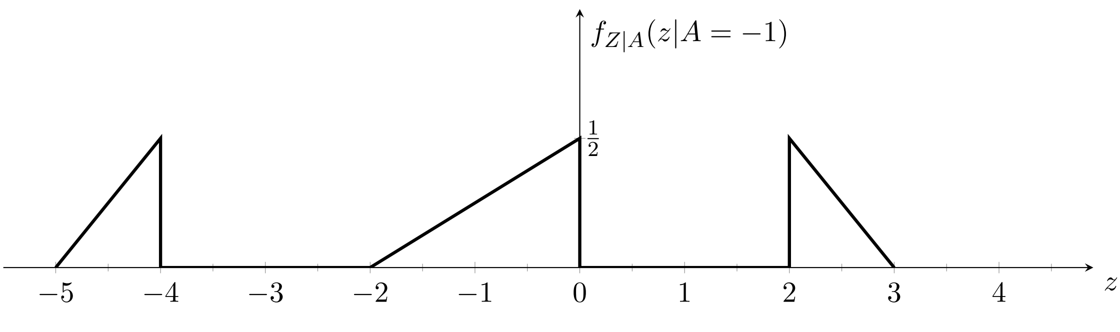
d) Wie müssen Sie c_1 verändern, so dass P_e minimal wird? Falls mehrere Möglichkeiten mit identischem, minimalen P_e existieren, wählen Sie diejenige, die auf eine minimale Symbolenergie E_s führt. Geben Sie für diesen Fall E_s an. *(3 Punkte)*

Lösung

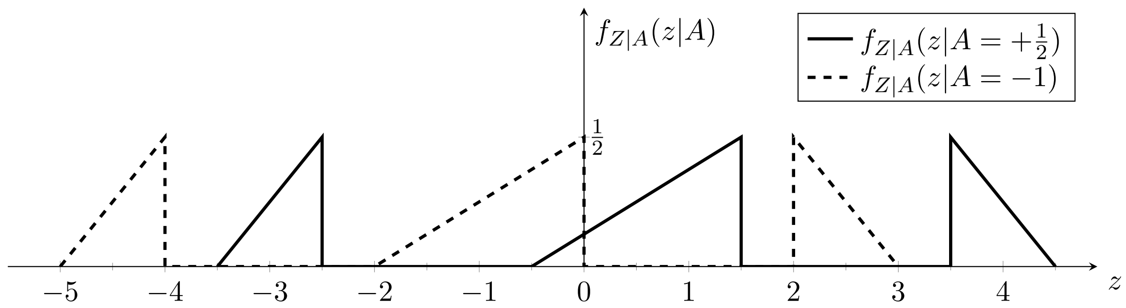
a) Wir erhalten mit $\mathsf{c}_1 = +\frac{1}{2}$



sowie mit $\mathsf{c}_2 = -1$



b) Wir zeichnen beide bedingten Verteilungsdichten in einem gemeinsamen Diagramm:



Laut binärem Hypothesentest gemäß ML-Regel ist

$$f_{Z|A}(z|A=\mathsf{c}_1) \underset{\hat{A}=\mathsf{c}_1}{\overset{\hat{A}=\mathsf{c}_2}{\lesseqgtr}} f_{Z|A}(z|A=\mathsf{c}_2)\,.$$

Aus der Abbildung lässt sich die Entscheidungsregel direkt ablesen

$$\hat{a}[k] = \begin{cases} \mathsf{c}_2 & -5 \le z[k] < -4 \\ \mathsf{c}_1 & -\frac{7}{2} \le z[k] < -\frac{5}{2} \\ \mathsf{c}_2 & -2 \le z[k] < 0 \\ \mathsf{c}_1 & 0 \le z[k] < \frac{3}{2} \\ \mathsf{c}_2 & 2 \le z[k] < 3 \\ \mathsf{c}_1 & \frac{7}{2} \le z[k] < \frac{9}{2} \end{cases}.$$

c) Zuerst bestimmen wir $P_\mathrm{e}(\mathsf{c}_1=+\frac{1}{2})$. Eine Fehlentscheidung tritt lediglich dann auf, wenn $-\frac{1}{2} \le z < 0$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} P_\mathrm{e}(\mathsf{c}_1) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f_{Z|A}\left(z\middle|A=+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}z \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{(z-\frac{1}{2})+1}{4}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{4}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(z+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{8}(z^2+z)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} \\ &= \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{32}\,. \end{aligned}$$

Wir sehen außerdem, dass $P_\mathrm{e}(\mathsf{c}_2=-1)=0$, da bei gesendetem $\mathsf{c}_2=-1$ nie eine Fehlentscheidung auftritt. Somit ist

$$P_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\left(P_\mathrm{e}(\mathsf{c}_1)+P_\mathrm{e}(\mathsf{c}_2)\right) = \frac{1}{64}\,.$$

d) Wir sehen, dass für $\mathsf{c}_1=+1$ die Fehlerrate $P_\mathrm{e}=0$ wird, da die Verteilungsdichten $f_{Z|A}(z|\mathsf{c}_1)$ und $f_{Z|A}(z|\mathsf{c}_2)$ sich nicht überlappen. Für $4 \le \mathsf{c}_1 < 5$ sowie for $\mathsf{c}_1 > 7$ ist die Fehlerrate ebenfalls 0, allerdings ist hier die Forderung nach minimalem E_s nicht mehr erfüllt. Wir erhalten

$$E_\mathrm{s} = \frac{1}{2}\cdot|-1|^2 + \frac{1}{2}\cdot|+1|^2 = 1\,.$$

Aufgabe 5 (16 Punkte)

Gegeben sind Codewörter eines linearen, systematischen $(5,3)$-Blockcodes

$$\mathcal{C} \supseteq \{10110, 01001, 01100\} \ .$$

a) Bestimmen Sie die fehlenden Codewörter. Begründen Sie ihr Vorgehen! *(3 Punkte)*

b) Geben Sie die systematische Generatormatrix $\boldsymbol{G}$ des Codes an. *(1 Punkt)*

c) Ordnen Sie den Codewörtern $\boldsymbol{x}$ tabellarisch die passenden Informationswörter $\boldsymbol{u}$ zu und berechnen Sie die Korrekturfähigkeit des Blockcodes. *(4 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

Gegeben sei die Generatormatrix $\boldsymbol{G}$ eines systematischen Hamming (n,k)-Blockcodes.

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Geben Sie die Rate des Blockcodes an. *(1 Punkt)*

e) Nach Übertragung über einen BSC mit Fehlerrate $\delta < \frac{1}{2}$ empfangen Sie die Folge

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie das Syndrom $\boldsymbol{s}$ und das am wahrscheinlichsten gesendete Codewort $\hat{\boldsymbol{x}}$. *(5 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

f) Welche Eigenschaft beschreiben die Parameter $(d_{\mathrm{v}}, d_{\mathrm{c}})$ eines LDPC-Codes und welches praktische Problem wird dadurch gelöst? *(2 Punkte)*

Lösung

a) Bei einem linearen Blockcode ergibt die Summe zweier gültiger Codewörter ein gültiges Codewort:

$$\begin{aligned} 10110 + 10110 &\rightarrow 00000 \\ 10110 + 01001 &\rightarrow 11111 \\ 01100 + 11111 &\rightarrow 10011 \\ 01001 + 01100 &\rightarrow 00101 \\ 10011 + 01001 &\rightarrow 11010 \end{aligned}$$

Mit den drei gegebenen Codewörtern $\{10110, 01001, 01100\}$ sind dies alle 2^3 Codewörter. Alternativ: Bilden einer (nicht-systematischen) Generatormatrix aus den gegebenen Codewörtern und erzeugen aller Codewörter durch Kodierung aller Informationswörter.

b) Aus den Codewörtern der vorherigen Teilaufgabe lässt sich die systematische Generatormatrix erzeugen:

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Da der Code systematisch ist ergeben sich die Codewörter aus den Datenwörtern mit angehängten Paritätswörtern. Somit können die Codewörter aus Teilaufgabe a) einfach den Datenwörtern zugeordnet werden.

$\boldsymbol{u}$	$\boldsymbol{x}$	$d_\mathrm{H}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x})$
000	00000	Nullwort
001	00101	2
010	01001	2
100	10011	3
011	01100	2
110	11010	3
101	10110	3
111	11111	5

d_min lässt sich aus dem minimalen Hammingewicht $d_\mathrm{H}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x})$ ermitteln:

$$d_\mathrm{min} = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{C} \setminus \{\boldsymbol{0}\}} d_\mathrm{H}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x})$$

Im vorliegenden Code gilt $d_\mathrm{min} = 2$. Für die Fehlerkorrekturfähigkeit folgt:

$$\begin{aligned} d_\mathrm{min} &\geq 2t + 1 \\ t &= \left\lfloor \frac{d_\mathrm{min} - 1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0 \end{aligned}$$

Somit ist die Hamming-Ungleichung nur für $t = 0$ erfüllt und ein $(5, 3)$-Blockcode kann maximal $t = 0$ Fehler korrigieren.

d) Für die Generatormatrix gilt $\boldsymbol{G} \in \mathbb{F}_2^{k \times n}$. Mit $k = 4$ Zeilen und $n = 7$ Spalten bestimmt sich die Coderate zu $r = \frac{k}{n} = \frac{4}{7}$.

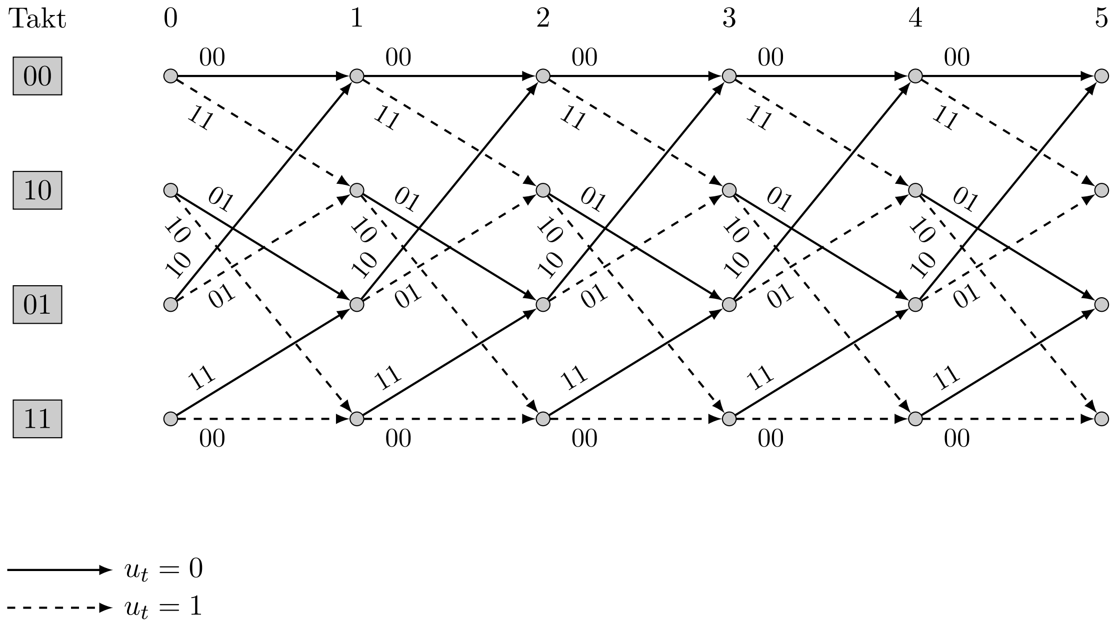
e) Um das am wahrscheinlichsten gesendete Codewort zu finden wird eine Syndromdecodierung durchgeführt. Hierzu wird aus dem Empfangsvektor $\boldsymbol{y} = (0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0)$ und der Paritycheckmatrix $\boldsymbol{H}$ das Syndrom $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{y}^\mathrm{T}$ berechnet. Zunächst muss noch die Paritycheckmatrix $\boldsymbol{H} = \left(\boldsymbol{P}^\mathrm{T}\ \boldsymbol{I}_{n-k}\right)$ aus der Generatormatrix $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{I}_k\ \boldsymbol{P})$ des systematischen Blockcodes gebildet werden. Dann kann das Syndrom wie folgt berechnet werden:

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{y}^\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis ist das Nullsyndrom, welches auf $\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{y}$ schließen lässt.

f) Die Parameter $(d_\mathrm{v}, d_\mathrm{c})$ eines LDPC-Codes beschreiben die Anzahl der Einsen in den Zeilen (d_c) und Spalten (d_v) der Paritycheckmatrix. Damit wird das praktische Problem der Speicherung von großen Paritycheckmatrizen bei langen Blockcodes gelöst. Es reicht, die $n \cdot d_\mathrm{v} = (n-k) \cdot d_\mathrm{c}$ Positionen der "1"-Einträge zu speichern und nicht die komplette Matrix der Größe $(n-k) \times n$.

Aufgabe 6 (13 Punkte)



Gegeben ist das Trellis-Diagramm eines binären Faltungscodes.

a) Geben Sie die Coderate r und Einflusslänge dieses Codes an. Begründen Sie. *(2 Punkte)*

b) Zeichnen Sie den Encoder als Blockschaltbild. Geben Sie alle notwendigen Zwischenschritte an. *(4 Punkte)*

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Viterbi-Algorithmus und Hard-Decision sowohl die am wahrscheinlichsten gesendete Datenbitfolge $\hat{\boldsymbol{u}}$ als auch die am wahrscheinlichsten gesendete Codebitfolge $\hat{\boldsymbol{x}}$, wenn die Empfangsfolge

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

lautet. Der Anfangszustand ist $(v_1, v_2) = (0, 0)$. Verwenden Sie dazu das bereitgestellte Blatt und geben Sie dieses mit Ihren Arbeitsblättern ab! *(5 Punkte)*

d) Würden Sie die Verwendung dieses Codes in praktischen Systemen empfehlen? Begründen Sie Ihre Antwort. *(2 Punkte)*

Lösung

a) Durch das Trellis-Diagramm erkennt man, dass pro Taktschritt $k = 1$ Datenbit in $n = 2$ Codebit verarbeitet werden. Die Coderate r ergibt sich zu

$$r = \frac{k}{n} = \frac{1}{2}\,.$$

Mit 4 Zuständen und $L = \log_2(4)$ ergibt sich die Einflusslänge zu

$$(L+1)k = (2+1) \cdot 1 = 3\,.$$

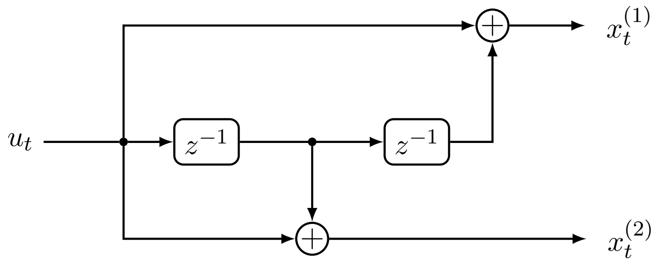
b) Durch Eingabe der Datenbitfolge $\boldsymbol{u} = (u_t \quad u_{t+1} \quad u_{t+2}) = (1 \quad 0 \quad 0)$ lässt sich aus dem Trellisdiagramm die Impulsantwort des Encoders zu

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= (x_t^{(1)} \quad x_t^{(2)} \quad x_{t+1}^{(1)} \quad x_{t+1}^{(2)} \quad x_{t+2}^{(1)} \quad x_{t+2}^{(2)}) \\ &= (1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0)\end{aligned}$$

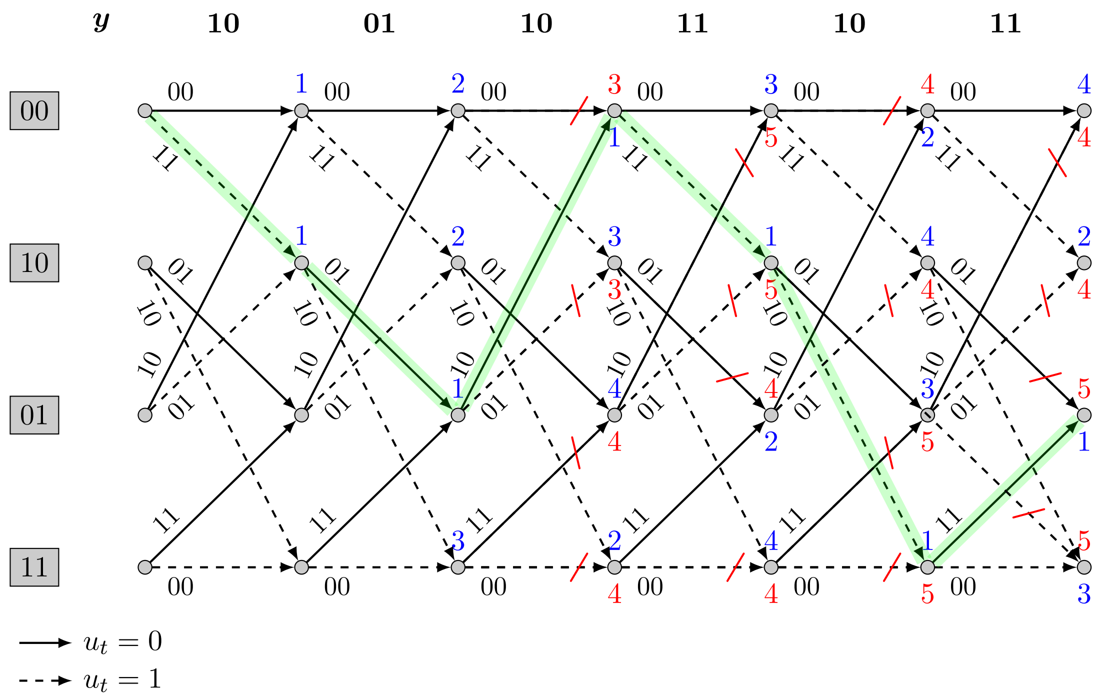
ablesen. Im ersten Zeittakt mit $u_t = 1$ sieht man, dass sowohl $x_t^{(1)}$ als auch $x_t^{(2)}$ abgegriffen werden. Im zweiten Zeittakt mit $u_{t+1} = 1$ wird nur $x_{t+1}^{(2)}$ und im dritten Zeittakt mit $u_{t+2} = 1$ wird nur $x_{t+2}^{(1)}$ abgegriffen. Somit lassen sich die Ausgänge durch

$$x_t^{(1)} = u_t + u_{t+2}$$
$$x_t^{(2)} = u_t + u_{t+1}$$

beschreiben. Die Generatorpolynome sind somit $g_1(x) = 1 + x^2$ und $g_2(x) = 1 + x$ und der Encoder ergibt sich zu:



c) Der Viterbi-Algorithmus mit Hard-Decision ergibt:



Wie im Trellis-Diagramm dargestellt ist die mit der höchsten Wahrscheinlichkeit übertragene Codebitfolge

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und die entsprechende Datenbitfolge

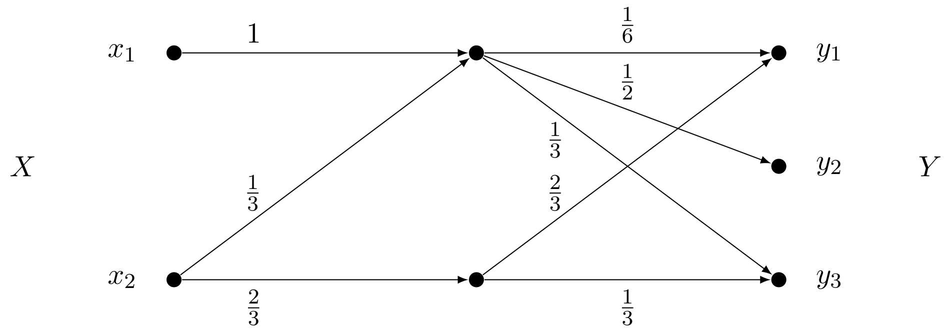
$$\hat{\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

d) Die Betrachtung der Generatorpolynome liefert:

$$g_1(x) = x^2 + 1 = (x + 1)^2$$
$$g_2(x) = x + 1$$

Somit haben beide Generatorpolynome einen gemeinsamen Teiler $(x + 1)$. Daher besitzt dieser Code die Eigenschaft der katastrophalen Fehlerfortpflanzung und ist für praktische Systeme nicht geeignet.

Aufgabe 7 (17 Punkte)



Gegeben ist obiges Modell eines diskreten, gedächtnislosen Kanals. Die Zufallsvariablen X und Y beschreiben das Sende- und Empfangssymbol, wobei $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$ die Menge der Sendesymbole und $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, y_3\}$ die Menge der Empfangssymbole ist. An den Kanten sind die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den verschiedenen Knoten notiert.

a) Geben Sie die Kanalübergangsmatrix des dargestellten Kanals an. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie $H(Y), H(Y|X)$ und $I(X;Y)$, wenn der Absender das Symbol x_1 mit der Wahrscheinlichkeit $P(X = x_1) = \frac{1}{3}$ sendet. Ihr Rechenweg muss klar ersichtlich sein. *(7 Punkte)*

c) Berechnen Sie die Kapazität des Kanals und geben Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_1)$ sowie $P(X = x_2)$ an. *(3 Punkte)*

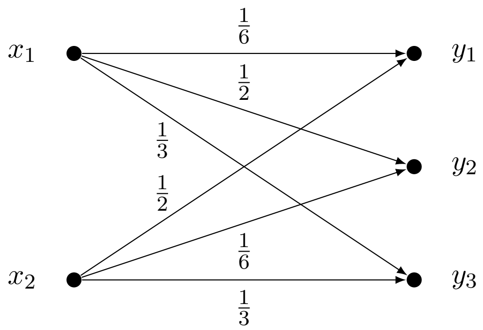
d) Können, bei 1000 Kanalnutzungen, 150 Bit Information mit beliebig kleiner Fehlerrate übertragen werden? Begründen Sie. *(1 Punkt)*

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

e) Skizzieren Sie für einen diskreten gedächtnislosen Kanal mit der Menge der Sendesymbole $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$ und der Menge der Empfangssymbole $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, y_3\}$ ein Kanalmodell mit maximaler und ein Kanalmodell mit minimaler Kapazität. Geben Sie jeweils die Kapazität des Kanals an. *(4 Punkte)*

Lösung

a) Anwenden der Pfadregel aus der Wahrscheinlichkeitstheorie liefert folgendes vereinfachtes Kanalmodell:



Die Kanalübergangsmatrix lautet:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} P(Y = y_1|X = x_1) & P(Y = y_1|X = x_2) \\ P(Y = y_2|X = x_1) & P(Y = y_2|X = x_2) \\ P(Y = y_3|X = x_1) & P(Y = y_3|X = x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b) Aus der Information, dass $P(X = x_1) = \frac{1}{3}$, folgt $P(X = x_2) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Um die Entropie am Empfänger $H(Y)$ zu berechnen, müssen alle $P(y_m)$ bestimmt werden. Durch Marginalisierung über alle Sendesymbole ergibt sich:

$$P(Y = y_1) = \sum_{n=1}^{2} P(Y = y_1|X = x_i)P(X = x_n) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{18}$$
$$P(Y = y_2) = \sum_{n=1}^{2} P(Y = y_2|X = x_i)P(X = x_n) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$$
$$P(Y = y_3) = \sum_{n=1}^{2} P(Y = y_3|X = x_i)P(X = x_n) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} H(Y) &= -\sum_{m=1}^{3} P\left(Y = y_m\right) \log_2 P\left(Y = y_m\right) \\ &= -\frac{7}{18} \cdot \log_2\left(\frac{7}{18}\right) - \frac{5}{18} \cdot \log_2\left(\frac{5}{18}\right) - \frac{1}{3} \cdot \log_2\left(\frac{1}{3}\right) \\ &\approx 1{,}5715 \text{ bit/Kanalzugriff} \end{aligned}$$

Berechnung der Irrelevanz $H(Y|X)$ unter Verwendung des Satz von Bayes:

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= -\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{3} P(X = x_n, Y = y_m) \log_2 P(Y = y_m|X = x_n) \\ &= -\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{3} P(Y = y_m|X = x_n)P(X = x_n) \log_2 P(Y = y_m|X = x_n) \\ &= -P(Y = y_1|X = x_1)P(X = x_1) \log 2(P(Y = y_1|X = x_1)) \\ &\quad - P(Y = y_2|X = x_1)P(X = x_1) \log 2(P(Y = y_2|X = x_1)) \\ &\quad - P(Y = y_3|X = x_1)P(X = x_1) \log 2(P(Y = y_3|X = x_1)) \\ &\quad - P(Y = y_1|X = x_2)P(X = x_2) \log 2(P(Y = y_1|X = x_2)) \\ &\quad - P(Y = y_2|X = x_2)P(X = x_2) \log 2(P(Y = y_2|X = x_2)) \\ &\quad - P(Y = y_3|X = x_2)P(X = x_2) \log 2(P(Y = y_3|X = x_2)) \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\log_2\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\log_2\left(\frac{1}{3}\right)\right) \\ &\quad - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}\log_2\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{2}{3}\log_2\left(\frac{1}{3}\right)\right) \\ &= -\left(\frac{1}{6}\log_2\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\log_2\left(\frac{1}{3}\right)\right) \\ &\approx 1{,}4591 \text{ bit/Kanalzugriff} \end{aligned}$$

Alternativ können auch die Verbundwahrscheinlichkeiten $P(X = x_n, Y = Y_m)$ berechnet und direkt in $H(Y|X)$ eingesetzt werden. Die Transinformation lässt sich nun einfach bestimmen:

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= (1{,}5715 - 1{,}4591) \text{ bit/Kanalzugriff} \\ &\approx 0{,}1124 \text{ bit/Kanalzugriff} \end{aligned}$$

c) Da jede Spalte von $\boldsymbol{P}$ eine Permutation einer anderen Spalte und alle Zeilensummen identisch sind, handelt es sich um einen schwach symmetrischen Kanal. Die Transinformation für diesen wird maximal für gleichverteilte Sendesymbole. Somit ist $P(X = x_1) = \frac{1}{2}$ und $P(X = x_2) = \frac{1}{2}$. Mit $n = 1$ (erste Spalte von $\boldsymbol{P}$) berechnet sich die Kapazität zu

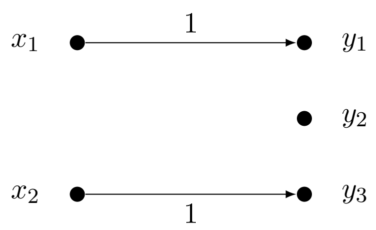
$$
\begin{aligned}
C &= \max_{P(x_n)} I(X;Y) \\
&= \log_2(M) + \sum_{m=1}^{M} P(Y = y_m|X = x_1) \log_2 P(Y = y_m|X = x_1) \\
&= \log_2(3) - \left(\frac{1}{6} \log_2 \left(\frac{1}{6} \right) + \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \log_2 \left(\frac{1}{3} \right) \right) \\
&\approx 0{,}1258 \text{ bit/Kanalzugriff} .
\end{aligned}
$$

d) Da

$$0{,}1258 \text{ bit/Kanalzugriff} \cdot 1000 \text{ Kanalzugriffe} = 125{,}8 \text{ bit} < 150 \text{ bit},$$

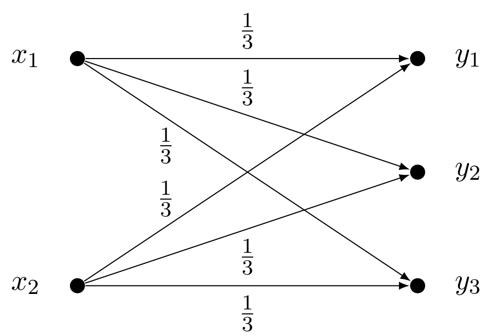
ist es nicht möglich mit 1000 Kanalzugriffen 150 Bit mit beliebig kleiner Fehlerrate zu übertragen.

e) Maximale Kapazität mit $C = 1$ bit/Kanalnutzung:

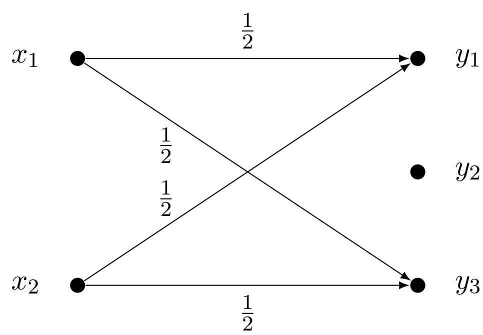


Andere Lösungen können ebenfalls korrekt sein, solange die Eingangssymbole eineindeutig auf unterschiedliche Ausgangssymbol weisen.

Minimale Kapazität mit $C = 0$ bit/Kanalnutzung:



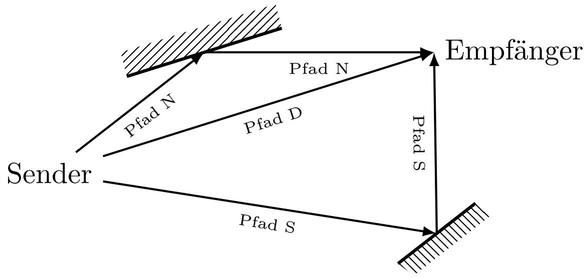
oder



Andere Lösungen können ebenfalls korrekt sein, solange die Kapazität null ist. Für jedes Empfangssymbol $y_m \in \mathcal{Y}$ muss $P(X = x_1|Y = y_m) = P(X = x_2|Y = y_m)$ gelten, d.h. die Empfangssymbole können keinem Sendesymbol zugeordnet werden.

Aufgabe 8 (13 Punkte)

In einem Mobilfunksystem werden Daten über den in der folgenden Abbildung gezeigten Mehrwegekanal übertragen.



Der Frequenzgang im äquivalenten Basisband ist gegeben durch:

$$H(f) = 0{,}7 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}6\pi f T} + 0{,}15 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}8\pi f T + \mathrm{j}\frac{\pi}{8}} + 0{,}1 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}12\pi f T - \mathrm{j}\pi}$$

a) Berechnen Sie die Impulsantwort $h(t)$ des Mehrwegekanals. *(2 Punkte)*

b) Ist dieser Kanal bandbegrenzt? Begründen Sie. *(1 Punkt)*

c) Zeichnen Sie das zum Kanal äquivalente FIR-Filter, wenn der Kanal mit einer Abtastrate von $f_\mathrm{a} = \frac{1}{T}$ abgetastet wird. Beschriften Sie Ihre Zeichnung. *(3 Punkte)*

d) Welche Dämpfung erfährt das Signal auf Pfad D in dB?
Hinweis: Pfad D ist die direkte Sichtverbindung (line of sight) des Mobilfunkkanals *(2 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

Sie möchten nun den Einfluss eines unbekannten diskreten Kanals schätzen und wählen als Sendesignal ein bekanntes BPSK-Signal $c[k]$. Vor und nach dem BPSK-Signal senden Sie „0“en. Am Empfänger erhalten Sie das Signal $r[k]$, wobei beide Signale durch

$$c[k] = \begin{pmatrix} +1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$
$$r[k] = \begin{pmatrix} 0{,}4 & -0{,}5 & 0{,}8 & -0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Sie wissen weiterhin, dass der äquivalente diskrete Kanal eine Impulsantwort der Länge vier besitzt und nehmen an, dass er rauschfrei ist.

e) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h[k]$ des äquivalenten diskreten Kanals. *(5 Punkte)*

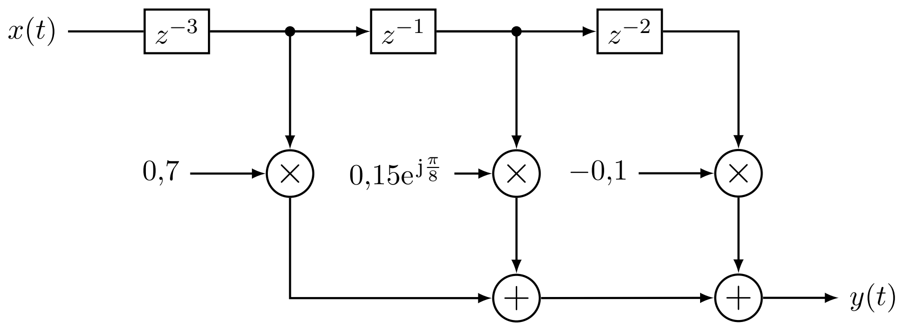
Lösung

a) Die Impulsantwort wird über den Verschiebungssatz der Fouriertransformation berechnet:

$$h(t) = \mathcal{F}\{H(f)\} = 0{,}7 \cdot \delta(t-3T) + 0{,}15\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{8}} \cdot \delta(t-4T) - 0{,}1 \cdot \delta(t-6T)$$

b) Der Frequenzgang des Kanals lässt erkennen, dass drei komplexe Schwingungen mit unterschiedlichen Argumenten $6\pi f T$, $8\pi f T$ und $12\pi f T$ um 0 oszillieren. Aufgrund der Periodizität der einzelnen Schwingungen ist ihre Überlagerung auch periodisch und zwar mit $\Delta f = \frac{1}{3T}$. Daher ist der Kanal nicht bandbegrenzt.

c) Das zum Kanal äquivalente FIR-Filter ist wie folgt gegeben:



d) Da Pfad D der Sichtpfad ist, erwarten wir für diesen Pfad die kürzeste Verzögerung. Pfad D wird in der Impulsantwort durch den Term

$$0{,}7 \cdot \delta(t - 3T)$$

beschrieben.
Die Dämpfung auf diesem Pfad beträgt:

$$\alpha_{\mathrm{D}} = -20 \cdot \log_{10}(0{,}7) = 3{,}098\,\mathrm{dB}$$

e) Die Impulsantwort des äquivalenten diskreten Kanals kann wie folgt angegeben werden:

$$h[k] = \begin{pmatrix} h[0] & h[1] & h[2] & h[3] \end{pmatrix}$$

Zur Lösung wird ein lineares Gleichungssystem aufgestellt:

$$\begin{aligned}
r[0] &= c[0]h[0] \overset{!}{=} 0{,}4 \\
r[1] &= c[1]h[0] + c[0]h[1] \overset{!}{=} -0{,}5 \\
r[2] &= c[2]h[0] + c[1]h[1] + c[0]h[2] \overset{!}{=} 0{,}8 \\
r[3] &= c[2]h[1] + c[1]h[2] + c[0]h[3] \overset{!}{=} -0{,}3 \\
r[4] &= c[2]h[2] + c[1]h[3] \overset{!}{=} 0{,}2 \\
r[5] &= c[2]h[3] \overset{!}{=} 0{,}1
\end{aligned}$$

Einsetzen und Auflösen des Gleichungssystems führt zu den Lösungen. $r[0]$ und $r[5]$ geben direkt Lösungen für $h[0]$ und $h[3]$:

$$\begin{aligned}
h[0] &= \frac{r[0]}{c[0]} = \frac{0{,}4}{1} = 0{,}4 \\
h[3] &= \frac{r[5]}{c[2]} = \frac{0{,}1}{1} = 0{,}1
\end{aligned}$$

Durch das Einsetzen dieser Werte in $r[1]$ und $r[4]$ können die restlichen Werte berechnet werden:

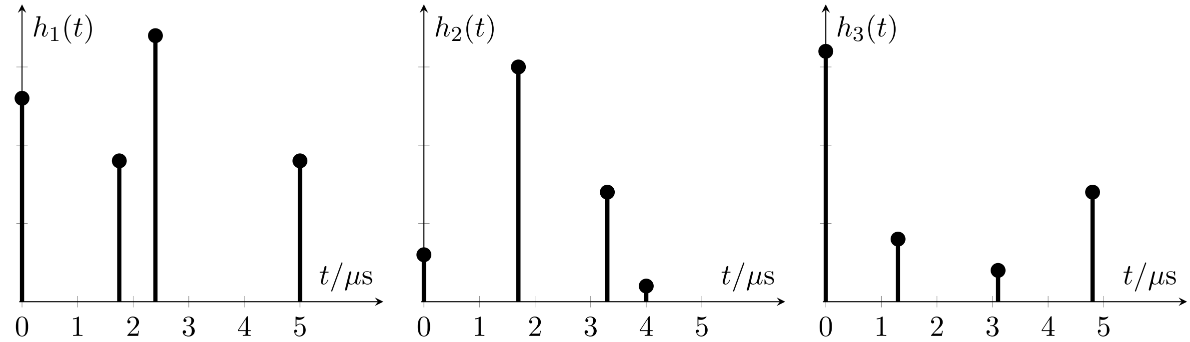
$$\begin{aligned}
h[1] &= \frac{r[1] - c[1]h[0]}{c[0]} = \frac{-0{,}5 - (-1) \cdot 0{,}4}{1} = -0{,}1 \\
h[2] &= \frac{r[4] - c[1]h[3]}{c[2]} = \frac{0{,}2 - (-1) \cdot 0{,}1}{1} = 0{,}3
\end{aligned}$$

Die Impulsantwort $h[k]$ lautet

$$h[k] = \begin{pmatrix} 0{,}4 & -0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Sie entwerfen ein OFDM-System, welches eine Datenrate von $R = 1\,\frac{\text{MBit}}{s}$ erreichen soll und QPSK als digitales Modulationsverfahren nutzt. Der Unterträgerabstand soll $\Delta f = 30\,\text{kHz}$ betragen und das OFDM-System alle N Unterträger zur Übertragung nutzen. Des Weiteren kennen Sie aus Kanalmessungen die Impulsantworten $h_1(t)$, $h_2(t)$ und $h_3(t)$ möglicher Übertragungskanäle, auf die das System ausgelegt werden soll.



a) Beschreiben und skizzieren Sie die bei OFDM ausgenutzte Orthogonalität. *(2 Punkte)*

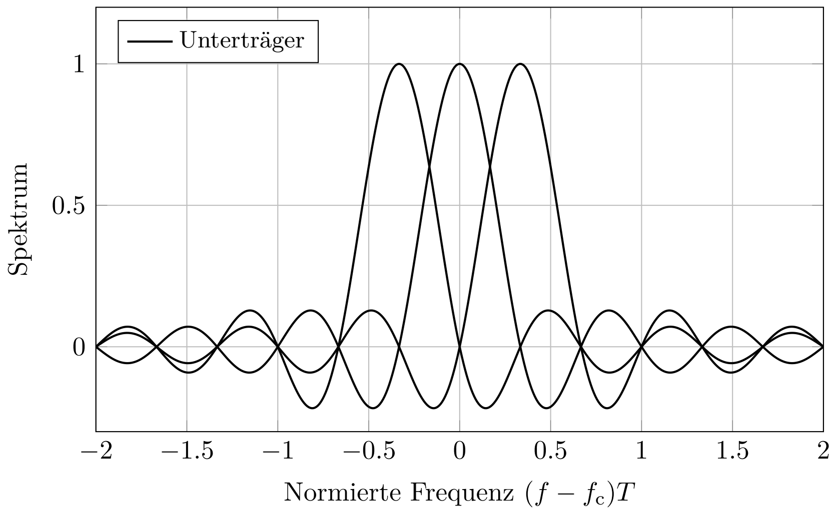
b) Wie groß muss die Dauer des zyklischen Präfix T_P unter Beachtung der gegebenen Kanäle mindestens sein? Warum? *(2 Punkte)*

c) Berechnen Sie die minimale Anzahl N der benötigten Unterträger unter Beachtung der gegebenen Kanäle und einer minimalen Dauer des zyklischen Präfix. *(4 Punkte)*

d) Wie müssten Sie ihr gefundenes N ändern, um eine effizientere digitale Implementierung des Systems zu ermöglichen? Warum? *(2 Punkte)*

Lösung

a) Bei OFDM sind die **Unterträger orthogonal zueinander**. Dies bedeutet, dass im Maximum eines Unterträgers alle anderen Unterträger den Wert Null besitzen. Untenstehende Skizze verdeutlicht dies.



b) Aus den Kanalimpulsantworten lässt sich die maximale Dauer des Übersprechens von Folgesymbolen zu $T_\text{H} = 5\,\mu$s bestimmen (maximaler Delay Spread der Kanäle). Da das zyklische Präfix mindestens T_H dauern muss, folgt für die Dauer des zyklischen Präfix $T_\text{P} \geq 5\,\mu$s.

c) Aus der Datenrate $R = 1\,\frac{\text{MBit}}{s}$ und dem Wissen, dass QPSK als digitales Modulationsverfahren mit $|\mathcal{M}| = 4$ Symbole benutzt wird, kann die notwendige QPSK-Symbolrate zu

$$R_{\text{sym}} = \frac{R}{\log_2(|\mathcal{M}|)} = \frac{1\,\frac{\text{MBit}}{s}}{\log_2(4)\,\frac{\text{Bit}}{\text{Symbol}}} = 500\,\text{kBd}$$

bestimmt werden. Da pro OFDM-Symbol alle N Unterträger belegt werden sollen und sich die Dauer eines OFDM-Symbols zu $T_\text{M} + T_\text{H}$ mit $T_\text{M} = \frac{1}{\Delta f}$ berechnet, kann die mit N Unterträgern erreichbare QPSK-Symbolrate durch

$$R_{\text{sym}}(N) = N\frac{1}{T_\text{M} + T_\text{H}} = \frac{N}{\frac{1}{\Delta f} + T_\text{H}}$$

beschrieben werden. Aufstellen als Ungleichung, umformen und einsetzen liefert:

$$\begin{aligned}
R_{\text{sym}} &\leq R_{\text{sym}}(N) \\
R_{\text{sym}} &\leq \frac{N}{\frac{1}{\Delta f} + T_\text{H}} \\
R_{\text{sym}}\left(\frac{1}{\Delta f} + T_\text{H}\right) &\leq N \\
\Leftrightarrow \qquad N_{\min} &= \left\lceil R_{\text{sym}}\left(\frac{1}{\Delta f} + T_\text{H}\right)\right\rceil \\
&= \left\lceil 500 \times 10^3\,\frac{\text{Symbole}}{\text{s}}\left(\frac{1}{30\,\text{kHz}} + 5\,\mu\text{s}\right)\right\rceil = \lceil 19{,}167 \rceil = 20
\end{aligned}$$

Somit müssen mindestens 20 QPSK-Symbole pro OFDM-Symbol bzw. 20 Unterträger genutzt werden, um mit den gegebenen Parametern die geforderte Datenrate zu erreichen.

d) Um eine effizientere digitale Implementierung und Realisierung ist über die schnelle Fourier-Transformation (FFT) möglich. Diese wiederum ist besonders schnell, wenn die Anzahl an Stützstellen eine Zweierpotenz ist. Somit müsste für eine effiziente Implementierung die Anzahl der Unterträger auf die nächste Zweierpotenz, hier $N = 2^5 = 32$, aufgerundet werden.

Aufgabe 10 (11 Punkte)

Bei einem MIMO-Übertragungssystem haben Kanalmessungen die Kanalmatrix $\boldsymbol{H}$ ergeben.

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2\mathrm{j} \\ 2 & 1\mathrm{j} \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie die Anzahl der Sendeantennen N_T und Empfangsantennen N_R an. *(1 Punkt)*

b) In Ihrem Übertragungssystem liegt die Information über die Kanalmatrix bisher nur am Empfänger vor (CSI-R). Sie empfangen nun

$$\boldsymbol{r}^\mathrm{T} = \begin{pmatrix} -0{,}45 - 0{,}9\mathrm{j} & -0{,}9 + 0{,}45\mathrm{j} \end{pmatrix} .$$

Führen Sie eine Zero-Forcing Detektion durch und schätzen Sie den Sendevektor $\hat{\boldsymbol{s}}$. *(3 Punkte)*

c) Ihr System wird erweitert um die Übertragung der Kanalinformation vom Empfänger zum Sender (CSI-T). Sie haben von einer Vorprozessierung mittels Singulärwertzerlegung gehört und möchten diese nun verwenden. Durch die Sinuglärwertzerlegung $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^\mathrm{H}$ erhalten Sie die Diagonalmatrix $\boldsymbol{\Lambda}$, welche die Singulärwerte $\sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\lambda_2} = 1$ besitzt. Am Empfänger multiplizieren Sie den Empfangsvektor mit $\boldsymbol{U}^\mathrm{H} = \boldsymbol{I}_2$. Bestimmen Sie die Matrix $\boldsymbol{V}$, mit der das Sendesignal multipliziert werden muss. *(4 Punkte)*

d) Bestimmen Sie die Kanalkapazität bei fester Kanalmatrix $\boldsymbol{H}$ und AWGN mit einem SNR von 8 dB. *(3 Punkte)*

Lösung

a) Basierend auf der gegebenen MIMO-Kanalmatrix $\boldsymbol{H} \in \mathbb{C}^{N_\mathrm{R} \times N_\mathrm{T}}$ lässt sich $N_\mathrm{T} = 2$ und $N_\mathrm{R} = 2$ bestimmen.

b) Um Zero-Forcing am Empfänger zu verwenden muss die Matrix $\boldsymbol{L}_\mathrm{ZF} = \left(\boldsymbol{H}^\mathrm{H}\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^\mathrm{H}$ bestimmt werden, wobei $\boldsymbol{H}^\mathrm{H}$ die Adjungierte von $\boldsymbol{H}$ ist:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_\mathrm{ZF} &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2\mathrm{j} & -1\mathrm{j} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2\mathrm{j} \\ 2 & 1\mathrm{j} \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2\mathrm{j} & -1\mathrm{j} \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2\mathrm{j} & -1\mathrm{j} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2\mathrm{j} & -1\mathrm{j} \end{pmatrix} = \boldsymbol{H}^\mathrm{H}
\end{aligned}$$

Anmerkung: Da $\boldsymbol{H}$ nichtsingulär ist, kann auch alternativ direkt $\boldsymbol{L}_\mathrm{ZF} = \boldsymbol{H}^{-1}$ berechnet werden. Durch $\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^H = \boldsymbol{I}$ sieht man, dass $\boldsymbol{H}$ unitär ist und somit $\boldsymbol{H}^H = \boldsymbol{H}^{-1}$ gilt.

Der Sendevektor lässt sich durch $\hat{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{L}_\mathrm{ZF}\boldsymbol{r}$ schätzen:

$$\hat{\boldsymbol{s}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2\mathrm{j} & -1\mathrm{j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}45 - 0{,}9\mathrm{j} \\ -0{,}9 + 0{,}45\mathrm{j} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1{,}01 \\ 1{,}01 \end{pmatrix}$$

c) Ziel der Singulärwertzerlegung ist, das Sende- bzw. Empfangssignal mit einer unitären Matrix $\boldsymbol{V}$ bzw. $\boldsymbol{U}^\mathrm{H}$ zu multiplizieren, sodass für das verarbeitete empfangene Signal

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{U}^\mathrm{H}\boldsymbol{H}\boldsymbol{V}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{U}^\mathrm{H}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^\mathrm{H}\boldsymbol{V}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{I}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{s}$$

gilt, wobei $\boldsymbol{s}$ das Sendesignal und $\boldsymbol{\Lambda}$ eine Diagonalmatrix darstellt.
Da $N_\mathrm{T} = N_\mathrm{R} = 2$ und $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{C}^{N_\mathrm{R} \times N_\mathrm{T}}$, muss $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ sein. Aus der Aussage, dass $\boldsymbol{\Lambda}$ nur die Singulärwerte $\sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\lambda_2} = 1$ besitzt, lässt sich $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{I}_2$ bestimmen. Aus gegebenem $\boldsymbol{U}^\mathrm{H} = \boldsymbol{I}_2$ bestimmt sich $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}_2$. Somit vereinfacht sich die Singulärwertzerlegung zu

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^\mathrm{H} = \boldsymbol{I}_2\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{V}^\mathrm{H} = \boldsymbol{V}^\mathrm{H}$$

und $\boldsymbol{V}^\mathrm{H} = \boldsymbol{H}$. Hieraus lässt sich

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{H}^{-1} = \boldsymbol{H}^\mathrm{H} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2\mathrm{j} & -1\mathrm{j} \end{pmatrix}$$

bestimmen.

d) Die Kanalkapazität kann wie folgt berechnet werden:

$$C_0 = \log_2\left(\det\left(\boldsymbol{I}_{N_\mathrm{R}} + \frac{\mathrm{SNR}}{N_\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^H\right)\right)$$

Berechnung $\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^H$ ergibt:

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit vereinfacht sich die Berechnung der Kapazität zu:

$$\begin{aligned} C_0 &= \log_2\left(\det\left(\boldsymbol{I}_{N_\mathrm{R}} + \frac{\mathrm{SNR}}{N_\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{N_T}\right)\right) \\ &= \log_2(\det(\boldsymbol{I}_2 + 3{,}16 \cdot \boldsymbol{I}_2)) \\ &= \log_2(\det(4{,}16 \cdot \boldsymbol{I}_2)) \\ &= \log_2(17{,}31) \\ &\approx 4{,}11 \text{ bit/Kanalnutzung} \end{aligned}$$

Formelsammlung und Tabellen

A Tabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	0,80	0,788145	1,60	0,945201	2,40	0,991802	3,20	0,999313
0,02	0,507978	0,82	0,793892	1,62	0,947384	2,42	0,992240	3,22	0,999359
0,04	0,515953	0,84	0,799546	1,64	0,949497	2,44	0,992656	3,24	0,999402
0,06	0,523922	0,86	0,805105	1,66	0,951543	2,46	0,993053	3,26	0,999443
0,08	0,531881	0,88	0,810570	1,68	0,953521	2,48	0,993431	3,28	0,999481
0,10	0,539828	0,90	0,815940	1,70	0,955435	2,50	0,993790	3,30	0,999517
0,12	0,547758	0,92	0,821214	1,72	0,957284	2,52	0,994132	3,32	0,999550
0,14	0,555670	0,94	0,826391	1,74	0,959070	2,54	0,994457	3,34	0,999581
0,16	0,563559	0,96	0,831472	1,76	0,960796	2,56	0,994766	3,36	0,999610
0,18	0,571424	0,98	0,836457	1,78	0,962462	2,58	0,995060	3,38	0,999638
0,20	0,579260	1,00	0,841345	1,80	0,964070	2,60	0,995339	3,40	0,999663
0,22	0,587064	1,02	0,846136	1,82	0,965621	2,62	0,995604	3,42	0,999687
0,24	0,594835	1,04	0,850830	1,84	0,967116	2,64	0,995855	3,44	0,999709
0,26	0,602568	1,06	0,855428	1,86	0,968557	2,66	0,996093	3,46	0,999730
0,28	0,610261	1,08	0,859929	1,88	0,969946	2,68	0,996319	3,48	0,999749
0,30	0,617911	1,10	0,864334	1,90	0,971283	2,70	0,996533	3,50	0,999767
0,32	0,625516	1,12	0,868643	1,92	0,972571	2,72	0,996736	3,52	0,999784
0,34	0,633072	1,14	0,872857	1,94	0,973810	2,74	0,996928	3,54	0,999800
0,36	0,640576	1,16	0,876976	1,96	0,975002	2,76	0,997110	3,56	0,999815
0,38	0,648027	1,18	0,881000	1,98	0,976148	2,78	0,997282	3,58	0,999828
0,40	0,655422	1,20	0,884930	2,00	0,977250	2,80	0,997445	3,60	0,999841
0,42	0,662757	1,22	0,888768	2,02	0,978308	2,82	0,997599	3,62	0,999853
0,44	0,670031	1,24	0,892512	2,04	0,979325	2,84	0,997744	3,64	0,999864
0,46	0,677242	1,26	0,896165	2,06	0,980301	2,86	0,997882	3,66	0,999874
0,48	0,684386	1,28	0,899727	2,08	0,981237	2,88	0,998012	3,68	0,999883
0,50	0,691463	1,30	0,903200	2,10	0,982136	2,90	0,998134	3,70	0,999892
0,52	0,698468	1,32	0,906582	2,12	0,982997	2,92	0,998250	3,72	0,999900
0,54	0,705401	1,34	0,909877	2,14	0,983823	2,94	0,998359	3,74	0,999908
0,56	0,712260	1,36	0,913085	2,16	0,984614	2,96	0,998462	3,76	0,999915
0,58	0,719043	1,38	0,916207	2,18	0,985371	2,98	0,998559	3,78	0,999922
0,60	0,725747	1,40	0,919243	2,20	0,986097	3,00	0,998650	3,80	0,999928
0,62	0,732371	1,42	0,922196	2,22	0,986791	3,02	0,998736	3,82	0,999933
0,64	0,738914	1,44	0,925066	2,24	0,987455	3,04	0,998817	3,84	0,999938
0,66	0,745373	1,46	0,927855	2,26	0,988089	3,06	0,998893	3,86	0,999943
0,68	0,751748	1,48	0,930563	2,28	0,988696	3,08	0,998965	3,88	0,999948
0,70	0,758036	1,50	0,933193	2,30	0,989276	3,10	0,999032	3,90	0,999952
0,72	0,764238	1,52	0,935745	2,32	0,989830	3,12	0,999096	3,92	0,999956
0,74	0,770350	1,54	0,938220	2,34	0,990358	3,14	0,999155	3,94	0,999959
0,76	0,776373	1,56	0,940620	2,36	0,990862	3,16	0,999211	3,96	0,999963
0,78	0,782305	1,58	0,942947	2,38	0,991344	3,18	0,999264	3,98	0,999966

B Folgen und Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1 \tag{B.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{für } |x| < 1 \tag{B.2}$$

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \quad \text{für } x \neq 1 \tag{B.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \cdots = (1+x)^r \quad \text{für } \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \tag{B.4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots = \mathrm{e}^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \tag{B.5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{(1-x)^n}{n} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \cdots = \ln(x) \quad \text{für } 0 < x \leq 2 \tag{B.6}$$

$$\sum_{n=1}^{k} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \tag{B.7}$$

C Integralrechnung

$$\int \delta(x - x_0)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \tag{C.1}$$

$$\int x\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2}(ax - 1) \tag{C.2}$$

$$\int x^2\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2) \tag{C.3}$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \tag{C.4}$$

$$\int \mathrm{e}^{ax} \sin(bx)\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2 + b^2}\Big(a \sin(bx) - b \cos(bx)\Big) \tag{C.5}$$

$$\int \sin(ax) \cos(ax)\, \mathrm{d}x = -\frac{\cos^2(ax)}{2a} \quad \text{für } a \neq 0 \tag{C.6}$$

$$\int_0^{\infty} x^n\, \mathrm{e}^{-ax}\, \mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{für } a > 0, n \in \mathbb{N} \tag{C.7}$$

$$\int_0^{\infty} x^2\, \mathrm{e}^{-ax^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \quad \text{für } a > 0 \tag{C.8}$$

D Formeln zur Fouriertransformation

Definition

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t}\, \mathrm{d}f \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\, \mathrm{d}t = X(f) \tag{D.1}$$

Eigenschaften

$$\sum c_i x_i(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \sum c_i X_i(f) \tag{D.2}$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad (\mathrm{j}2\pi f)^n \; X(f) \tag{D.3}$$

$$x\left(t - t_0\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_0} \, X(f) \tag{D.4}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t} \, x(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X\left(f - f_0\right) \tag{D.5}$$

$$x(t) * y(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f)Y(f) \tag{D.6}$$

$$x(t)y(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f) * Y(f) \tag{D.7}$$

$$x(t/a) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad |a|X(af) \tag{D.8}$$

Korrespondenzen

$$1 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \delta(f) \tag{D.9}$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2}\delta(f + f_0) + \frac{1}{2}\delta(f - f_0) \tag{D.10}$$

$$F \cdot \mathrm{sinc}(Ft) = \frac{\sin(\pi F t)}{\pi t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f) = \begin{cases} 1 \text{ für } |f| < \frac{F}{2} \\ 0 \text{ für } |f| > \frac{F}{2} \end{cases} \tag{D.11}$$

$$\mathrm{e}^{-\pi t^2} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{e}^{-\pi f^2} \tag{D.12}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 \text{ für } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 \text{ für } |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad T \cdot \mathrm{sinc}(fT) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} \tag{D.13}$$

$$\frac{1}{2}\delta(t + t_0) + \frac{1}{2}\delta(t - t_0) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \cos(2\pi f t_0) \tag{D.14}$$

$$\delta(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 1 \tag{D.15}$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\mathrm{j}}{2}\delta(f + f_0) - \frac{\mathrm{j}}{2}\delta(f - f_0) \tag{D.16}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 \text{ für } t > 0 \\ 0 \text{ für } t < 0 \end{cases} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{\mathrm{j}2\pi f} \tag{D.17}$$

$$\mathrm{e}^{-a|t|}, \quad a > 0 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} \tag{D.18}$$

$$x(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-at} \text{ für } t > 0 \\ 0 \text{ für } t < 0 \end{cases}, \quad a > 0 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{a + \mathrm{j}2\pi f} \tag{D.19}$$

$$x(t) = \begin{cases} t\mathrm{e}^{-at} \text{ für } t > 0 \\ 0 \text{ für } t < 0 \end{cases}, \quad a > 0 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{(a + \mathrm{j}2\pi f)^2} \tag{D.20}$$

$$\frac{1}{\pi t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -\,\mathrm{j}\ \mathrm{sign}(f) \tag{D.21}$$

$$\mathrm{j}\ \mathrm{sign}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{\pi f} \tag{D.22}$$

$$\mathcal{H}\{x(t)\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\lambda)}{t - \lambda}\, \mathrm{d}\lambda \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -\,\mathrm{j}\ \mathrm{sign}(f) X(f) \tag{D.23}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) \tag{D.24}$$

E Trigonometrie

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \tag{E.1}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \tag{E.2}$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\Big) \tag{E.3}$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big) \tag{E.4}$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\Big) \tag{E.5}$$