Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Nachrichtentechnik
Prof. Dr.-Ing. Laurent Schmalen

Schriftliche Prüfung zur Vorlesung

Nachrichtentechnik I

13.03.2023

Musterlösung

Hinweise

Die Prüfungsdauer beträgt **drei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **neun** Aufgaben zu bearbeiten.
Benutzen Sie nur die zur Verfügung gestellten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an.
Verwenden Sie zur Bearbeitung einen **dokumentenechten Stift** und keine rote Farbe. Schreiben Sie leserlich und vermeiden Sie, das vorgedruckte Doppelblatt zu beschriften. Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der **Lösungsweg und die gültige Lösung eindeutig erkennbar** sein, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann.
Abzugeben sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten und **nach Aufgabennummer sortierten Ausarbeitungen**. Nicht abzugeben sind die Aufgabenblätter, Ihre Formelsammlung sowie Ihr Konzeptpapier.

Zugelassene Hilfsmittel

Erlaubt sind **ein** beidseitig von eigener Hand mit Bleistift, Kugelschreiber, Füller o. Ä. beschriebenes **A4-Blatt** (Original, keine Kopie) sowie ein **nicht-programmierbarer** Taschenrechner.

Nach der Prüfung

Das **Ergebnis** Ihrer Prüfung erfahren Sie spätestens ab dem **13.04.2023** im Online-Notensystem. Details zur **Klausureinsicht** finden Sie auf Ilias. Dort werden Sie auch weitere Informationen zur **mündlichen Nachprüfung** finden.

Geben Sie diese Aufgaben nicht mit ab, sondern behalten Sie diese als Erinnerung für oben gegebene Termine.

Aufgabe 1 (16 Punkte)

Eine Quelle besitzt das Alphabet $\mathcal{A} = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{f}, \mathtt{g}, \mathtt{h}, \mathtt{i}\}$. Die Auftrittswahrscheinlichkeiten sind in folgender Tabelle gegeben:

Symbol	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Wahrscheinlichkeit (%)	29	19	12	10	8	7	6	5	4

a) Konstruieren Sie einen Huffman-Code für diese Quelle und geben Sie die entsprechenden Codewörter an. *(4 Punkte)*

b) Berechnen Sie die mittlere Codewortlänge des erzeugten Huffman-Codes. *(2 Punkte)*

c) Ändern Sie die Auftrittswahrscheinlichkeiten der Symbole in $\mathcal{A}$ so, dass die Redundanz des Codes minimal wird, d.h. $R_{\mathrm{C}} = 0$. Geben Sie die Auftrittswahrscheinlichkeiten an. *(3 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

Ein Signal x einer ergodischen Quelle wird durch die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos(x), & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben. Das Signal x wird mittels eines Quantisierers zu $\bar{x}$ quantisiert. Der Quantisierer wird durch die Funktion

$$q(x) = \begin{cases} -1, & x < -\frac{\pi}{4} \\ 1, & x > \frac{\pi}{4} \\ 0, & |x| \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

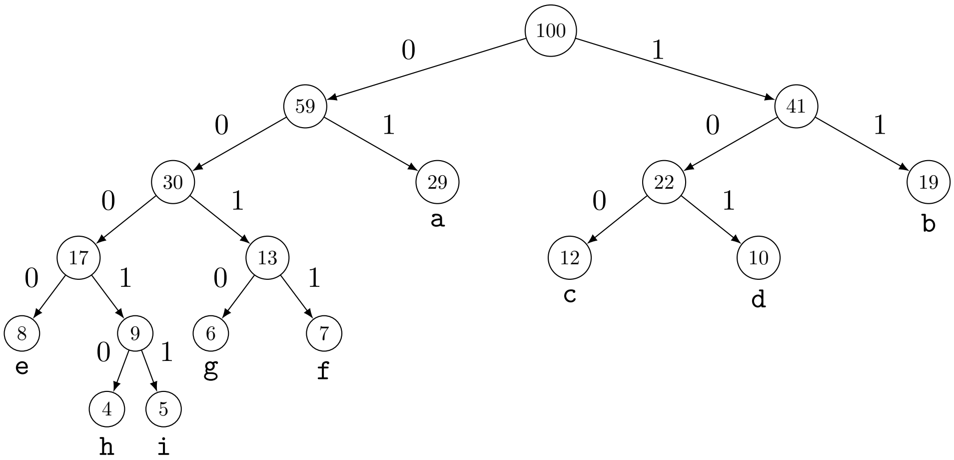
beschrieben.

d) Bestimmen und skizzieren Sie die Auftrittswahrscheinlichkeiten $P_{\bar{X}}(\bar{x})$ der Quantisierungsstufen $\bar{x} \in \{-1, 0, 1\}$. *(5 Punkte)*

e) Wie groß ist die mittlere Signalleistung S des quantisierten Signals $\bar{x}$? *(2 Punkte)*

Lösung

a) Eine mögliche Lösung ist durch folgende Baumdarstellung gegeben, wobei bei der Notation der Wahrscheinlichkeiten in den Blättern immer der Faktor $\frac{1}{100}$ fehlt:



Symbol	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Wahrscheinlichkeit (%)	29	19	12	10	8	7	6	5	4
Codewort	01	11	100	101	0000	0011	0010	00010	00011
Codewortlänge	2	2	3	3	4	4	4	5	5

b) Die mittlere Codewortlänge L_c berechnet sich zu

$$\begin{aligned} L_\mathrm{c} &= \sum_{i=1}^{N} P(x_i)L(x_i) \\ &= \frac{(29+19)\cdot 2 + (12+10)\cdot 3 + (6+7+8)\cdot 4 + (5+4)\cdot 5}{100} = \frac{291}{100} = 2{,}91 \text{ Bit/Symbol} \end{aligned}$$

c) Die Redundanz eines Codes ist durch $R_\mathrm{c} = L_\mathrm{c} - H(X)$ definiert. Somit ist $R_\mathrm{c} = 0$, wenn die mittlere Codewortlänge L_c der Entropie $H(X)$ der Quelle entspricht, $L_\mathrm{c} \stackrel{!}{=} H(X)$. Es folgt

$$\sum_{i=1}^{N} P(x_i)L(x_i) = -\sum_{i=1}^{N} P(x_i)\log_2\left(P(x_i)\right) .$$

Diese Bedingung ist zum Beispiel erfüllt für

$$L(x_i) = -\log_2\left(P(x_i)\right) \quad \forall x_i \in \mathcal{A} ,$$

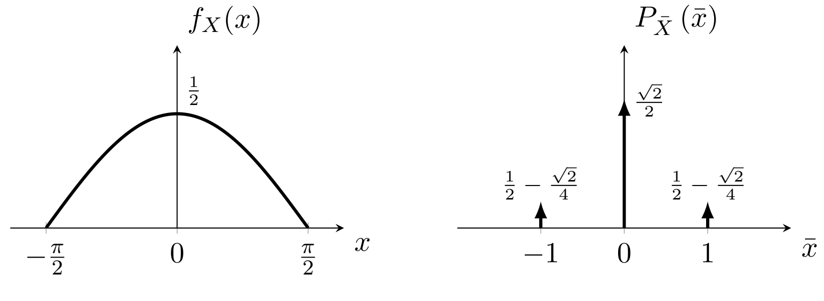
bzw. $P(x_n) = 2^{-L(x_n)}$. Da $L(x_n) \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ müssen die Auftretenswahrscheinlichkeiten negative Potenzen von 2 sein. Eine mögliche Lösung ist durch folgende Tabelle gegeben:

Symbol	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{256}$

d) Für das quantisierte Signal gilt:

$$P_{\bar{X}}(0) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin(x)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} P_{\bar{X}}(1) = P_{\bar{X}}(-1) &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\sin(x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

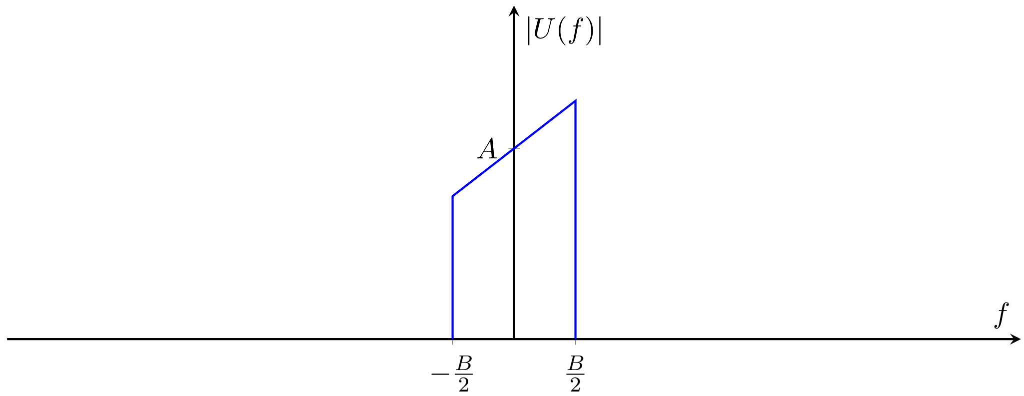


e) Die Leistung des quantisierten Signals berechnet sich zu:

$$S = \sum_{\bar{x}\in\{-1,0,1\}} |\bar{x}|^2 \cdot P_{\bar{X}}(\bar{x}) = 2\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 0\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Aufgabe 2 (13 Punkte)

Gegeben ist der Betrag $|U(f)|$ des Spektrums eines Basisbandsignals :



a) Geben Sie die Definition eines Bandpasssignals im Bezug auf Basisbandsignale an. *(1 Punkt)*

b) Skizzieren Sie den Betrag $|U_{\mathrm{BP}}(f)|$ des Bandpassspektrums, wenn das Signal $U(f)$ auf eine Bandpassfrequenz $f_{\mathrm{T}} \gg B$ gemischt wird. Achten Sie auf eine vollständige Achsenbeschriftung sowie auf eine vollständige Beschriftung der Schnittpunkte mit den Achsen. *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

Gegeben ist das Spektrum $S(f)$ eines Basisbandsignals, wobei $B, a \in \mathbb{R}$, $B > 0$, $a > 0$.

$$S(f) = \begin{cases} a\left(1 - \frac{2}{B}|f|\right), & -\frac{B}{2} \leq f \leq \frac{B}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

c) Skizzieren Sie sowohl den Real- als auch den Imaginärteil des Spektrums $S(f)$ des Basisbandsignals. Achten Sie auf eine vollständige Achsenbeschriftung und die Angabe der Schnittpunkte mit den Achsen. *(2 Punkte)*

d) Berechnen Sie a, sodass die Energie des Signals $E = 1$ beträgt. *(2 Punkte)*

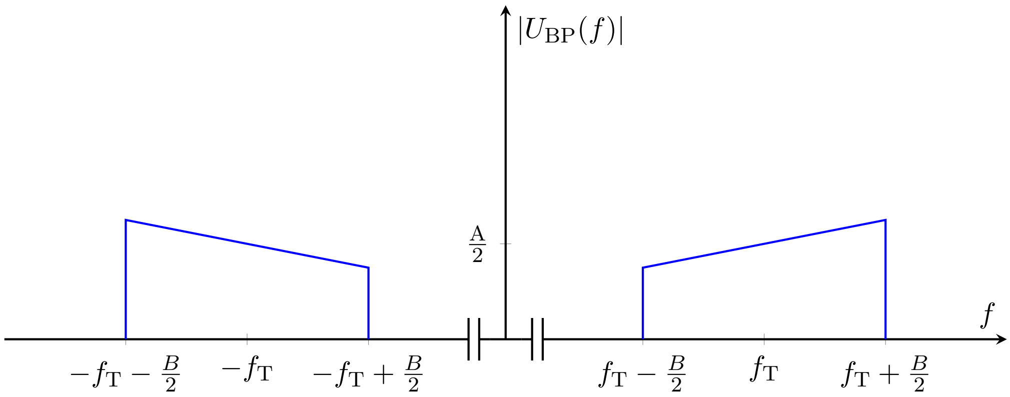
e) Bestimmen Sie das Basisbandsignal $s(t)$ im Zeitbereich. *(4 Punkte)*

f) Nun wird $s(t)$ in Bandpasslage gebracht, wobei f_{T} die Trägerfrequenz sei. Bestimmen Sie das Bandpasssignal $s_{\mathrm{BP}}(t)$. *(2 Punkte)*

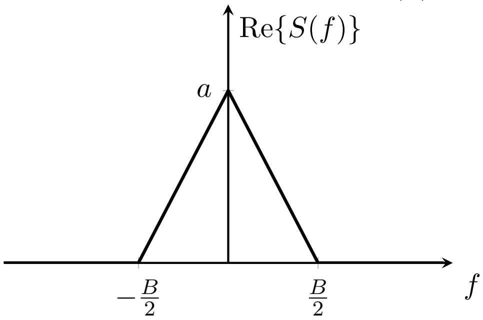
Lösung

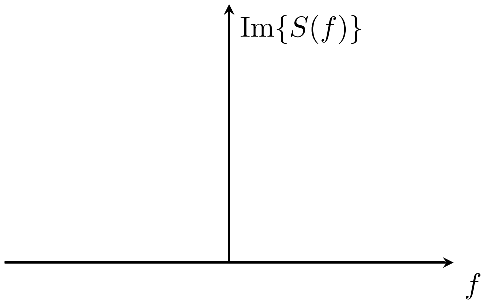
a) Aus der Vorlesung ist folgende Definition bekannt: "Ist der von $s_{\mathrm{BP}}(t)$ belegte Frequenzbereich viel kleiner als die Trägerfrequenz f_{T}, so wird $s_{\mathrm{BP}}(t)$ als Bandpasssignal bezeichnet." Dies kann auch ausgedrückt werden als: Ein Bandpasssignal $s_{\mathrm{BP}}(t)$ mit Bandbreite B und Trägerfrequenz f_{T} erfüllt $B \ll f_{\mathrm{T}}$.

b) Der Betrag des Bandpassspektrums ergibt sich aus der Verschiebung des Basisbandspektrums um $\pm f_{\mathrm{T}}$ und der Skalierung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$.



c) Der Real- und Imaginärteil von $S(f)$ lässt sich wie folgt darstellen:





d) Die Energie eines Signals lässt sich mit $\int_{-\infty}^{\infty}|S(f)|^2\mathrm{d}f$ berechnen. Für das gegebene Signal können die Integrationsgrenzen auf $-\frac{B}{2}$ und $\frac{B}{2}$ gesetzt werden. Ausserdem kann die Symmetrie um $f=0$ genutzt werden:

$$\mathrm{E}_{S(f)} = 2\int_0^{\frac{B}{2}}\left(a\left(1-\frac{2}{B}f\right)\right)^2\mathrm{d}f = 2a^2\int_0^{\frac{B}{2}}1-\frac{4}{B}f+\frac{4}{B^2}f^2\mathrm{d}f\ .$$

Integration und Einsetzen der Integrationsgrenzen liefert:

$$\mathrm{E}_{S(f)} = 2a^2\left[f-\frac{2}{B}f^2+\frac{4}{3B^2}B^3\right]_0^{\frac{B}{2}} = 2a^2\left(\frac{B}{2}-\frac{B}{2}+\frac{4}{3B^2}\frac{B^3}{8}\right) = a^2\left(\frac{B}{3}\right)\ .$$

Nach der Beschreibung soll die Energie des Signals auf 1 normiert werden, d.h. $\mathrm{E}_{S(f)}\overset{!}{=}1$. Es folgt:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_{S(f)} \overset{!}{=} 1 &= a^2\frac{B}{3}\\ \frac{3}{B} &= a^2\\ a &\overset{a\geq 0}{=} \sqrt{\frac{3}{B}}\end{aligned}$$

e) Für die Berechnung von $s(t)$ kann $S(f)$ als Faltung zweier um $f=0$ zentrierter Rechtecksfunktionen der Breite $B/2$ beschrieben werden. Die Faltung muss $S(f=0)\overset{!}{=}a$ erfüllen und kann durch eine Skalierung $C\in\mathbb{R}$ beschrieben werden:

$$\begin{aligned}S(f=0) &= C\cdot\left[\mathrm{rect}_{\frac{B}{2}} * \mathrm{rect}_{\frac{B}{2}}\right](f=0) = C\int_{-\frac{B}{4}}^{\frac{B}{4}}1\mathrm{d}\nu = C\frac{B}{2}\\ &\Rightarrow C = a\frac{2}{B}\ .\end{aligned}$$

Mit den Korrespondenzen (D.7) und (D.11) sowie $a = \sqrt{\frac{3}{B}}$ folgt:

$$S(f) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad s(t) = a\frac{2}{B}\left[\frac{B}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{B}{2}t\right) \cdot \frac{B}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{B}{2}t\right)\right] = \frac{\sqrt{3B}}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{B}{2}t\right).$$

f) Für $s_{\mathrm{BP}}(t)$ folgt:

$$\begin{aligned} s_{\mathrm{BP}}(t) &= \operatorname{Re}\left\{\frac{\sqrt{3B}}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{B}{2}t\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_{\mathrm{T}}t}\right\} \\ &= \frac{\sqrt{3B}}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{B}{2}t\right)\cos\left(2\pi f_{\mathrm{T}}t\right) \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (19 Punkte)

Wir betrachten ein Übertragungssystem mit einem Pulsformungsfilter, welches durch folgenden Frequenzgang charakterisiert ist:

$$G(f) = \begin{cases} \sqrt{A}, & |f| < \frac{1-\beta}{2T} \\ \sqrt{-\frac{AT}{\beta} \cdot f + \frac{A(1+\beta)}{2\beta}}, & \frac{1-\beta}{2T} \leq f \leq \frac{1+\beta}{2T} \\ \sqrt{\frac{AT}{\beta} \cdot f + \frac{A(1+\beta)}{2\beta}}, & -\frac{1+\beta}{2T} \leq f \leq -\frac{1-\beta}{2T} \\ 0, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Die einzelnen Symbole werden mit der Rate $1/T$ übertragen.

a) Bestimmen Sie $G\left(f = \frac{1-\beta}{2T}\right)$ sowie $G\left(f = \frac{1+\beta}{2T}\right)$. *(2 Punkte)*

b) Skizzieren Sie qualitativ den Frequenzgang. Achten Sie auf eine vollständige Beschriftung. *(2 Punkte)*

Sie wollen diesen Puls nun dazu nutzen, Daten mit einer Symbolrate von 2 Baud zu übertragen. Ihnen steht dazu eine Bandbreite von 3 Hz zur Verfügung. Außerhalb dieser Bandbreite darf das System keine Signalanteile erzeugen.

c) Bestimmen Sie die Parameter T und β, welche die angegebenen Bedingungen erfüllen. Falls mehrere Lösungsmöglichkeiten existieren, wählen Sie die jeweils größtmögliche. *(3 Punkte)*

d) Bestimmen Sie unter Nutzung der Parameter aus vorheriger Teilaufgabe nun A so, dass die Energie des Pulses auf 1 normiert ist, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 \mathrm{d}t = 1$. Begründen Sie Ihre Rechenschritte. *(5 Punkte)*

e) Geben Sie den Frequenzgang $H(f)$ des *nicht-kausalen* Matched-Filters für die soeben bestimmten Parameter A, β und T an. Begründen Sie Ihr Vorgehen. Sollten Sie die vorherige Teilaufgabe nicht gelöst haben, so nutzen Sie $A = \frac{1}{2}$. *(3 Punkte)*

f) Geben Sie den Gesamtfrequenzgang $H_0(f)$ des Übertragungssystems bestehend aus Pulsformungsfilter und Matched-Filter an. Erfüllt das System die 1. Nyquist-Bedingung? Begründen Sie Ihre Antwort mathematisch. *(4 Punkte)*

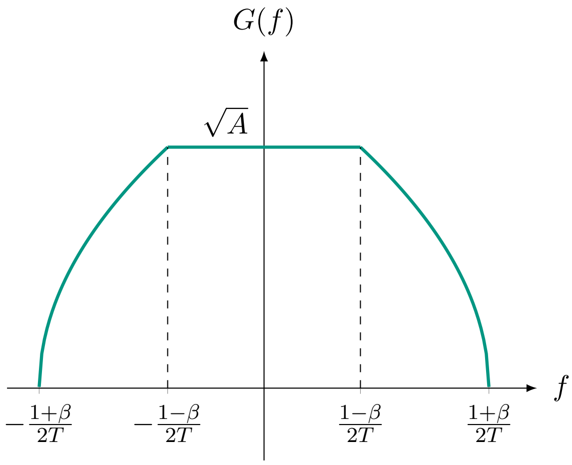
Lösung

a) Es ist:

$$G\left(f = \frac{1-\beta}{2T}\right) = \sqrt{-\frac{AT}{\beta}\frac{1-\beta}{2T} + \frac{A(1+\beta)}{2\beta}} = \sqrt{\frac{-A + A\beta + A + A\beta}{2\beta}} = \sqrt{A}$$

$$G\left(f = \frac{1+\beta}{2T}\right) = \sqrt{-\frac{AT}{\beta}\frac{1+\beta}{2T} + \frac{A(1+\beta)}{2\beta}} = \sqrt{-\frac{A(1+\beta)}{2\beta} + \frac{A(1+\beta)}{2\beta}} = 0$$

b) Mit den Ergebnissen aus vorheriger Teilaufgabe erhalten wir folgende Skizze:



c) Mit einer Symbolrate von 2 Baud ergibt sich $T = \frac{1}{2}$. Darüber hinaus muss gelten (für $T > 0$):

$$\begin{aligned} & \frac{1+\beta}{2T} \leq \frac{B}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & \beta \leq BT - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \beta \leq \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Da das größtmögliche β gesucht ist, wählen wir $\beta = \frac{1}{2}$.

d) Mit der Wahl von $T = \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{1}{2}$ vereinfacht sich $G(f)$ zu

$$G(f) = \begin{cases} \sqrt{A} & |f| < \frac{1}{2} \\ \sqrt{A(-f + \frac{3}{2})} & \frac{1}{2} \leq f \leq \frac{3}{2} \\ \sqrt{A(f + \frac{3}{2})} & -\frac{3}{2} \leq f \leq -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

Mit dem Satz von Parseval folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 \mathrm{d}f .$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 \mathrm{d}f &= A \int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} \left(f + \frac{3}{2}\right) \mathrm{d}f + A \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}f + A \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-f + \frac{3}{2}\right) \mathrm{d}f \\ &= A \left[\frac{f^2}{2} + \frac{3}{2}f\right]_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} + A + A \left[-\frac{f^2}{2} + \frac{3}{2}f\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{A}{2} + A + \frac{A}{2} \\ &= 2A \overset{!}{=} 1 \end{aligned}$$

Es folgt $A = \frac{1}{2}$.

e) Mit $A = \frac{1}{2}$ vereinfacht sich der Frequenzgang zu

$$G(f) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} & |f| < \frac{1}{2} \\ \sqrt{-\frac{f}{2} + \frac{3}{4}} & \frac{1}{2} \leq f \leq \frac{3}{2} \\ \sqrt{\frac{f}{2} + \frac{3}{4}} & -\frac{3}{2} \leq f \leq -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

Für das akausale Matched-Filter gilt $h(t) = g^\star(-t)$. Da $G(f)$ für den Realteil gerade, sowie für den Imaginärteil ungerade Symmetrie ($\mathrm{Im}(G(f)) = 0$) aufweist, ist $g(t) \in \mathbb{R}$. Somit ist $h(t) = g(-t)$.
Aus (D.8) mit $a = -1$ folgt $h(t) = g(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G(-f)$, wobei aufgrund der Symmetrie $G(-f) = G(f)$ ist. Somit ist $h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G(f)$ und $H(f) = G(f)$.

$$h(t) = g^\star(-t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad H(f) = G(f) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} & |f| < \frac{1}{2} \\ \sqrt{-\frac{f}{2} + \frac{3}{4}} & \frac{1}{2} \leq f \leq \frac{3}{2} \\ \sqrt{\frac{f}{2} + \frac{3}{4}} & -\frac{3}{2} \leq f \leq -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

f) Der Gesamtfrequenzgang ergibt sich zu

$$H_0(f) = G(f) \cdot H(f) = G(f) \cdot G(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |f| < \frac{1}{2} \\ -\frac{f}{2} + \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \leq f \leq \frac{3}{2} \\ \frac{f}{2} + \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \leq f \leq -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Wir überprüfen die 1. Nyquist-Bedingung im Frequenzbereich. Dazu benötigen wir

$$\frac{1}{T} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} H_0\left(f - \frac{\kappa}{T}\right) = 2 \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} H_0(f - 2\kappa)\,.$$

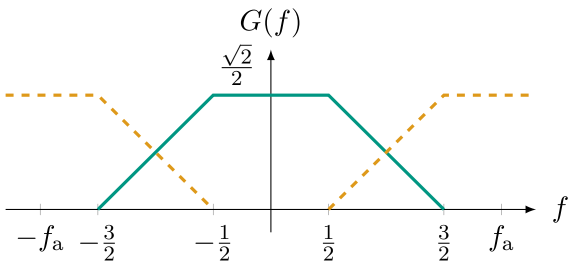
Aufgrund der endlichen Ausdehnung von $H_0(f)$ müssen wir nur den Bereich $\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{3}{2}$ betrachten (siehe Skizze, $f_\mathrm{a} = R$) und erhalten für $\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} 2H_0(f) + 2H_0(f-2) &= 2\left(-\frac{f}{2} + \frac{3}{4} + \frac{f-2}{2} + \frac{3}{4}\right) \\ &= 2\left(\frac{3}{4} - 1 + \frac{3}{4}\right) = 1\,. \end{aligned}$$

Somit ist für jedes f

$$2 \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} H_0(f - 2\kappa) = 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\kappa_0 T f}, \text{ mit } \kappa_0 = 0$$

und die 1. Nyquist-Bedingung ist erfüllt.



Aufgabe 4 (16 Punkte)

Gegeben ist eine Modulation mit den reellwertigen Symbolen c_1 und c_2. Diese werden durch reellwertiges Rauschen mit der Verteilungsdichte

$$f_N(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} - bn^2, & -\frac{1}{\sqrt{2b}} \leq n \leq \frac{1}{\sqrt{2b}} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \qquad b > 0$$

gestört und es gilt $Z[k] = A[k] + N[k]$. Dabei beschreibt die Zufallsvariable $A[k]$ das Sendesymbol $A[k] \in \{\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2\}$. Zunächst sei $\mathsf{c}_1 = +1$ und $\mathsf{c}_2 = -\frac{3}{2}$. Weiterhin gilt $P_A(\mathsf{c}_1) = P_A(\mathsf{c}_2) = \frac{1}{2}$.

a) Bestimmen Sie den Wert von b. *(3 Punkte)*

b) Geben Sie die bedingten Dichten $f_{Z|A}(z|A = \mathsf{c}_1)$ und $f_{Z|A}(z|A = \mathsf{c}_2)$ an. *(2 Punkte)*

c) Leiten Sie die optimale Entscheidungsregel gemäß der MAP-Regel her und geben Sie einen Ausdruck an, der in Abhängigkeit des Empfangssymbols $z[k]$ die optimale Symbolentscheidung $\hat{a}[k]$ liefert. *(4 Punkte)*

d) Bestimmen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit P_e für diesen Fall. *(5 Punkte)*

e) Wie müssen Sie c_1 verändern, sodass die Fehlerwahrscheinlichkeit P_e zu null wird? Wählen Sie c_1 so, dass die Symbolenergie E_s minimal ist. *(2 Punkte)*

Lösung

a) Damit $f_N(n)$ eine Dichte ist, muss

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_N(n)\,\mathrm{d}n = 1.$$

erfüllt sein. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} f_N(n)\,\mathrm{d}n \\ =&\int_{-\frac{1}{\sqrt{2b}}}^{\frac{1}{\sqrt{2b}}} \left(\frac{1}{2} - bn^2\right) \mathrm{d}n \\ =&\frac{n}{2} - \frac{b}{3}n^3\Big|_{-\frac{1}{\sqrt{2b}}}^{\frac{1}{\sqrt{2b}}} \\ =&\frac{1}{\sqrt{2b}} - \frac{b}{3}\cdot\frac{1}{2b}\cdot\frac{2}{\sqrt{2b}} \\ =&\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{b}} \stackrel{!}{=} 1 \\ \Rightarrow \quad & b = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Somit ist:

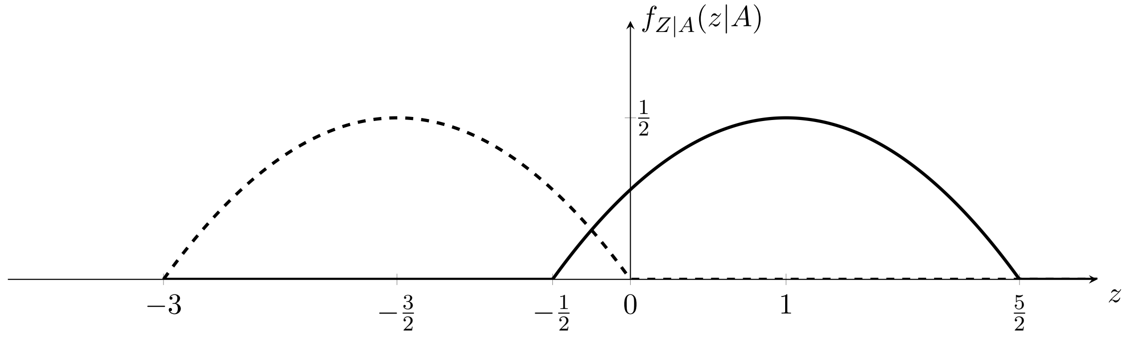
$$f_N(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{2}{9}n^2 & -\frac{3}{2} \leq n \leq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Die beiden bedingten Dichten am Empfänger ergeben sich zu:

$$f_{Z|A}(z|A = \mathsf{c}_1) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{2}{9}(z-1)^2 & -\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{5}{2} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} = \begin{cases} -\frac{2}{9}z^2 + \frac{4}{9}z + \frac{5}{18} & -\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{5}{2} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$f_{Z|A}(z|A=\mathsf{c}_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{2}{9}\left(z+\frac{3}{2}\right)^2 & -3 \le z \le 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} = \begin{cases} -\frac{2}{9}z^2 + \frac{2}{3}z & -3 \le z \le 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

c) Als Hilfe können beide bedingten Dichten in ein gemeinsames Diagramm skizziert werden:



Mit Hilfe der Skizze folgt eine Fallunterscheiung:
Fall 1: $z \le -\frac{1}{2}$:
$f_{Z|A}(z|A=\mathsf{c}_1) = 0 \;\Rightarrow f_{Z|A}(z|A=\mathsf{c}_1) < f_{Z|A}(z|A=\mathsf{c}_2) \Rightarrow \hat{A} = \mathsf{c}_2$

Fall 2: $z > 0$:
$f_{Z|A}(z|A=\mathsf{c}_2) = 0 \;\Rightarrow f_{Z|A}(z|A=\mathsf{c}_1) > f_{Z|A}(z|A=\mathsf{c}_2) \Rightarrow \hat{A} = \mathsf{c}_1$

Fall 3: $-\frac{1}{2} < z \le 0$:
Laut binärem Hypothesentest ist gemäß MAP-Regel

$$P_A(A=\mathsf{c}_1) f_{Z|A}(z|A=\mathsf{c}_1) \underset{\hat{A}=\mathsf{c}_1}{\overset{\hat{A}=\mathsf{c}_2}{\lesseqgtr}} P_A(A=\mathsf{c}_2) f_{Z|A}(z|A=\mathsf{c}_2)\,.$$

Da $P_A(A=\mathsf{c}_1) = P_A(A=\mathsf{c}_2) = \frac{1}{2}$, folgt:

$$\begin{aligned}
f_{Z|A}(z|A=\mathsf{c}_1) &\underset{\hat{A}=\mathsf{c}_1}{\overset{\hat{A}=\mathsf{c}_2}{\lesseqgtr}} f_{Z|A}(z|A=\mathsf{c}_2) \\
\frac{1}{2} - \frac{2}{9}(z-1)^2 &\underset{\hat{A}=\mathsf{c}_1}{\overset{\hat{A}=\mathsf{c}_2}{\lesseqgtr}} \frac{1}{2} - \frac{2}{9}\left(z+\frac{3}{2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow \qquad z^2 - 2z + 1 &\underset{\hat{A}=\mathsf{c}_1}{\overset{\hat{A}=\mathsf{c}_2}{\lesseqgtr}} z^2 + 3z + \frac{9}{4} \\
\Leftrightarrow \qquad z &\underset{\hat{A}=\mathsf{c}_1}{\overset{\hat{A}=\mathsf{c}_2}{\lesseqgtr}} -\frac{1}{4}\,.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Entscheidungsregel:

$$\hat{a}[k] = \begin{cases} \mathsf{c}_2 & z[k] < -\frac{1}{4} \\ \mathsf{c}_1 & z[k] \ge -\frac{1}{4} \end{cases}$$

d) Die Fehlerwahrscheinlichkeit berechnet sich zu:

$$\begin{aligned}
P_\mathrm{e} &= P_A(A=\mathsf{c}_1) P_\mathrm{e}(\mathsf{c}_1) + P_A(A=\mathsf{c}_2) P_\mathrm{e}(\mathsf{c}_2) \\
&= P_A(\mathsf{c}_1) \int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{4}} f_{Z|A}(z|A=\mathsf{c}_1)\mathrm{d}z + P_A(A=\mathsf{c}_2) \int_{-\frac{1}{4}}^{0} f_{Z|A}(z|A=\mathsf{c}_2)\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Aufgrund der geraden Symmetrie von $f_N(n)$ ist das Ergebnis beider Integrale äquivalent, weiterhin ist $P_A(A = \mathsf{c}_1) = P_A(A = \mathsf{c}_2) = \frac{1}{2}$. Somit genügt es, eines der beiden Integrale zu berechnen:

$$\begin{aligned}
P_\mathrm{e} &= \int_{-\frac{1}{4}}^{0} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{9} \left(z + \frac{3}{2} \right)^2 \right) \mathrm{d}z \\
&= \int_{-\frac{1}{4}}^{0} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{9} z^2 - \frac{2}{3} z - \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}z \\
&= -\frac{2}{27} z^3 - \frac{z^2}{3} \bigg|_{-\frac{1}{4}}^{0} \\
&= -\frac{2}{27} \cdot \frac{1}{64} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} \\
&= \frac{17}{864} \approx 0{,}0197\,.
\end{aligned}$$

Alternativ können auch beide Integrale separat berechnen werden.

e) Es treten keine Fehler auf, falls $f_{Z|A}(z|A = \mathsf{c}_1)$ und $f_{Z|A}(z|A = \mathsf{c}_2)$ sich nicht überlappen. Dies ist der Fall, falls

$$\mathsf{c}_1 \leq -\frac{9}{2} \qquad \text{oder} \qquad \mathsf{c}_1 \geq \frac{3}{2}.$$

Unter der Bedingung der minimalen Symbolenergie ergibt sich $\mathsf{c}_1 = \frac{3}{2}$.

Aufgabe 5 (17 Punkte)

Gegeben ist die Generatormatrix $\boldsymbol{G}$ eines linearen Blockcodes $\mathcal{C}$ in $\mathbb{F}_2^n$:

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Coderate des durch $\boldsymbol{G}$ gegebenen Blockcodes. *(1 Punkt)*

b) Geben Sie alle Codewörter des Codes $\mathcal{C}$ an. *(2 Punkte)*

c) Geben Sie die systematische Form $\boldsymbol{G}_{\text{sys}}$ der Generatormatrix $\boldsymbol{G}$ an. Begründen Sie kurz Ihr Vorgehen. *(2 Punkte)*

d) Bestimmen Sie die Paritycheckmatrix $\boldsymbol{H}$ des Codes. *(2 Punkte)*

e) Bestimmen Sie den minimalen Hammingabstand d_{min} sowie die Fehlerkorrekturfähigkeit des Codes $\mathcal{C}$. *(2 Punkte)*

f) Nach Übertragung über einen symmetrischen Binärkanal (BSC) mit einer Bitfehlerrate von $\delta < \frac{1}{2}$ wird der Vektor $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ empfangen. Welches ist das am wahrscheinlichsten gesendete Codewort, wenn nach Hard-Decision Decoding (HDD) mittels Syndromdecodierung decodiert wird? *(4 Punkte)*

Sollten Sie Teilaufgabe e) nicht gelöst haben, so rechnen Sie ab hier mit einer Fehlerkorrekturfähigkeit von $t = 3$.

g) Welche Wortfehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich nach der Hard-Decision-Decodierung (HDD) und Nutzung von $\mathcal{C}$, falls auf dem BSC eine Bitfehlerwahrscheinlichkeit von $\delta < \frac{1}{2}$ auftritt? *(2 Punkte)*

h) Sie übertragen nun 10^7 Informationsbits über einen BSC mit $\delta = 10^{-2}$. Wie viele Codewörter müssen über den Kanal übertragen werden? Schätzen Sie die zu erwartende Anzahl falsch decodierter Codewörter nach HDD. *(2 Punkte)*

Lösung

a) Da $\boldsymbol{G} \in \mathbb{F}_2^{k \times n}$, werden $k = 2$ Datenbit auf $n = 8$ Codebit abgebildet. Die Rate ergibt sich zu

$$r = \frac{k}{n} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} .$$

b) Dieser Code besteht aus $2^k = 4$ Daten- bzw. Codewörtern. Die Codewörter ergeben sich durch $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{G}$, wobei $\boldsymbol{u} \in \mathbb{F}^k$ das Datenwort darstellt. Die Codewörter sind:

$$\boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Mit den Codewörtern $\boldsymbol{c}_1$ und $\boldsymbol{c}_3$ können wir die systematische Form von $\boldsymbol{G}$ bilden

$$\boldsymbol{G}_{\text{sys}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{P} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{k \times n},$$

wobei $\boldsymbol{I}_k \in \mathbb{F}_2^{k\times k}$ die k-dimensionale Einheitsmatrix ist und $\boldsymbol{P} \in \mathbb{F}_2^{k\times(n-k)}$ die Vorschrift zur Bildung der Paritycheckbits enthält.
Alternativ kann $\boldsymbol{G}_{\mathrm{sys}}$ auch durch Spaltentausch, z.B. $S_1 \leftrightarrow S_3$, gebildet werden:

$$\boldsymbol{G}_{\mathrm{sys}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Da $\boldsymbol{G}_{\mathrm{sys}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{P} \end{pmatrix}$ mit

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ergibt sich die Paritycheckmatrix zu

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}^{\mathsf{T}} & \boldsymbol{I}_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Je nach $\boldsymbol{G}_{\mathrm{sys}}$ aus Aufgabenteil c) ergibt sich ein anderes $\boldsymbol{H}$.

e) Der minimale Hammingabstand ist:

$$d_{\min} = \min_{\substack{\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2 \in \mathcal{C} \\ \boldsymbol{c}_1 \neq \boldsymbol{c}_2}} d_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}\setminus\{\boldsymbol{0}\}} d_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}).$$

Im vorliegenden Code gilt $d_{\min} = 5$. Damit ein Blockcode t Fehler korrigieren kann, muss $d_{\min} \geq 2t+1$ gelten. Es folgt $t \leq \left\lfloor \frac{d\min-1}{2} \right\rfloor = 2$ und somit kann der Code bis zu 2 Bitfehler korrigieren.

f) Um das am wahrscheinlichsten gesendete Codewort nach HDD zu bestimmen muss eine Syndromdecodierung durchgeführt werden. Hierzu wird aus dem Empfangsvektor $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und der Paritycheckmatrix $\boldsymbol{H}$ das Syndrom $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}$ berechnet:

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{e}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{e}^{\mathsf{T}}$. Das Syndrom ist somit die Linearkombination der dem Fehlermusters $\boldsymbol{e}$ entsprechenden Spalten von $\boldsymbol{H}$. Da $\boldsymbol{s}$ keiner Spalte von $\boldsymbol{H}$ entspricht, muss mehr als ein Bit falsch übertragen sein. Als nächtes wird geprüft, ob das Syndrom durch die Linearkombination zweier Spalten (zwei Bitfehler) gebildet werden kann. Da $\boldsymbol{s}$ der Summe der dritten und fünften Spalte der Paritycheckmatrix $\boldsymbol{H}$ entspricht, ist $\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ das wahrscheinlichste Fehlermuster. Somit ist laut Syndromdecodierung im empfangenen Vektor $\boldsymbol{y}$ das dritte und fünfte Bit falsch. Das am wahrscheinlichsten gesendete Codewort ist somit $\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

g) Bei codierter Übertragung werden $k = 2$ Datenbit auf $n = 8$ Codebit abgebildet übertragen. Bei einer Fehlerkorrekturfähigkeit von $t = 2$ tritt ein Wortfehler auf, wenn mindestens 3 Bit falsch übertragen werden:

$$\begin{aligned} P_\mathrm{e} &= P(\text{mind. 3 Bit falsch}) \\ &= \sum_{i=3}^{8} \binom{8}{i} \delta^i (1-\delta)^{8-i} \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{2} \binom{8}{i} \delta^i (1-\delta)^{8-i} \end{aligned}$$

h) Da $k = 2$, müssen für 10^7 Informationsbits $N = \frac{10^7}{2} = 5 \cdot 10^6$ Codewörter übertragen werden.

Die Wortfehlerwahrscheinlichkeit ist

$$P_\mathrm{e} = 1 - (1-\delta)^8 - 8\delta(1-\delta)^7 - 28\delta^2(1-\delta)^6 = 5{,}393 \cdot 10^{-5}.$$

Mit der Zufallsvariablen X_i können wir beschreiben, ob das i-te Codewort falsch decodiert wurde:

$$X_i = \begin{cases} 1 & i\text{-te Codewort falsch decodiert} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die zu erwartende Anzahl N_f der falsch decodierten Codewörter ergobt sich zu

$$\begin{aligned} N_\mathrm{f} &= \mathbb{E}\left\{ \sum_{i=1}^{N} X_i \right\} = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left\{X_i\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N} (P_\mathrm{e} \cdot 1 + (1-P_\mathrm{e}) \cdot 0) = N \cdot P_\mathrm{e} \\ &= 5 \cdot 10^6 \cdot P_\mathrm{e} \approx 269{,}667. \end{aligned}$$

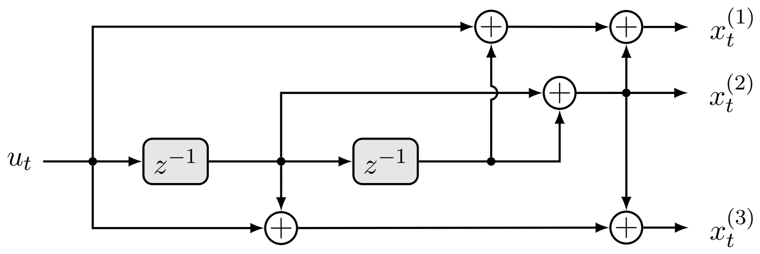
Lösung für t=3:
Für t=3 folgt für Aufgabenteil g):

$$P_\mathrm{e} = 1 - \sum_{i=0}^{3} \binom{8}{i} \delta^i (1-\delta)^{8-i}$$

Und für Aufgabenteil h): $P_\mathrm{e} = 6{,}779 \cdot 10^{-7}$ *sowie* $N_\mathrm{f} = 3{,}39$ *falsch decodierte Codewörter.*

Aufgabe 6 (18 Punkte)

Gegeben sei folgender Faltungsencoder:



a) Bestimmen Sie die Rate r und die Einflusslänge des Faltungscodierers. *(2 Punkte)*

b) Geben Sie die Berechnungsvorschriften der Ausgangsbits $x_t^{(\ell)} = f(u_t, u_{t-1}, u_{t-2})$, $\ell = 1, 2, 3$ an, wobei u_{t-n} das um n Zeitschritte verzögerte Eingangsbit darstellt. Vereinfachen Sie soweit wie möglich. *(3 Punkte)*

c) Zeichnen Sie das Zustandsdiagramm des Faltungscodierers. *(4 Punkte)*

Nach Anwendung des mit $(v_1, v_2) = (0, 0)$ initialisierten Faltungsencoders werden die codierten Bits $\boldsymbol{x}$ über einen AWGN-Kanal übertragen, wobei eine BPSK-Modulation verwendet wird. Die Empfangswerte lassen sich durch $y_i = (-1)^{x_i} + n_i$ beschreiben, wobei $n_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Sie empfangen den Vektor

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -1{,}2 & 0{,}9 & -0{,}8 & 1{,}4 & 0{,}3 & -0{,}1 & -0{,}8 & 0{,}9 & 1{,}1 & -0{,}9 & -1{,}0 & 0{,}7 \end{pmatrix} .$$

Die durch den Faltungscodierer erzeugte Codebitfolge kann als gleichverteilt angenommen werden.

d) Führen Sie eine Hard-Decision von $\boldsymbol{y}$ durch und begründen Sie kurz Ihre Vorgehensweise. *(2 Punkte)*

e) Bestimmen Sie die am wahrscheinlichsten gesendete Codebitfolge $\hat{\boldsymbol{x}}$ sowie die zugehörige Informationsbitfolge $\hat{\boldsymbol{u}}$ mit Hilfe des Hard-Decision Viterbi-Algorithmus. Achten Sie auf eine vollständige Beschriftung Ihrer Lösung inklusive aller Zwischenwerte, sodass der Lösungsansatz klar ersichtlich ist. *(7 Punkte)*

Lösung

a) Da pro Zeitschritt aus $k = 1$ Eingangsbit $n = 3$ Codebit erzeugt werden, bestimmt sich die Rate zu $r = \frac{k}{n} = \frac{1}{3}$. Da der Faltungsencoder zwei Speicherglieder besitzt und die Ausgangsbit somit von u_t, u_{t-1} und u_{t-2} abhängen, besitzt der Codierer eine Einflusslänge von 3.

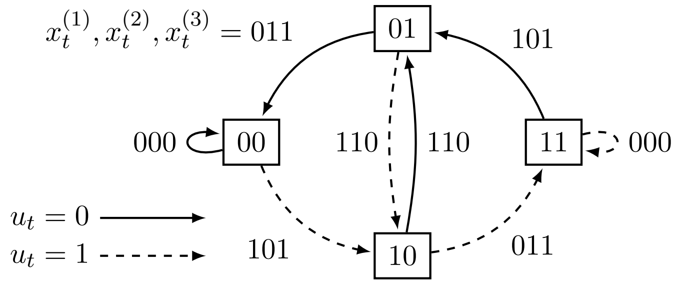
b)

$$\begin{aligned} x_t^{(1)} &= u_t + u_{t-2} + x_t^{(2)} \\ x_t^{(2)} &= u_{t-1} + u_{t-2} \\ x_t^{(3)} &= u_t + u_{t-1} + x_t^{(2)} \end{aligned}$$

Einsetzen von $x_t^{(2)}$ liefert:

$$\begin{aligned} x_t^{(1)} &= u_t + u_{t-2} + u_{t-1} + u_{t-2} = u_t + u_{t-1} \\ x_t^{(2)} &= u_{t-1} + u_{t-2} \\ x_t^{(3)} &= u_t + u_{t-1} + u_{t-1} + u_{t-2} = u_t + u_{t-2} \end{aligned}$$

c) Das Zustandsdiagramm lässt sich entweder aus dem Schieberegister oder aus den vereinfachten Berechnungsvorschriften bestimmen:



d) Bei Hard-Decision werden die Empfangswerte zuerst "bitweise" hart entschieden. Da BPSK-Symbole über einen AWGN Kanal übertragen werden und die Codebits, und somit die Sendesymbole, als gleichverteilt angenommen werden können, ergibt sich aus dem ML-Schätzer

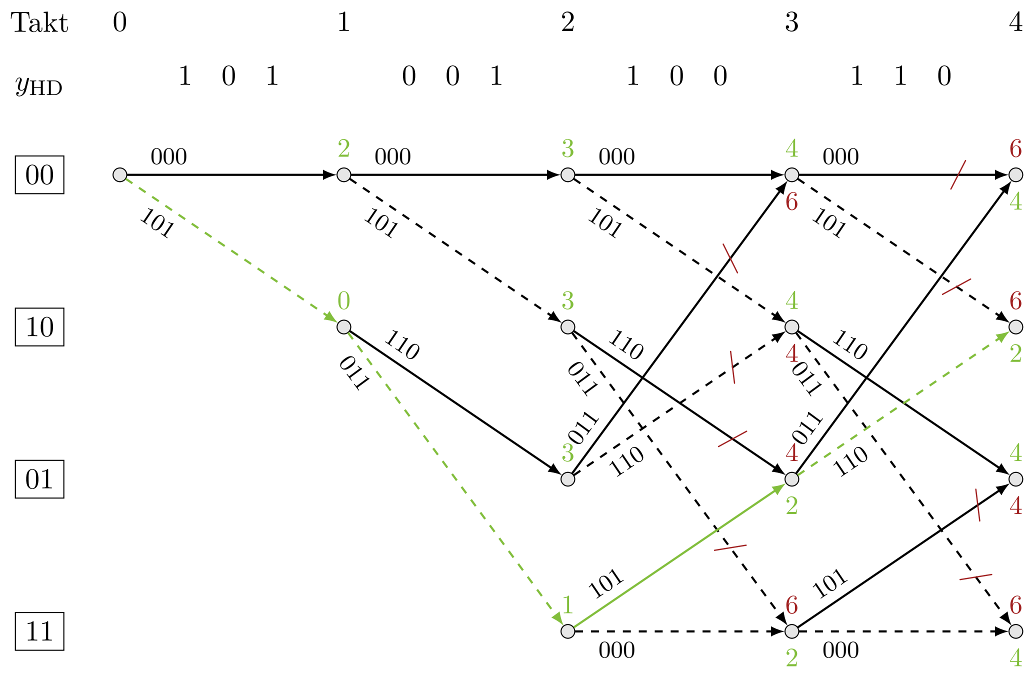
$$\tilde{y}_{\mathrm{HD}} = \begin{cases} +1 & y \geq 0 \\ -1 & y < 0 \end{cases} .$$

Invertieren der Berechnungsvorschrift der BPSK-Modulation ergibt

$$y_{\mathrm{HD}} = \begin{cases} 0 & y \geq 0 \\ 1 & y < 0 \end{cases} .$$

Die Empfangsfolge ergibt sich zu $\boldsymbol{y}_{\mathrm{HD}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

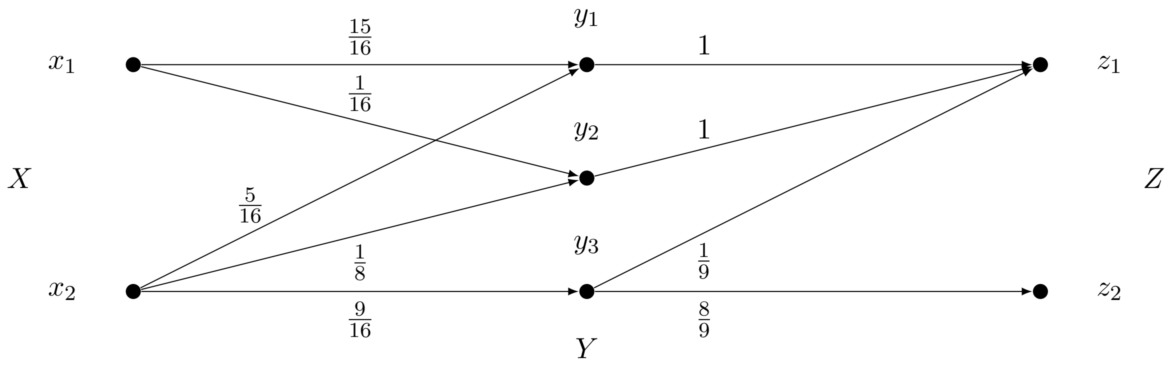
e) Zuerst muss das Trellisdiagramm für vier Taktschritte gezeichnet werden. Danach kann der Viterbi-Algorithmus auf $\boldsymbol{y}_{\mathrm{HD}}$ angewendet werden:



Es ergibt sich $\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sowie $\hat{\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 7 (19 Punkte)

Gegeben ist folgendes Modell eines diskreten, gedächtnislosen Kanals:



Die Zufallsvariablen X und Z beschreiben das Sende- und Empfangssymbol, wobei $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$ die Menge der Sendesymbole und $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2\}$ die Menge der Empfangssymbole ist. Die Zufallsvariable Y beschreibt Symbole $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, y_3\}$, die in der Mitte des Kanals abgegriffen werden. An den Kanten sind die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den verschiedenen Knoten notiert.

a) Bestimmen Sie die Kanalübergangsmatrizen $\boldsymbol{P}_{Y|X}$, $\boldsymbol{P}_{Z|Y}$ und $\boldsymbol{P}_{Z|X}$. *(4 Punkte)*

b) Begründen Sie, ob es sich bei dem Gesamtkanal um einen schwach symmetrischen Kanal handelt. *(2 Punkte)*

Die Auftretenswahrscheinlichkeiten $P_X(x_1)$ und $P_X(x_2)$ werden im Folgenden mit $P_X(x_1) = \sigma$ und $P_X(x_2) = 1 - \sigma$ modelliert.

c) Berechnen Sie die Entropie $H(Z)$ und die bedingte Entropie $H(Z|X)$ in Abhängigkeit von σ. *(5 Punkte)*

d) Berechnen Sie die Kapazität C des Kanals und geben Sie die maximierenden Wahrscheinlichkeiten $P_X(x_1)$ sowie $P_X(x_2)$ an.
Hinweis: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log_2(x) = \frac{\log_2(\mathrm{e})}{x}$. *(8 Punkte)*

Lösung

a) Aus der gegebenen Abbildung können $\boldsymbol{P}_{Y|X}$ und $\boldsymbol{P}_{Z|Y}$ abgelesen werden:

$$\boldsymbol{P}_{Y|X} = \begin{pmatrix} \frac{15}{16} & \frac{5}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{9}{16} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{P}_{Z|Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & \frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

Die Kanalübergangsmatrix $\boldsymbol{P}_{Z|X}$ kann durch $\boldsymbol{P}_{Z|X} = \boldsymbol{P}_{Z|Y} \cdot \boldsymbol{P}_{Y|X}$ berechnet werden:

$$\boldsymbol{P}_{Z|X} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) Der Gesamtkanal ist nicht schwach symmetrisch, da die Spalten der Kanalübergangsmatrix $\boldsymbol{P}_{Z|X}$ keine Permutationen voneinander sind und die Zeilensummen nicht identisch sind.

c) Es ist $\boldsymbol{P}_Z = \boldsymbol{P}_{Z|X} \cdot \begin{pmatrix} \sigma \\ 1-\sigma \end{pmatrix}$, d.h. $P_Z(z_1) = \frac{1+\sigma}{2}$ und $P_Z(z_2) = \frac{1-\sigma}{2}$. Die Entropie $H(Z)$ bestimmt sich zu

$$\begin{aligned} H(Z) &= -\sum_{m=1}^{2} P_Z(z_m)\log_2(P_Z(z_m)) \\ &= -\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)\log_2\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) - \left(\frac{1-\sigma}{2}\right)\log_2\left(\frac{1-\sigma}{2}\right) \end{aligned}$$

Für $H(Z|X)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} H(Z|X) &= -\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{2} P_{X,Z}(x_n, z_m)\log_2\left(P_{Z|X}(z_n|x_m)\right) \\ &= -\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{2} P_{Z|X}(z_m|x_n)P_X(x_n)\log_2\left(P_{Z|X}(z_n|x_m)\right) \\ &= -P_{Z|X}(z_1|x_1)P_X(x_1)\log_2\left(P_{Z|X}(z_1|x_1)\right) \\ &\quad - P_{Z|X}(z_1|x_2)P_X(x_2)\log_2\left(P_{Z|X}(z_1|x_2)\right) \\ &\quad - P_{Z|X}(z_2|x_1)P_X(x_1)\log_2\left(P_{Z|X}(z_2|x_1)\right) \\ &\quad - P_{Z|X}(z_2|x_2)P_X(x_2)\log_2\left((P_{Z|X}z_2|x_2)\right) \\ &= -1\cdot\sigma\log_2(1) - \frac{1-\sigma}{2}\log_2\left(\frac{1}{2}\right) - 0\cdot\sigma\log_2(0) - \frac{1-\sigma}{2}\log_2\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -0 - \frac{1-\sigma}{2}(-1) - 0 - \frac{1-\sigma}{2}(-1) \\ &= 1-\sigma \end{aligned}$$

d) Die Kapazität C des Kanals ist die Maximierung der Transinformation $I(X;Z)$ bezüglich der Auftretenswahrscheinlichkeiten $P_X(x)$ der Einganssymbole, d.h. $C = \max_{P_X(X)} I(X;Z)$. Für den betrachteten Fall ergibt sich $C = \max_\sigma I(X;Z)$.

Die Transinformation berechnet sich zu

$$\begin{aligned} I(X;Z) &= H(Z) - H(Z|X) \\ &= -\left(\frac{1-\sigma}{2}\right)\log_2\left(\frac{1-\sigma}{2}\right) - \left(\frac{1+\sigma}{2}\right)\log_2\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) - (1-\sigma) \\ &= (-1)\cdot\left[\left(\frac{1-\sigma}{2}\right)\log_2\left(\frac{1-\sigma}{2}\right) + \left(\frac{1+\sigma}{2}\right)\log_2\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) + 1-\sigma\right] \end{aligned}$$

Um die Maximierung von $I(X;Z)$ bezüglich σ zu erhalten bilden wir die Ableitung nach σ:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} I(X;Y) &= (-1)\Bigg[\frac{1-\sigma}{2}\cdot\frac{2\log_2(\mathrm{e})}{1-\sigma}\cdot(-1) - \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1-\sigma}{2}\right) \\ &\quad + \frac{1+\sigma}{2}\cdot\frac{2\log_2(\mathrm{e})}{1+\sigma} + \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) - 1\Bigg] \\ &= (-1)\left[-\log_2(\mathrm{e}) + -\log_2(\mathrm{e}) + \frac{1}{2}\left(\log_2\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) - \log_2\left(\frac{1-\sigma}{2}\right)\right) - 1\right] \\ &= -\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right) + 1 \end{aligned}$$

und setzen diese zu null:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right)+1 &\overset{!}{=} 0\\
\frac{1+\sigma}{1-\sigma} &= 2^2\\
1+\sigma &= 4-4\sigma\\
\sigma &= \frac{3}{5}
\end{aligned}
$$

Die Kapazität berechnet sich mit $\sigma = \frac{3}{5}$ zu

$$
C = -\left(\frac{1-\frac{3}{5}}{2}\right)\log_2\left(\frac{1-\frac{3}{5}}{2}\right) - \left(\frac{1+\frac{3}{5}}{2}\right)\log_2\left(\frac{1+\frac{3}{5}}{2}\right) - \left(1-\frac{3}{5}\right) \approx 0{,}322\,.
$$

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Sie untersuchen ein OFDM-System, das für die Übertragung über einen Mehrwegekanal mit maximaler Dauer der Echos $T_\mathrm{H} = 8\,\mu\mathrm{s}$ entworfen wird. Es stehen insgesamt $N = 128$ Unterträger zur Verfügung, wobei $N_\mathrm{b} = 108$ Träger mit Symbolen belegt werden. Die OFDM-Symboldauer ohne Schutzintervall beträgt $T_\mathrm{M} = 50\,\mu\mathrm{s}$ und es wird eine Rechteckpulsformung mit

$$\mathrm{rect}_{T_\mathrm{M}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T_\mathrm{M}}}, & -\frac{T_\mathrm{M}}{2} \leq t \leq \frac{T_\mathrm{M}}{2}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

verwendet.

a) Bestimmen Sie den Unterträgerabstand Δf. *(1 Punkt)*

b) Leiten Sie im Zeitbereich mathematisch her, dass die Unterträger zueinander orthogonal sind. *(3 Punkte)*

c) Geben Sie die minimale Länge L_P des zyklischen Präfixes in Abtastwerten an und erklären Sie, warum das Schutzintervall als zyklisches Präfix ausgelegt wird. *(3 Punkte)*

d) Die minimale Datenrate des Systems soll $R_\mathrm{b} = 10\,\mathrm{Mbit/s}$ betragen, wobei die Länge des zyklischen Präfixes minimal sein soll. Bestimmen Sie ein geeignetes Modulationsverfahren. *(3 Punkte)*

Lösung

a) Der minimale Unterträgerabstand ergibt sich zu:

$$\Delta f = \frac{1}{T_\mathrm{M}} = 20\,\mathrm{kHz}\,.$$

b) Die Orthogonalität zwischen Unterträgern kann über ihr Innenprodukt gezeigt werden. Das Innenprodukt zweier Unterträger i und k ist:

$$\begin{aligned} &\left\langle \mathrm{rect}_{T_\mathrm{M}}(t) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi i \Delta f t},\ \mathrm{rect}_{T_\mathrm{M}}(t) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k \Delta f t} \right\rangle \\ =&\frac{1}{T_\mathrm{M}} \int_{-\frac{T_\mathrm{M}}{2}}^{\frac{T_\mathrm{M}}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi i \Delta f t} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k \Delta f t}\,\mathrm{d}t \\ =&\frac{1}{T_\mathrm{M}} \int_{-\frac{T_\mathrm{M}}{2}}^{\frac{T_\mathrm{M}}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi (i-k) \Delta f t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Für $i = k$ folgt:

$$\frac{1}{T_\mathrm{M}} \int_{-\frac{T_\mathrm{M}}{2}}^{\frac{T_\mathrm{M}}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi \cdot 0 \cdot \Delta f t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T_\mathrm{M}} \int_{-\frac{T_\mathrm{M}}{2}}^{\frac{T_\mathrm{M}}{2}} 1\,\mathrm{d}t = 1$$

Für $i \neq k$ und $\Delta f = \frac{1}{T_\mathrm{M}}$ folgt:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T_\mathrm{M}} \int_{-\frac{T_\mathrm{M}}{2}}^{\frac{T_\mathrm{M}}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(i-k)\Delta f t}\,\mathrm{d}t \\
=&\int_{-\frac{T_\mathrm{M}}{2}}^{\frac{T_\mathrm{M}}{2}} \cos(2\pi(i-k)\Delta f t) + \mathrm{j}\sin(2\pi(i-k)\Delta f)\,\mathrm{d}t \\
=&\left.\frac{\sin(2\pi(i-k)\Delta f t)}{2\pi\Delta f t} - \mathrm{j}\frac{\cos(2\pi(i-k)\Delta f t)}{2\pi\Delta f t}\right|_{-\frac{T_\mathrm{M}}{2}}^{\frac{T_\mathrm{M}}{2}} \\
=&\frac{1}{2\pi\Delta f t}\left[+\sin\left(2\pi(i-k)\Delta f\frac{T_\mathrm{M}}{2}\right) - \mathrm{j}\cos\left(2\pi(i-k)\Delta f\frac{T_\mathrm{M}}{2}\right)\right. \\
&\left. -\sin\left(-2\pi(i-k)\Delta f\frac{T_\mathrm{M}}{2}\right) + \mathrm{j}\cos\left(-2\pi(i-k)\Delta f\frac{T_\mathrm{M}}{2}\right)\right] \\
=&\frac{\sin\left(2\pi(i-k)\frac{1}{T_\mathrm{M}}\frac{T_\mathrm{M}}{2}\right)}{2\pi\Delta f t} \\
=&\frac{\sin\left(\pi(i-k)\right)}{2\pi\Delta f t} = 0
\end{aligned}$$

Somit ist:

$$\left\langle \mathrm{rect}_{T_\mathrm{M}}(t)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi i\Delta f t},\ \mathrm{rect}_{T_\mathrm{M}}(t)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k\Delta f t}\right\rangle = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

c) Um Intersymbolinterferenz zu vermeiden muss die Dauer T_P des zyklischen Präfix $T_\mathrm{P} \geq T_\mathrm{H}$ sein:

$$\begin{aligned}
T_\mathrm{P} &\geq T_\mathrm{H} \\
L_\mathrm{P} T &\geq T_\mathrm{H} \\
L_\mathrm{P} &\geq \frac{T_\mathrm{H}}{T} \\
L_\mathrm{P} &\geq T_\mathrm{H}\frac{N}{T_\mathrm{M}} \\
L_\mathrm{P} &\geq 8\,\mathrm{\mu s}\cdot\frac{128}{50\,\mathrm{\mu s}} = 20{,}48
\end{aligned}$$

Die minimale Länge des Präfixes beträgt $\lceil 20{,}48 \rceil = 21$ Abtastwerte.

Wird ein OFDM-Symbol ohne zyklisches Präfix über einen Kanal übertragen, so kommt es zu einer *linearen Faltung* des OFDM-Symbols mit der Kanalimpulsantwort. Um den Kanaleinfluss auf jedem Unterträger als *flach* annehmen zu können und somit die Entzerrung im OFDM-Empfänger als einfache *komplexe Multiplikation* durchführen zu können, muss das OFDM-Symbol mit der Kanalimpulsatnwort *zyklisch* gefaltet werden. Durch das zyklische Präfix wird das OFDM-Symbol so modifiziert, dass das empfangene OFDM-Symbol aussieht wie nach einer *zyklischen Faltung*.

d) Die Dauer des Schutzintervalls beträgt $T_\mathrm{P} = L_\mathrm{P} T$. Ein Modulationsverfahren der Ordnung M fasst $\log_2(M)$ Bit zu einem Symbol zusammen. Mit der Randbedingung der minimalen Datenrate des Systems ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\log_2(M)\cdot R_\mathrm{Sym} &\geq R_\mathrm{b} \\
\log_2(M)\cdot\frac{N_\mathrm{b}}{T_\mathrm{M}+T_\mathrm{P}} &\geq R_\mathrm{b} \\
M &\geq 2^{R_\mathrm{b}\frac{T_\mathrm{M}+L_\mathrm{P}T}{N_\mathrm{b}}} = 2^{5{,}39}.
\end{aligned}$$

Da die Modulationsordnung M eine Zweierpotenz sein sollte, wählen wir $M = 2^{\lceil 5{,}39 \rceil} = 64$. Ein geeignetes Modulationsverfahren wäre z.B. 64-QAM.

Aufgabe 9 (12 Punkte)

Der Sender eines 3×3 MIMO-Systems hat Kanalkenntnis und soll zur optimalen Nutzung des Kanals Waterfilling verwenden. Durch Vorverarbeitung kann das MIMO-System als 3 parallele Kanäle aufgefasst werden. Die mittleren Rauschleistungen der parallelen AWGN-Kanäle betragen $\sigma^2_{\mathrm{n},1} = 0{,}6\,\mathrm{mW}$, $\sigma^2_{\mathrm{n},2} = 1{,}3\,\mathrm{mW}$ und $\sigma^2_{\mathrm{n},3} = 0{,}9\,\mathrm{mW}$, die insgesamt zur Verfügung stehende Sendeleistung beträgt $P_\mathrm{s} = 2\,\mathrm{mW}$.

a) Berechnen Sie die optimalen Sendeleistungen P_1, P_2 und P_3. *(4 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von der vorhergehenden Teilaufgabe bearbeitet werden.

Für ein 3×3 MIMO-System ergeben Messungen folgende Kanalmatrix:

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ 0 & +2 & -2 \\ +1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

Im Folgenden besitzt *nur der Empfänger* Kanalkenntnis.

b) Handelt es sich um einen frequenzflachen oder frequenzselektiven Kanal? Begründen Sie kurz. *(2 Punkte)*

c) Können Sie für das gegebene Szenario durch eine Singulärwertzerlegung sowie geeigneter Prozessierung in Sender und Empfänger den Kanal $\boldsymbol{H}$ in parallele Kanäle unterteilen? Begründen Sie Ihre Antwort. *(2 Punkte)*

Bei der Übertragung wird nun V-BLAST eingesetzt und additives Rausches kann vernachlässigt werden. Sie empfangen den Vektor

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} +\mathrm{j} \\ -4 \\ +2+\mathrm{j} \end{pmatrix} .$$

d) Bestimmen Sie den Sendevektor $\hat{\boldsymbol{s}}$ mit Hilfe eines linearen Detektors. Begründen Sie Ihre Wahl. *(4 Punkte)*

Lösung

a) Für Waterfilling eines $N \times N$ MIMO-Systems wird die zur Verfügung stehende Sendeleistung auf N Kanäle verteilt:

$$P_i = \begin{cases} P_\mathrm{max} - \sigma^2_{\mathrm{n},i}, & \sigma^2_{\mathrm{n},i} < P_\mathrm{max} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \qquad i = 1, \dots, N$$

Das Optimierungsproblem unterliegt der Beschränkung der Sendeleistung $P_\mathrm{s} \overset{!}{=} \sum_{i=1}^{N} P_i$. Aus den Gleichungen folgt ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_\mathrm{max} - \sigma^2_{\mathrm{n},1} \\ P_2 &= P_\mathrm{max} - \sigma^2_{\mathrm{n},2} \\ P_3 &= P_\mathrm{max} - \sigma^2_{\mathrm{n},3} \\ P_1 + P_2 + P_3 &= P_\mathrm{s} \end{aligned}$$

Die ersten drei Gleichungen in die Vierte einsetzen ergibt

$$
\begin{aligned}
3P_{\max} - \sum_{i=1}^{3} \sigma_{\mathrm{n},i}^2 &= P_\mathrm{s} \\
\Rightarrow P_{\max} &= \left(P_\mathrm{s} + \sum_{i=1}^{3} \sigma_{\mathrm{n},i}^2 \right) \cdot \frac{1}{3} \\
&= (2\,\mathrm{mW} + 2{,}8\,\mathrm{mW}) \cdot \frac{1}{3} = 1{,}6\,\mathrm{mW}\,.
\end{aligned}
$$

Für die einzelnen Sendeleistungen ergibt sich

$$
P_1 = 1{,}0\,\mathrm{mW} \qquad P_2 = 0{,}3\,\mathrm{mW} \qquad P_1 = 0{,}7\,\mathrm{mW}\,.
$$

b) Da $\boldsymbol{H} \in \mathbb{R}^{N_\mathrm{R} \times N_\mathrm{T}}$ kann jeder Kanal von Antenne zu Antenne durch einen komplexen Faktor ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) beschrieben werden. Somit kann der Kanal als *frequenzflach* angenommen werden.

c) Nein, dies ist nicht möglich, da der Sender keine Kanalkenntnis besitzt, da nur CSI-R vorliegt. Der Sender kann somit die, für die Singulärwertzerlegung notwendige, Vorverarbeitung des Sendevektors nicht durchführen.

d) Lineare Detektoren $\boldsymbol{L}$ schätzen die Sendesequenz durch $\hat{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{r}$. Da die Übertragung rauschfrei ist sind der ZF und MMSE-Detektor äquivalent. Weiterhin ist $\det(\boldsymbol{H}) = -4$, somit ist $\boldsymbol{H}$ invertierbar. Mit Hilfe des, z.B. Gauß-Jordan Algorithmus, ergibt sich:

$$
\boldsymbol{L} = \boldsymbol{H}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & +1 & +2 \\ +1 & 0 & -1 \\ +1 & -1 & -1 \end{pmatrix}
$$

Der Sendevektor schätzt sich zu:

$$
\hat{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{r} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & +1 & +2 \\ +1 & 0 & -1 \\ +1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +\mathrm{j} \\ -4 \\ +2 + \mathrm{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\mathrm{j} \\ -1 \\ +1 \end{pmatrix}
$$

Formelsammlung und Tabellen/*Formulary and Tables*

A Tabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	0,80	0,788145	1,60	0,945201	2,40	0,991802	3,20	0,999313
0,02	0,507978	0,82	0,793892	1,62	0,947384	2,42	0,992240	3,22	0,999359
0,04	0,515953	0,84	0,799546	1,64	0,949497	2,44	0,992656	3,24	0,999402
0,06	0,523922	0,86	0,805105	1,66	0,951543	2,46	0,993053	3,26	0,999443
0,08	0,531881	0,88	0,810570	1,68	0,953521	2,48	0,993431	3,28	0,999481
0,10	0,539828	0,90	0,815940	1,70	0,955435	2,50	0,993790	3,30	0,999517
0,12	0,547758	0,92	0,821214	1,72	0,957284	2,52	0,994132	3,32	0,999550
0,14	0,555670	0,94	0,826391	1,74	0,959070	2,54	0,994457	3,34	0,999581
0,16	0,563559	0,96	0,831472	1,76	0,960796	2,56	0,994766	3,36	0,999610
0,18	0,571424	0,98	0,836457	1,78	0,962462	2,58	0,995060	3,38	0,999638
0,20	0,579260	1,00	0,841345	1,80	0,964070	2,60	0,995339	3,40	0,999663
0,22	0,587064	1,02	0,846136	1,82	0,965621	2,62	0,995604	3,42	0,999687
0,24	0,594835	1,04	0,850830	1,84	0,967116	2,64	0,995855	3,44	0,999709
0,26	0,602568	1,06	0,855428	1,86	0,968557	2,66	0,996093	3,46	0,999730
0,28	0,610261	1,08	0,859929	1,88	0,969946	2,68	0,996319	3,48	0,999749
0,30	0,617911	1,10	0,864334	1,90	0,971283	2,70	0,996533	3,50	0,999767
0,32	0,625516	1,12	0,868643	1,92	0,972571	2,72	0,996736	3,52	0,999784
0,34	0,633072	1,14	0,872857	1,94	0,973810	2,74	0,996928	3,54	0,999800
0,36	0,640576	1,16	0,876976	1,96	0,975002	2,76	0,997110	3,56	0,999815
0,38	0,648027	1,18	0,881000	1,98	0,976148	2,78	0,997282	3,58	0,999828
0,40	0,655422	1,20	0,884930	2,00	0,977250	2,80	0,997445	3,60	0,999841
0,42	0,662757	1,22	0,888768	2,02	0,978308	2,82	0,997599	3,62	0,999853
0,44	0,670031	1,24	0,892512	2,04	0,979325	2,84	0,997744	3,64	0,999864
0,46	0,677242	1,26	0,896165	2,06	0,980301	2,86	0,997882	3,66	0,999874
0,48	0,684386	1,28	0,899727	2,08	0,981237	2,88	0,998012	3,68	0,999883
0,50	0,691463	1,30	0,903200	2,10	0,982136	2,90	0,998134	3,70	0,999892
0,52	0,698468	1,32	0,906582	2,12	0,982997	2,92	0,998250	3,72	0,999900
0,54	0,705401	1,34	0,909877	2,14	0,983823	2,94	0,998359	3,74	0,999908
0,56	0,712260	1,36	0,913085	2,16	0,984614	2,96	0,998462	3,76	0,999915
0,58	0,719043	1,38	0,916207	2,18	0,985371	2,98	0,998559	3,78	0,999922
0,60	0,725747	1,40	0,919243	2,20	0,986097	3,00	0,998650	3,80	0,999928
0,62	0,732371	1,42	0,922196	2,22	0,986791	3,02	0,998736	3,82	0,999933
0,64	0,738914	1,44	0,925066	2,24	0,987455	3,04	0,998817	3,84	0,999938
0,66	0,745373	1,46	0,927855	2,26	0,988089	3,06	0,998893	3,86	0,999943
0,68	0,751748	1,48	0,930563	2,28	0,988696	3,08	0,998965	3,88	0,999948
0,70	0,758036	1,50	0,933193	2,30	0,989276	3,10	0,999032	3,90	0,999952
0,72	0,764238	1,52	0,935745	2,32	0,989830	3,12	0,999096	3,92	0,999956
0,74	0,770350	1,54	0,938220	2,34	0,990358	3,14	0,999155	3,94	0,999959
0,76	0,776373	1,56	0,940620	2,36	0,990862	3,16	0,999211	3,96	0,999963
0,78	0,782305	1,58	0,942947	2,38	0,991344	3,18	0,999264	3,98	0,999966

B Folgen und Reihen/*Sequences and Series*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}, \qquad |x| < 1 \quad \text{(B.1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad |x| < 1 \quad \text{(B.2)}$$

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}, \qquad x \neq 1 \quad \text{(B.3)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \cdots = (1+x)^r, \qquad \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \quad \text{(B.4)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots = \mathrm{e}^x, \qquad x \in \mathbb{R} \quad \text{(B.5)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \cdots = \ln(x), \qquad 0 < x \leq 2 \quad \text{(B.6)}$$

$$\sum_{n=1}^{k} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}, \qquad k \geq 1 \quad \text{(B.7)}$$

C Integralrechnung/*Integrals*

$$\int \delta(x - x_0)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \varphi(x_0), \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{(C.1)}$$

$$\int x\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2}(ax - 1) \quad \text{(C.2)}$$

$$\int x^2\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2) \quad \text{(C.3)}$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{(C.4)}$$

$$\int \mathrm{e}^{ax} \sin(bx)\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2 + b^2}\Big(a \sin(bx) - b \cos(bx)\Big) \quad \text{(C.5)}$$

$$\int \sin(ax) \cos(ax)\, \mathrm{d}x = -\frac{\cos^2(ax)}{2a}, \qquad a \neq 0 \quad \text{(C.6)}$$

$$\int_0^{\infty} x^n\, \mathrm{e}^{-ax}\, \mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}}, \qquad a > 0, n \in \mathbb{N} \quad \text{(C.7)}$$

$$\int_0^{\infty} x^2\, \mathrm{e}^{-ax^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \qquad \text{für } a > 0 \quad \text{(C.8)}$$

D Formeln zur Fouriertransformation/*Fourier Transformation*

Definition

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t}\, \mathrm{d}f \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\, \mathrm{d}t = X(f) \quad \text{(D.1)}$$

Eigenschaften/*Properties*

$$\sum c_i x_i(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \sum c_i X_i(f) \tag{D.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad (\mathrm{j}2\pi f)^n \; X(f) \tag{D.3}$$

$$x(t-t_0) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_0} \, X(f) \tag{D.4}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t} \, x(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f-f_0) \tag{D.5}$$

$$x(t) * y(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f)Y(f) \tag{D.6}$$

$$x(t)y(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f) * Y(f) \tag{D.7}$$

$$x(t/a) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad |a|X(af) \tag{D.8}$$

Korrespondenzen/*Transform Pairs*

$$1 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \delta(f) \tag{D.9}$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2}\delta(f+f_0) + \frac{1}{2}\delta(f-f_0) \tag{D.10}$$

$$F \cdot \mathrm{sinc}(Ft) = \frac{\sin(\pi F t)}{\pi t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f) = \begin{cases} 1, & |f| < \frac{F}{2} \\ 0, & |f| > \frac{F}{2} \end{cases} \tag{D.11}$$

$$\mathrm{e}^{-\pi t^2} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{e}^{-\pi f^2} \tag{D.12}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad T \cdot \mathrm{sinc}(Tt) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} \tag{D.13}$$

$$\frac{1}{2}\delta(t+t_0) + \frac{1}{2}\delta(t-t_0) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \cos(2\pi f t_0) \tag{D.14}$$

$$\delta(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 1 \tag{D.15}$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\mathrm{j}}{2}\delta(f+f_0) - \frac{\mathrm{j}}{2}\delta(f-f_0) \tag{D.16}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{\mathrm{j}2\pi f} \tag{D.17}$$

$$\mathrm{e}^{-a|t|}, \quad a > 0 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} \tag{D.18}$$

$$x(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad a > 0 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{a + \mathrm{j}2\pi f} \tag{D.19}$$

$$x(t) = \begin{cases} t\mathrm{e}^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad a > 0 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{(a + \mathrm{j}2\pi f)^2} \tag{D.20}$$

$$\frac{1}{\pi t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -\,\mathrm{j}\;\mathrm{sign}(f) \tag{D.21}$$

$$\mathrm{j}\;\mathrm{sign}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{\pi f} \tag{D.22}$$

$$\mathcal{H}\{x(t)\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\lambda)}{t-\lambda}\,\mathrm{d}\lambda \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -\,\mathrm{j}\;\mathrm{sign}(f)X(f) \tag{D.23}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) \tag{D.24}$$

E Trigonometrie/ ***Trigonometry***

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \tag{E.1}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \tag{E.2}$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\Big) \tag{E.3}$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big) \tag{E.4}$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\Big) \tag{E.5}$$