Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Nachrichtentechnik
Prof. Dr.-Ing. Laurent Schmalen
Prof. Dr.-Ing. Peter Rost

Schriftliche Prüfung zur Vorlesung

Nachrichtentechnik I

11.03.2024

Musterlösung

Hinweise

Die Prüfungsdauer beträgt **drei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **neun** Aufgaben zu bearbeiten.
Benutzen Sie nur die zur Verfügung gestellten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an.
Verwenden Sie zur Bearbeitung einen **dokumentenechten Stift** und keine rote Farbe. Schreiben Sie leserlich und vermeiden Sie, das vorgedruckte Doppelblatt zu beschriften. Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der **Lösungsweg und die gültige Lösung eindeutig erkennbar** sein, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann.
Abzugeben sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten und **nach Aufgabennummer sortierten Ausarbeitungen**. Nicht abzugeben sind die Aufgabenblätter, Ihre Formelsammlung sowie Ihr Konzeptpapier.

Zugelassene Hilfsmittel

Erlaubt sind **ein** beidseitig von eigener Hand mit Bleistift, Kugelschreiber, Füller o. Ä. beschriebenes **A4-Blatt** (Original, keine Kopie) sowie ein **nicht-programmierbarer** Taschenrechner.

Nach der Prüfung

Das **Ergebnis** Ihrer Prüfung erfahren Sie spätestens ab dem **11.04.2024** im Online-Notensystem. Details zur **Klausureinsicht** finden Sie auf Ilias. Dort werden Sie auch Informationen zur **mündlichen Nachprüfung** finden.

Geben Sie diese Aufgaben nicht mit ab, sondern behalten Sie diese als Erinnerung für oben gegebene Termine.

Aufgabe 1 (17 Punkte)

Gegeben ist die Zeichenfolge Z mit

$$Z = „\text{t x s x t s x t s x s x t x t x}" \quad .$$

a) Codieren sie Z mittels des LZ77-Algorithmus. *(3 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von der vorhergehenden Teilaufgabe bearbeitet werden.

Nun soll Z Huffman-codiert werden.

b) Schätzen Sie die Auftretenswahrscheinlichkeiten und den Informationsgehalt der Zeichen „s", „t" und „x". *(2 Punkte)*

c) Bestimmen Sie eine Huffman-Codierung von Z und geben Sie die Codewörter an. *(2 Punkte)*

d) Berechnen Sie die Redundanz des Codes. *(3 Punkte)*

Anstelle der Codierung eines einzelnen Zeichens gruppieren Sie nun immer Paare je zwei Zeichen zu einem neuen Symbol.

e) Erstellen Sie eine Huffman-Codierung der gruppierten Zeichenfolge. Geben Sie die Codewörter sowie die mittlere Codewortlänge an. *(4 Punkte)*

Nun soll eine Zeichenfolge Y der Länge $N = 1000$ mit Ihren beiden, zuvor bestimmten Huffman-Codierungen codiert werden. Sie können davon ausgehen, dass in Y nur dieselben Paare wie in Z auftreten und Y sowohl für den ungruppierten als auch gruppierten Fall dieselbe Statistik wie Z aufweist.

f) Geben Sie die zu erwartende Anzahl an Bits L_Y an, wenn die Zeichenfolge Y ohne Gruppierung codiert wird. Geben Sie weiterhin die zu erwartende Anzahl an Bits $L_{Y,\mathrm{G}}$ an, wenn Y zuvor gruppiert wird. Welche Methode würden sie zur Codierung von Y bevorzugen? *(3 Punkte)*

Lösung

a) Die Codierung ergibt sich zu:

	t x s x t s x t s x s x t x t x	s_1=[0,0, „t"]
t	x s x t s x t s x s x t x t x	s_2=[0,0, „x"]
t x	s x t s x t s x s x t x t x	s_3=[0,0, „s"]
t x s	**x** t s x t s x s x t x t x	s_4=[2,1, „t"]
t x s x t	**s x t s x** s x t x t x	s_5=[3,5, „s"]
t x s x t s x t s x s	**x t** x t x	s_6=[5,2, „x"]
t x s x t s x t s x s x t x	**t x**	s_7=[2,2, „EOF"]

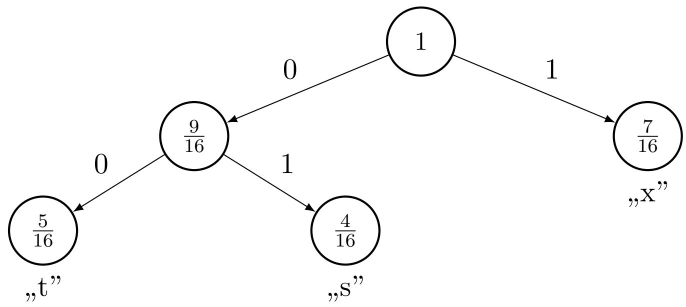
Alternativ wäre auch s_6=[8,2, „x"] und s_7=[14,2, „EOF"] möglich.

b) Die gegebene Zeichenfolge kann durch eine Quelle mit dem Alphabet $\mathcal{X} = \{ „\text{t}", „\text{x}", „\text{s}"\}$ erzeugt werden.
Die Auftretenswahrscheinlichkeiten $P_X(x_i)$ sowie die Information $i(x_i) = -\log_2(P_X(x_i))$ der Symbole X ergeben sich zu:

$$P_X(„t") = \tfrac{5}{16} \qquad P_X(„x") = \tfrac{7}{16} \qquad P_X(„s") = \tfrac{1}{4}$$

$$i(„t") \approx 1{,}678\,\text{Bit} \qquad i(„x") \approx 1{,}193\,\text{Bit} \qquad i(„s") = 2\,\text{Bit}$$

c) Eine mögliche Lösung ist durch folgende Baumdarstellung gegeben:



Die dem Baum entsprechende Codewortzuordnung ist:

„t"	„x"	„s"
00	1	01

Hinweis: Da der Huffman-Code nicht eindeutig ist, ist dies nur eine mögliche Lösung.

d) Die Redundanz eines Codes wird durch $R_c = L_c - H(X)$ berechnet. Die mittlere Codewortlänge L_c berechnet sich zu:

$$L_c = \sum_{i=1}^{3} P(x_i)L(x_i) = \frac{4}{16} \cdot 2 + \frac{5}{16} \cdot 2 + \frac{7}{16} \cdot 1 = \frac{25}{16} \approx 1{,}563\,\frac{\text{Bit}}{\text{Zeichen}}$$

Die Entropie der Quelle berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} H(X) &= -\sum_{i=1}^{3} P_X(x_i) \cdot \log_2\left(P_X(x_i)\right) \\ &= -\frac{4}{16}\log_2\left(\frac{4}{16}\right) - \frac{5}{16}\log_2\left(\frac{5}{16}\right) - \frac{7}{16}\log_2\left(\frac{7}{16}\right) \approx 1{,}546\,\frac{\text{Bit}}{\text{Zeichen}} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Redundanz zu:

$$R_c = \frac{25}{16}\,\frac{\text{Bit}}{\text{Zeichen}} - H(X) = 0{,}016\,\frac{\text{Bit}}{\text{Zeichen}}$$

Alternativ: Wird L_c und $H(X)$ gerundet, so ergibt sich:

$$R_c = 1{,}563\,\frac{\text{Bit}}{\text{Zeichen}} - 1{,}546\,\frac{\text{Bit}}{\text{Zeichen}} = 0{,}017\,\frac{\text{Bit}}{\text{Zeichen}}$$

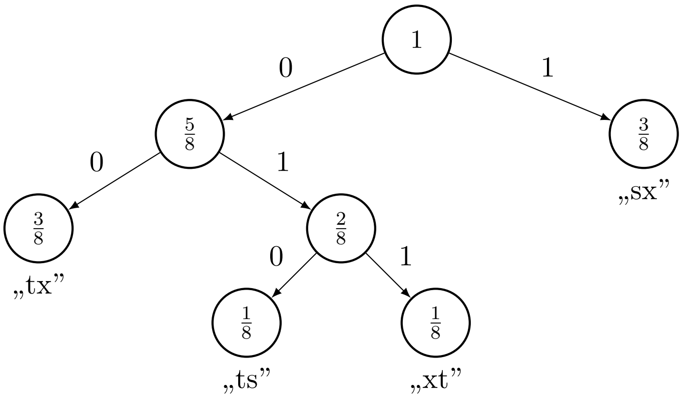
e) Fasst man immer zwei Symbole zu einem neuen Symbol zusammen, so ergibt sich der Text zu:

Z = „tx sx ts xt sx sx tx tx"

Die gruppierte Zeichenfolge kann durch eine Quelle $\mathcal{X}_G$ ={„tx", „sx", „ts", „xt"} erzeugt werden. Die Auftretenswahrscheinlichkeiten ergeben sich zu:

$$P_{X,G}(„tx") = \frac{3}{8} \qquad P_{X,G}(„sx") = \frac{3}{8} \qquad P_{X,G}(„ts") = \frac{1}{8} \qquad P_{X,G}(„xt") = \frac{1}{8}$$

Eine mögliche Huffman-Codierung ist:



Die dazugehörigen Codewörter sind:

„tx"	„ts"	„xt"	„sx"
00	010	011	1

Für den gruppierten Text bestimmt sich die mittlere Codewortlänge $L_{\mathrm{c,G}}$ zu:

$$L_{\mathrm{c,G}} = \sum_{i=1}^{4} P_{X,\mathrm{G}}(x_i)L(x_i) = \frac{3}{8}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 3 + \frac{1}{8}\cdot 3 + \frac{3}{8}\cdot 1 = \frac{15}{8} = 1{,}875\,\frac{\mathrm{Bit}}{\mathrm{Zeichen}}$$

f) Über die mittlere Codewortlänge lässt sich die zu erwartende Anzahl an Bits L_Y bestimmen. Für den ungruppierten Text gilt:

$$L_Y = N \cdot L_{\mathrm{c}} = 1000\,\mathrm{Zeichen} \cdot 1{,}563\,\frac{\mathrm{Bit}}{\mathrm{Zeichen}} = 1563\,\mathrm{Bits}$$

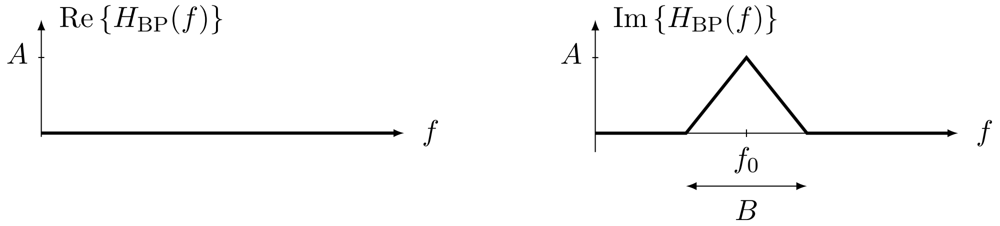
Da bei der gruppierten Codierung der Zeichenfolge immer zwei Zeichen ein zu codierendes Symbol bilden, müssen nur $\frac{N}{2}$ Symbole codiert werden. Somit gilt für den gruppierten Text:

$$L_{Y,\mathrm{G}} = \frac{N}{2} \cdot L_{\mathrm{c,G}} = 500\,\mathrm{Zeichen} \cdot 1{,}875\,\frac{\mathrm{Bit}}{\mathrm{Zeichen}} = 937{,}5\,\mathrm{Bits}$$

Die gruppierte Übertragung ist zu bevorzugen, da insgesamt weniger Bits benötigt werden.

Aufgabe 2 (19 Punkte)

Für $f > 0$ ist der Frequenzgang $H_{\mathrm{BP}}(f)$ eines Bandpassfilters gegeben, wobei $A, B \in \mathbb{R}$:



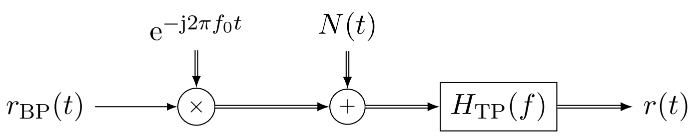
a) Geben Sie den mathematischen Zusammenhang zwischen dem Frequenzgang $H_{\mathrm{BP}}(f)$ und seiner Impulsantwort $h_{\mathrm{BP}}(t)$ an. *(1 Punkt)*

b) Skizzieren Sie den Frequenzgang $H_{\mathrm{BP}}(f)$ für $f < 0$, sodass die Impulsantwort $h_{\mathrm{BP}}(t)$ des Bandpassfilters reellwertig wird. *(3 Punkte)*

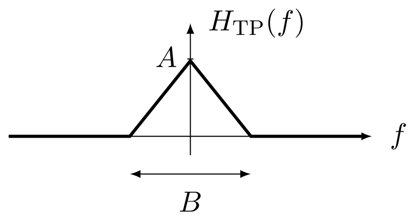
c) Bestimmen Sie die akausale, reellwertige Impulsantwort $h_{\mathrm{BP}}(t)$ des Systems in Abhängigkeit von f_0 und B. *(7 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

Gegeben ist folgendes System:



Hierbei ist $N(t) = N_{\mathrm{I}}(t) + \mathrm{j}N_{\mathrm{Q}}(t)$, $N(t) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2)$, komplexes additives weißes gaußsches Rauschen. Der Frequenzgang $H_{\mathrm{TP}}(f)$ des Tiefpassfilters ist durch das folgende Schaubild gegeben, wobei $A, B \in \mathbb{R}$.



Ein Empfangssignal

$$r_{\mathrm{BP}}(t) = C \cdot \cos(2\pi f_0 t), \quad C \in \mathbb{R},$$

wird durch das System verarbeitet, wobei $f_0 \gg B$.

d) Bestimmen Sie das SNR am Ausgang des Systems. *(8 Punkte)*

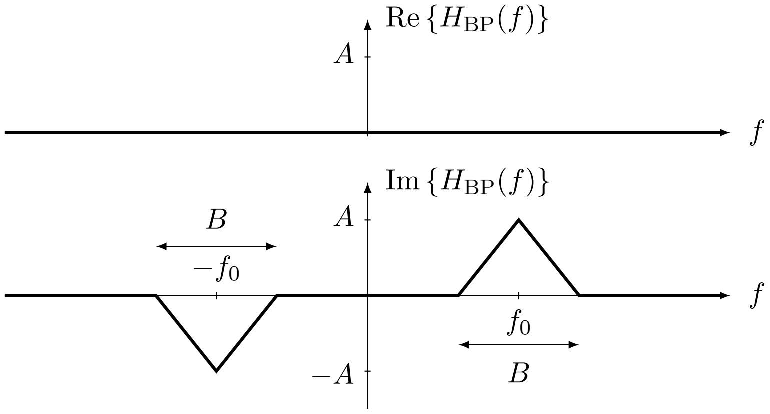
Lösung

a) Es gilt $H_{\mathrm{BP}}(f) = \mathcal{F}\{h_{\mathrm{BP}}(t)\}$, wobei $\mathcal{F}\{\cdot\}$ der Fouriertransformation entspricht.

b) Damit $h_{\mathrm{BP}}(t) \in \mathbb{R}$, muss für die Übertragungsfunktion $H_{\mathrm{BP}}(f)$ gelten:

$$\begin{aligned} H^*_{\mathrm{BP}}(f) &= H_{\mathrm{BP}}(-f) \\ \mathrm{Re}\{H_{\mathrm{BP}}(f)\} &= \mathrm{Re}\{H_{\mathrm{BP}}(-f)\} \\ \mathrm{Im}\{H_{\mathrm{BP}}(f)\} &= -\mathrm{Im}\{H_{\mathrm{BP}}(-f)\} \end{aligned}$$

Das entsprechende Spektrum ergibt sich wie folgt:



c) Die Übertragungsfunktion entspricht einer Dreiecksfunktion der Höhe $2A$ und Breite B gefaltet mit zwei imaginären Dirac-Impulsen der Höhe $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{BP}}(f) &= \mathrm{j}A \cdot \mathrm{tri}_B(f - f_0) - \mathrm{j}A \cdot \mathrm{tri}_B(f + f_0) \\ &= 2A \cdot \mathrm{tri}_B(f) * \left(\frac{\mathrm{j}}{2}\delta\left(f - f_0\right) - \frac{\mathrm{j}}{2}\delta\left(f + f_0\right)\right). \end{aligned}$$

Die Dreiecksfunktion kann als Faltung zweier Rechteckfunktionen der Breite $\frac{B}{2}$ und Höhe $\sqrt{\frac{2}{B}}$ ausgedrückt werden:

$$H_{\mathrm{BP}}(f) = 2A \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{B}} \cdot \mathrm{rect}_{\frac{B}{2}}(f) * \sqrt{\frac{2}{B}} \cdot \mathrm{rect}_{\frac{B}{2}}(f)\right) * \left(\frac{\mathrm{j}}{2}\delta\left(f - f_0\right) - \frac{\mathrm{j}}{2}\delta\left(f + f_0\right)\right).$$

Die Faltungen im Frequenzbereich entsprechen jeweils Produkten im Zeitbereich. Mit den Korrespondenzen (D.12) und (D.17) aus der Formelsammlung folgt

$$\begin{aligned} h_{\mathrm{BP}}(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{H_{\mathrm{BP}}(f)\} \\ &= 2A \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{B}} \cdot \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathrm{rect}_{\frac{B}{2}}(f)\right\}\right)^2 \cdot (-1) \cdot \mathcal{F}^{-1}\left\{\left(\frac{\mathrm{j}}{2}\delta\left(f + f_0\right) - \frac{\mathrm{j}}{2}\delta\left(f - f_0\right)\right)\right\} \\ &= -2A \cdot \left(\frac{2}{B}\frac{B^2}{4}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{B}{2}t\right)\right) \cdot \sin\left(2\pi f_0 t\right) \\ &= -AB \cdot \left(\mathrm{sinc}^2\left(\frac{B}{2}t\right)\right) \cdot \sin\left(2\pi f_0 t\right). \end{aligned}$$

d) Gesucht ist SNR$=\frac{P_r}{P_{\tilde{N}}}$, wobei P_r die Signalleistung und $P_{\tilde{N}}$ die Rauschleistung am Ausgang des Tiefpassfilters sind. Das Spektrum $R_{\mathrm{BP}}(f)$ ist durch

$$R_{\mathrm{BP}}(f)=\frac{C}{2}\left(\delta(f-f_0)+\delta\left(f+f_0\right)\right)$$

gegeben. Der Einfluss des Mischers auf das Spektrum ergibt sich durch den Verschiebungssatz der Fouriertransformation (D.5) zu:

$$Y(f)=R_{\mathrm{BP}}(f+f_0)=\frac{C}{2}\left(\delta(f)+\delta(f+2f_0)\right)\,,$$

wobei $y(t)$ das Signal am Ausgang des Mischers sei. Da $f_0 \gg B$ wird der Frequenzanteil bei $f=-2f_0$ durch das Tiefpassfilter entfernt. Der Ausgang des Tiefpassfilters ergibt sich zu $r(t)=y(t)*h_{\mathrm{TP}}(t)$ bzw. $R(f)=Y(f)\cdot H_{\mathrm{TP}}(f)$. Es ist

$$\begin{aligned}R(f)&=\left(\frac{C}{2}\left(\delta(f)+\delta(f+2f_0)\right)\right)\cdot A\cdot \mathrm{tri}_B(f)\\&=\frac{AC}{2}\delta(f)\end{aligned}$$

bzw. $r(t)=\frac{AC}{2}$, da $H_{\mathrm{TP}}(f=0)=A$. Die Signalamplitude und somit auch die Signalleistung P_r sind zeitinvariant und es ist

$$P_r=\left|\frac{CA}{2}\right|^2=\frac{C^2A^2}{4}\,.$$

Zur Bestimmung der Rauschleistung $P_{\tilde{N}}$ muss die Rauschleistungsdichte $\Phi_{\tilde{N}\tilde{N}}(f)$ am Ausgang des Tiefpassfilters über f integriert werden. Diese kann anhand des Leistungsdichtespektrums $\Phi_{NN}(f)=\sigma^2$ des Rauschens und der Übertragungsfunktion $H_{\mathrm{TP}}(f)$ bestimmt werden:

$$\Phi_{\tilde{N}\tilde{N}}(f)=\left|H_{\mathrm{TP}}(f)\right|^2\Phi_{NN}(f)=\left|H_{\mathrm{TP}}(f)\right|^2\sigma^2\,,$$

$$\begin{aligned}H_{\mathrm{TP}}(f)&=\begin{cases}A-\frac{2A}{B}\left|f\right|, & \text{für } |f|<\frac{B}{2}\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}\,,\\ \left|H_{\mathrm{TP}}(f)\right|^2&=\begin{cases}\left(A-\frac{2A}{B}\left|f\right|\right)^2, & \text{für } |f|<\frac{B}{2}\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}\,.\end{aligned}$$

Die Rauschleistung $P_{\tilde{N}}$ am Ausgang des Systems entspricht somit

$$P_{\tilde{N}}=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{\tilde{N}\tilde{N}}(f)\,\mathrm{d}f=\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}\left|H_{\mathrm{TP}}(f)\right|^2\,\mathrm{d}f\,.$$

Aufgrund der Symmetrie genügt es, das Integral nur für $f>0$ zu berechnen:

$$\begin{aligned}P_{\tilde{N}}&=\sigma^2\cdot 2\int_0^{\frac{B}{2}}\left[A^2-\frac{4A^2}{B}f+\frac{4A^2}{B^2}f^2\right]\,\mathrm{d}f\\&=2\sigma^2\cdot A^2\left[f-\frac{2}{B}f^2+\frac{4}{3B^2}f^3\right]_0^{\frac{B}{2}}\\&=2\sigma^2\cdot A^2\left(\frac{B}{2}-\frac{B}{2}+\frac{B}{6}\right)\\&=\frac{A^2B}{3}\sigma^2\,.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für das SNR am Ausgang des Systems:

$$\mathrm{SNR} = \frac{P_r}{P_{\tilde{N}}} = \frac{C^2 A^2}{4} \cdot \frac{3}{A^2 B \sigma^2} = \frac{3C^2}{4B\sigma^2}$$

Aufgabe 3 (16 Punkte)

Bei einer Übertragung über eine Glasfaserleitung ist die Menge der Modulationssymbole durch $\mathcal{M} = \{A, 2A, 3A, 4A, 5A, 6A, 7A, 8A : \; A \in \mathbb{R}, A > 0\}$ gegeben, wobei die Symbole gleichverteilt auftreten. Als Pulsformungsfilter wird eine Rechteckpulsformung $g(t) = \mathrm{rect}_T(t - \gamma_0 T)$, $\gamma_0 \in \mathbb{N}$, genutzt, wobei T die Symboldauer des Systems darstellt.

a) Skizzieren Sie das Konstellationsdiagramm des gegebenen Modulationsformates in der komplexen Ebene. Achten Sie auf eine vollständige Achsenbeschriftung. *(2 Punkte)*

b) Weisen Sie den Modulationssymbolen Bitmuster zu, sodass eine Gray-Codierung vorliegt. Nutzen Sie hierzu Ihre Skizze aus Aufgabenteil a). *(2 Punkte)*

c) Bestimmen Sie den Skalierungsfaktor A, sodass für die mittlere Symbolenergie $E_\mathrm{s} = 1$ erfüllt ist. *(3 Punkte)*

d) Bestimmen Sie das kausale Matched-Filter $h(t)$ mit kleinstmöglicher kausaler Verzögerung $\kappa_0 \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie weiterhin für diesen Fall die Übertragungsfunktion $H_0(f)$ des Gesamtsystems aus Pulsformungs- und Matched-Filter. *(5 Punkte)*

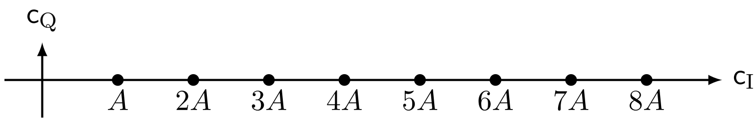
Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

Nun wird mit einer 256-QAM über die Glasfaserleitung übertragen. Das Übertragungssystem soll eine Datenrate von $R_\mathrm{bit} = 2\,\mathrm{Gbit\,s^{-1}}$ unterstützen. Als Pulsformungsfilter nutzt das System einen Root-Raised-Cosine-Filter mit Roll-off-Faktor $\beta = 1$.

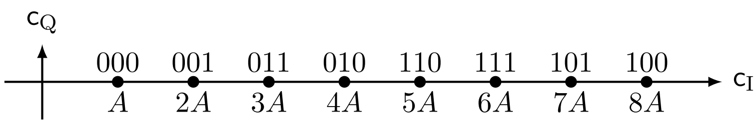
e) Bestimmen Sie die Symboldauer T sowie die Bandbreite B des Systems. *(4 Punkte)*

Lösung

a) Das Konstellationsdiagramm kann wie folgt skizziert werden:



b) Eine mögliche Zuweisung wäre:



c) Sei C eine Zufallsvariable, welche die Modulationssymbole beschreibt. Da C einer Gleichverteilung folgt, gilt für alle Symbole c_n, dass $P_C(\mathsf{c}_n) = \frac{1}{8}$. Die mittlere Symbolenergie $E_\mathrm{s} = \mathbb{E}_C\left\{|\mathsf{c}_n|^2\right\}$ berechnet sich zu

$$
\begin{aligned}
E_\mathrm{s} &= \sum_{n=1}^{8} P_C(\mathsf{c}_n)|\mathsf{c}_n|^2 = P_C(\mathsf{c}_n)\sum_{n=1}^{8}|nA|^2 = P_C(\mathsf{c}_n)A^2\sum_{n=1}^{8} n^2 \\
&= P_C(\mathsf{c}_n)\cdot A^2(1+4+9+16+25+36+49+64) \\
&= \frac{1}{8}\cdot 204A^2 = \frac{51}{2}A^2\,.
\end{aligned}
$$

Somit ergibt sich $A = \sqrt{\frac{2}{51}}$.

d) Das Pulsformungsfilter ist durch $g(t) = \mathrm{rect}_T(t - \gamma_0 T)$, $\gamma_0 \in \mathbb{N}$, gegeben. Da $g(t) \in \mathbb{R}$ folgt

$$\begin{aligned} h(t) &= g^\star(\kappa_0 T - t) \qquad , \kappa_0 \in \mathbb{N} \\ &= g(\kappa_0 T - t) \\ &= \mathrm{rect}_T(\kappa_0 T - t - \gamma_0 T) \\ &= \mathrm{rect}_T((\kappa_0 - \gamma_0)T - t)\,. \end{aligned}$$

Damit $h(t)$ kausal wird, muss $(\kappa_0 - \gamma_0)T \geq \frac{T}{2}$ gelten. Es folgt $\kappa_0 \geq \gamma_0 + \frac{1}{2}$, wobei aus $\gamma_0 \in \mathbb{N}$, $\kappa_0 \in \mathbb{N}$ und der Forderung nach kleinstmöglichem κ_0 somit $\kappa_0 = \gamma_0 + 1$ folgt. Das Matched-Filter ergibt sich zu

$$h(t) = \mathrm{rect}_T((\kappa_0 - \gamma_0)T - t) = \mathrm{rect}_T((\gamma_0 + 1 - \gamma_0)T - t) = \mathrm{rect}_T(T - t) = \mathrm{rect}_T(t - T)\,,$$

wobei die letzte Umformung aus der geraden Symmetrie der Rechteckfunktion folgt.

Die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems ergibt sich aus dem Verschiebungssatz der Fouriertransformation (D.4) sowie (D.6) aus der Formelsammlung

$$\begin{aligned} G(f) &= T\,\mathrm{sinc}(Tf)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f \gamma_0 T} \\ H(f) &= T\,\mathrm{sinc}(Tf)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f T} \\ H_0(f) &= G(f) \cdot H(f) = T^2\,\mathrm{sinc}^2(Tf)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f(\gamma_0+1)T}\,. \end{aligned}$$

e) Bei einer 256-QAM werden $m = \log_2(256) = 8\,\frac{\mathrm{Bit}}{\mathrm{Symbol}}$ übertragen. Die Symbolrate R_sym sowie die Symboldauer T ergeben sich zu

$$\begin{aligned} R_\mathrm{bit} = mR_\mathrm{sym} \quad &\Leftrightarrow R_\mathrm{sym} = \frac{R_\mathrm{bit}}{m} = \frac{2 \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{Bit}}{\mathrm{s}}}{8\,\frac{\mathrm{Bit}}{\mathrm{Symbol}}} = 250\,\mathrm{MBd} \\ &\Rightarrow T = \frac{1}{R_\mathrm{sym}} = 4\,\mathrm{ns}\,. \end{aligned}$$

Wird ein Root-Raised-Cosine-Filter mit $\beta = 1$ genutzt, so ergibt sich die Bandbreite B zu

$$B = 2 \cdot \frac{1}{T} = \frac{2}{4\,\mathrm{ns}} = 500\,\mathrm{MHz}\,.$$

Aufgabe 4 (19 Punkte)

Es wird eine Modulation mit den reellwertigen Symbolen c_1 und c_2 betrachtet. Die Symbole werden von reellwertigem Rauschen N mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_N(n) = \begin{cases} \beta \cdot (n^2+1) & |n| < \frac{3}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

additiv überlagert. Das Empfangssignal kann durch die Zufallsvariable $Z[k] = A[k] + N[k]$ beschrieben werden, wobei die Zufallsvariable $A[k]$ das Sendesymbol $A[k] \in \{\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2\}$ beschreibt. Zunächst sei $\mathsf{c}_1 = -1$ und $\mathsf{c}_2 = +1$.

a) Bestimmen Sie den Wert von β. *(2 Punkte)*

b) Bestimmen Sie $f_{Z,A}(z, A = \mathsf{c}_1)$ und $f_{Z,A}(z, A = \mathsf{c}_2)$ für $P_A(\mathsf{c}_1) = \frac{2}{3}$ und $P_A(\mathsf{c}_2) = \frac{1}{3}$. Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten in einem gemeinsamen Diagramm. Achten Sie auf eine vollständige Achsenbeschriftung. *(5 Punkte)*

c) Leiten Sie die optimale Entscheidungsregel bezüglich des MAP-Kriteriums her. Es gelte weiterhin $P_A(\mathsf{c}_1) = \frac{2}{3}$ und $P_A(\mathsf{c}_2) = \frac{1}{3}$. *(6 Punkte)*

d) Nun sei $-\frac{3}{2} \le \mathsf{c}_1 \le 0$ und $\mathsf{c}_2 = -\mathsf{c}_1$. Geben Sie die optimale Entscheidungsregel gemäß des ML-Kriteriums in Abhängigkeit von c_2 an. Berechnen Sie zudem die Fehlerwahrscheinlichkeit $P_{\mathrm{e,ML}}$ des ML-Kriteriums für $\mathsf{c}_2 = 0, \frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$. *(6 Punkte)*

Lösung

a) Damit $f_N(n)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, muss

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_N(n)\mathrm{d}n = 1$$

erfüllt sein. Es ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_N(n)\mathrm{d}n = 2\int_0^{\frac{3}{2}} \beta\left(n^2+1\right)\mathrm{d}n = 2\beta\left[\frac{n^3}{3}+n\right]_0^{\frac{3}{2}} = 2\beta\left(\frac{9}{8}+\frac{3}{2}\right) = \beta\frac{21}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{4}{21}.$$

b) Mit dem Satz von Bayes ergibt sich

$$f_{Z,A}(z, A=\mathsf{c}_1) = f_{Z|A}(z|A=\mathsf{c}_1)\cdot P_A(\mathsf{c}_1) = \begin{cases} \frac{8}{63}\cdot\left((z-\mathsf{c}_1)^2+1\right) & \text{für } |z-\mathsf{c}_1| < \frac{3}{2}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

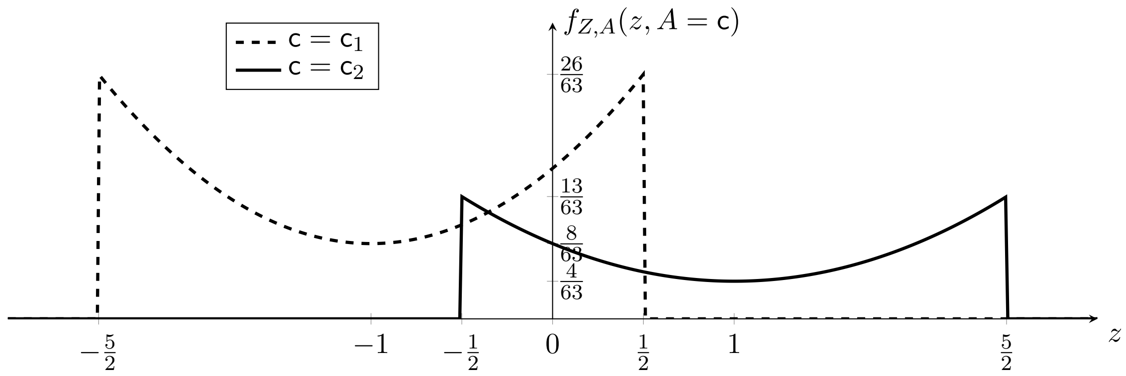
$$= \begin{cases} \frac{8}{63}\cdot\left((z+1)^2+1\right) & \text{für } -\frac{5}{2} < z < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$f_{Z,A}(z, A=\mathsf{c}_2) = f_{Z|A}(z|A=\mathsf{c}_2)\cdot P_A(\mathsf{c}_2) = \begin{cases} \frac{4}{63}\cdot\left((z-\mathsf{c}_2)^2+1\right) & \text{für } |z-\mathsf{c}_2| < \frac{3}{2}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{63}\cdot\left((z-1)^2+1\right) & \text{für } -\frac{1}{2} < z < \frac{5}{2}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit $\mathsf{c}_1 = -1$ und $\mathsf{c}_2 = +1$ können die Dichten in einem gemeinsamen Diagramm skizziert werden:



c) Für MAP ergibt sich der Hypothesentest zu

$$P_A(A = \mathsf{c}_1) f_{Z|A}(z|A = \mathsf{c}_1) \underset{\hat{A}=\mathsf{c}_1}{\overset{\hat{A}=\mathsf{c}_2}{\lessgtr}} P_A(A = \mathsf{c}_2) f_{Z|A}(z|A = \mathsf{c}_2).$$

<u>Fall $z \leq -\frac{1}{2}$:</u> $f_{Z|A}(z|A = \mathsf{c}_2) = 0$

$$P_A(A = \mathsf{c}_1) f_{Z|A}(z|A = \mathsf{c}_1) \underset{\hat{A}=\mathsf{c}_1}{\overset{\hat{A}=\mathsf{c}_2}{\lessgtr}} P_A(A = \mathsf{c}_2) f_{Z|A}(z|A = \mathsf{c}_2) = 0$$
$$\Rightarrow \hat{A} = \mathsf{c}_1$$

<u>Fall $-\frac{1}{2} < z < \frac{1}{2}$:</u>

$$\frac{8}{63} \cdot \Big((z+1)^2 + 1\Big) \underset{\hat{A}=\mathsf{c}_1}{\overset{\hat{A}=\mathsf{c}_2}{\lessgtr}} \frac{4}{63} \cdot \Big((z-1)^2 + 1\Big)$$
$$2z^2 + 4z + 4 \underset{\hat{A}=\mathsf{c}_1}{\overset{\hat{A}=\mathsf{c}_2}{\lessgtr}} z^2 - 2z + 2$$
$$z^2 + 6z + 2 \underset{\hat{A}=\mathsf{c}_1}{\overset{\hat{A}=\mathsf{c}_2}{\lessgtr}} 0$$
$$z \underset{\hat{A}=\mathsf{c}_1}{\overset{\hat{A}=\mathsf{c}_2}{\lessgtr}} \sqrt{7} - 3 \approx -0{,}354$$

<u>Fall $z \geq \frac{1}{2}$:</u> $f_{Z|A}(z|A = \mathsf{c}_1) = 0$

$$0 = P_A(A = \mathsf{c}_1) f_{Z|A}(z|A = \mathsf{c}_1) \underset{\hat{A}=\mathsf{c}_1}{\overset{\hat{A}=\mathsf{c}_2}{\lessgtr}} P_A(A = \mathsf{c}_2) f_{Z|A}(z|A = \mathsf{c}_2)$$
$$\Rightarrow \hat{A} = \mathsf{c}_2$$

Damit ergibt sich die Entscheidungsregel nach MAP-Kriterium zu

$$\hat{a}_{\mathrm{MAP}}[k] = \begin{cases} \mathsf{c}_1 & \text{für } z[k] \leq -\frac{1}{2}, \\ \mathsf{c}_2 & \text{für } -\frac{1}{2} < z[k] < \sqrt{7} - 3, \\ \mathsf{c}_1 & \text{für } \sqrt{7} - 3 \leq z[k] < \frac{1}{2}, \\ \mathsf{c}_2 & \text{für } z[k] \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

d) Für ML ergibt sich der Hypothesentest zu

$$f_{Z|A}(z|A = \mathsf{c}_1) \underset{\hat{A}=\mathsf{c}_1}{\overset{\hat{A}=\mathsf{c}_2}{\lessgtr}} f_{Z|A}(z|A = \mathsf{c}_2).$$

Durch die Symmetrie der beiden bedingten Dichten um $z = 0$ (siehe auch Skizze in b)) ergibt sich die optimale Entscheidungsregel nach ML Kriterium zu

$$\hat{a}_{\mathrm{ML}}[k] = \begin{cases} \mathsf{c}_1 & \text{für } z[k] \leq \mathsf{c}_2 - \frac{3}{2}, \\ \mathsf{c}_2 & \text{für } \mathsf{c}_2 - \frac{3}{2} < z[k] < 0, \\ \mathsf{c}_1 & \text{für } 0 \leq z[k] < \mathsf{c}_1 + \frac{3}{2}, \\ \mathsf{c}_2 & \text{für } z[k] \geq \mathsf{c}_1 + \frac{3}{2}, \end{cases}$$

und mit $\mathsf{c}_1 = -\mathsf{c}_2$ zu

$$\hat{a}_{\mathrm{ML}}[k] = \begin{cases} \mathsf{c}_1 & \text{für } z[k] \leq -\mathsf{c}_1 - \frac{3}{2}, \\ \mathsf{c}_2 & \text{für } -\mathsf{c}_1 - \frac{3}{2} < z[k] < 0, \\ \mathsf{c}_1 & \text{für } 0 \leq z[k] < \mathsf{c}_1 + \frac{3}{2}, \\ \mathsf{c}_2 & \text{für } z[k] \geq \mathsf{c}_1 + \frac{3}{2}, \end{cases}$$

Die Fehlerwahrscheinlichkeit $P_{\mathrm{e,ML}}$ der ML Entscheidung berechnet sich zu

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{e,ML}} &= P_A(A = \mathsf{c}_1) P_{\mathrm{e}}(\mathsf{c}_1) + P_A(A = \mathsf{c}_2) P_{\mathrm{e}}(\mathsf{c}_2) \\ &= P_A(A = \mathsf{c}_1) \int\limits_{\mathsf{c}_2 - \frac{3}{2}}^{0} \beta \left((z + \mathsf{c}_2)^2 + 1 \right) \mathrm{d}z + P_A(A = \mathsf{c}_2) \int\limits_{0}^{-\mathsf{c}_2 + \frac{3}{2}} \beta \left((z - \mathsf{c}_2)^2 + 1 \right) \mathrm{d}z \,. \end{aligned}$$

Durch die Symmetrie der bedingten Dichten $f_{Z|A}(z|A = \mathsf{c}_1)$ und $f_{Z|A}(z|A = \mathsf{c}_2)$ sind die beiden Integrale identisch. Zusammen mit $P_A(A = \mathsf{c}_1) + P_A(A = \mathsf{c}_2) = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{e,ML}} &= \beta \int\limits_{0}^{-\mathsf{c}_2 + \frac{3}{2}} \left((z - \mathsf{c}_2)^2 + 1 \right) \mathrm{d}z \\ &= \beta \int\limits_{0}^{-\mathsf{c}_2 + \frac{3}{2}} \left(z^2 - 2z\mathsf{c}_2 + \mathsf{c}_2^2 + 1 \right) \mathrm{d}z \\ &= \beta \left[\frac{z^3}{3} - z^2 \mathsf{c}_2 + z \left(\mathsf{c}_2^2 + 1 \right) \right]_0^{\frac{3}{2} - \mathsf{c}_2} \\ &= \beta \left(\frac{(\frac{3}{2} - \mathsf{c}_2)^3}{3} - \left(\frac{3}{2} - \mathsf{c}_2 \right)^2 \mathsf{c}_2 + \left(\frac{3}{2} - \mathsf{c}_2 \right) \left(\mathsf{c}_2^2 + 1 \right) \right) \,. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen ergeben sich die gesuchten Fehlerwahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} \mathsf{c}_2 = 0 :& \quad P_{\mathrm{e,ML}} = \frac{1}{2} \\ \mathsf{c}_2 = \frac{1}{2} :& \quad P_{\mathrm{e,ML}} = \frac{13}{63} \approx 0{,}206 \\ \mathsf{c}_2 = \frac{3}{2} :& \quad P_{\mathrm{e,ML}} = 0 \,. \end{aligned}$$

Hinweis: Die Ergebnisse für $\mathsf{c}_2 = 0$ und $\mathsf{c}_2 = \frac{3}{2}$ können auch ohne das explizite Ausrechnen des Integrals durch Argumentieren (identische bzw. vollständig disjunkte Träger der beiden bedingten Dichten) angegeben werden.

Aufgabe 5 (15 Punkte)

Gegeben sei ein Blockcode $\mathcal{C}_1$ in $\mathbb{F}_2^n$, der durch die Generatormatrix $\boldsymbol{G}$ beschrieben werden kann:

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie alle Codewörter von $\mathcal{C}_1$ an. Ist $\mathcal{C}_1$ ein linearer Code? Begründen Sie kurz. *(3 Punkte)*

b) Ermitteln Sie die Coderate sowie die minimale Hammingdistanz von $\mathcal{C}_1$. *(3 Punkte)*

c) Wie viele Bitfehler kann der vorliegende Code maximal korrigieren? *(2 Punkte)*

d) Bestimmen Sie eine Paritycheckmatrix $\boldsymbol{H}$ des Codes. *(1 Punkt)*

Nach der Übertragung über einen symmetrischen Binärkanal wird die Folge $\boldsymbol{y} = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1)$ empfangen.

e) Ermitteln Sie mittels Syndromdecodierung eine Schätzung $\hat{\boldsymbol{x}}$ für das gesendete Codewort. Nehmen Sie dazu eine Bitfehlerwahrscheinlichkeit von $\delta = 0{,}1$ des BSC an. *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

Die Codierung $\mathcal{C}_2$ bildet über die Abbildungsvorschrift

$$\mathcal{C}_2 : (u_1\ u_2\ u_3) \mapsto (0\ u_1\ u_1\ u_2\ u_2\ u_3\ u_3\ p)\,,$$

ein Datenwort $\boldsymbol{u} = (u_1\ u_2\ u_3)$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{F}_2^3$, auf ein Codewort $\boldsymbol{x} = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_8)$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^8$, ab. Hierbei stellt $p = u_1 + u_2 + u_3$ ein Paritätsbit dar.

f) Geben Sie eine Generatormatrix $\boldsymbol{G}_{2,\text{sys}}$ an, welche einen zu $\mathcal{C}_2$ äquivalenten, systematischen Code erzeugt. *(4 Punkte)*

Lösung

a) Der Code enthält vier Codewörter

$$\mathcal{C}_1 = \{(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0), (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1), (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1), (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0)\}\ .$$

Der Code ist linear, weil er mit einer Generatormatrix beschrieben werden kann. (Alternativ kann die Linearität auch nachgewiesen werden, indem gezeigt wird, dass die Summe aller beliebigen Paare von Codewörtern wieder ein Codewort ergibt.)

b) Der $(8, 2)$-Blockcode hat eine Coderate von $r = \frac{k}{n} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Da es sich um einen linearen Code handelt, ist die minimale Hammingdistanz $d_{\min} = \min\limits_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}_1 \setminus \{\boldsymbol{0}\}} d_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})$. Demnach ist $d_{\min} = 5$.

c) Mit einer minimalen Hammingdistanz von $d_{\min} = 5$ können bis zu $t = \left\lfloor \frac{d_{\min}-1}{2} \right\rfloor = 2$ Bitfehler korrigiert werden.

d) Die Generatormatrix $\boldsymbol{G}$ befindet sich bereits in der systematischen Form $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{I}_2\ \boldsymbol{P})$. Eine Paritycheckmatrix ist demnach durch

$$\boldsymbol{H} = \left(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{I}_6\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

e) Das Syndrom berechnet sich zu

$$
\boldsymbol{s} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

wobei dies der 6. Spalte von $\boldsymbol{H}$ und somit dem Fehlermuster $\hat{\boldsymbol{e}} = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0)$ entspricht. Das durch Syndromdecodierung ermittelte Codewort ist somit

$$
\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{SD}} = \boldsymbol{y} + \hat{\boldsymbol{e}} = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1)\,.
$$

f) Die Codierung C_2 erzeugt den Code $\mathcal{C}_2$ mit den folgenden Codewörtern $\boldsymbol{x}$:

$\boldsymbol{u}$	$\boldsymbol{x}$
000	0 00 00 00 0
001	0 00 00 11 1
010	0 00 11 00 1
011	0 00 11 11 0
100	0 11 00 00 1
101	0 11 00 11 0
110	0 11 11 00 0
111	0 11 11 11 1

Die Zeilen einer Generatormatrix $\boldsymbol{G}_2$, welche denselben linearen Code $\mathcal{C}_2$ erzeugt, sind durch dessen Basisvektoren gegeben:

$$
\boldsymbol{G}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Ohne die Eigenschaften des Codes zu verändern kann aus der nicht systematischen Generatormatrix $\boldsymbol{G}_2$ durch das Vertauschen der Spalten eine systematische Generatormatrix $\boldsymbol{G}_{2,\mathrm{sys}}$ erzeugt werden:

$$
\boldsymbol{G}_{2,\mathrm{sys}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Aufgabe 6 (15 Punkte)

Ein Faltungscodierer verarbeitet pro Takt ein eingehendes Bit. Seine Ausgänge sind durch folgende Generatorpolynome beschrieben:

$$g_1(x) = 1 + x^2$$
$$g_2(x) = 1 + x + x^2$$

a) Bestimmen Sie die Rate r des Faltungscodierers. *(1 Punkt)*

b) Geben Sie die Schieberegisterdarstellung des Faltungscodierers an. *(2 Punkte)*

c) Zeichnen Sie das Zustandsdiagramm des Faltungscodierers. *(3 Punkte)*

Eine Bitfolge $\boldsymbol{x}$ wird mit dem gegebenen Faltungscodierer encodiert, BPSK-moduliert und über einen AWGN-Kanal übertragen. Beim Codieren befindet sich das Schieberegister im Anfangszustand $(v_1, v_2) = (1, 0)$. Weiterhin wird eine Terminierung durchgeführt. Das Schieberegister befindet sich nach der Codierung aller Datenbits im Zustand $(v_1, v_2) = (0, 0)$.
Der i-te Empfangswert lässt sich durch $y_i = (-1)^{x_i} + n_i$ beschreiben, wobei $n_i \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$ und x_i das i-te gesendete Codebit ist. Nach dem Matched-Filter und einer Hard-Decision erhalten Sie die Empfangssymbole

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

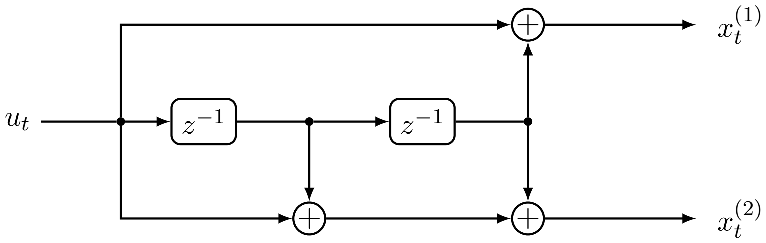
d) Skizzieren Sie das entsprechende Trellis-Diagramm für sechs Taktschritte. *(4 Punkte)*

e) Bestimmen Sie die am wahrscheinlichsten gesendete Codebitfolge $\hat{\boldsymbol{x}}$ sowie die zugehörige Datenbitfolge $\hat{\boldsymbol{u}}$ mit Hilfe des Hard-Decision Viterbi-Algorithmus. Achten Sie auf eine vollständige Beschriftung Ihrer Lösung inklusive aller Zwischenschritte, sodass der Lösungsweg klar ersichtlich ist.
Sie dürfen das Trellis-Diagramm aus der vorherigen Teilaufgabe verwenden. *(5 Punkte)*

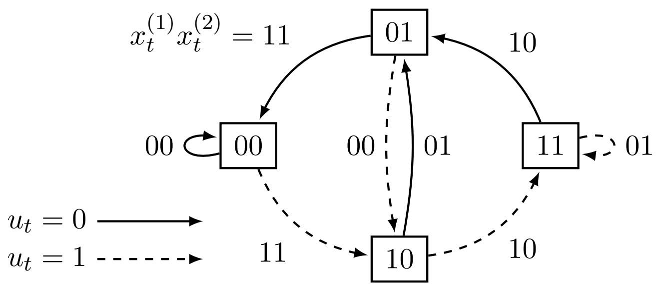
Lösung

a) Da pro Takt ein Bit eingeht, ist $k = 1$. Da jedes Generatorpolynom die Erzeugung eines Ausgangsbits beschreibt, ist $n = 2$. Die Coderate berechnet sich zu $r = \frac{k}{n} = \frac{1}{2}$.

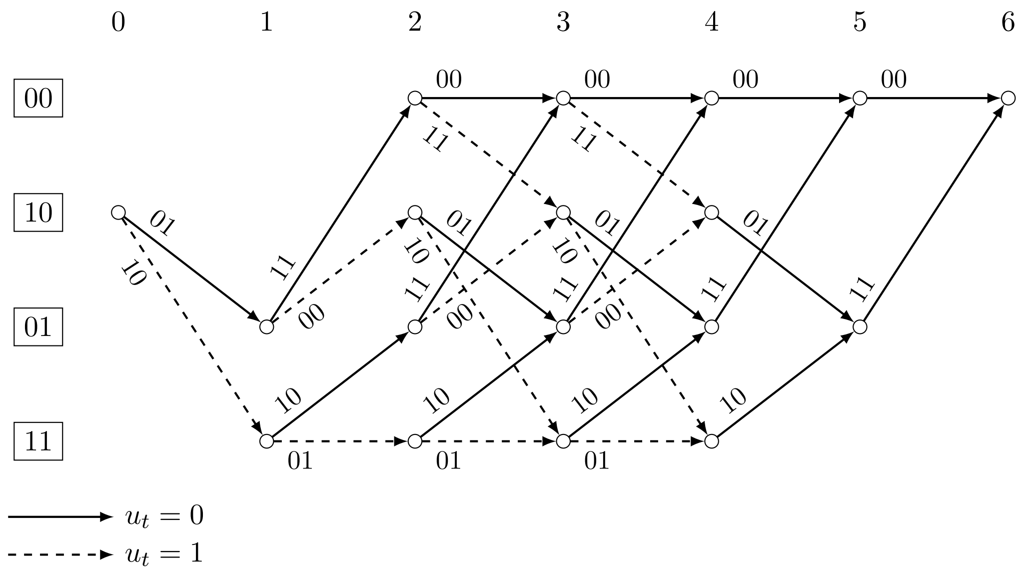
b) Aus den Generatorpolynomen ergibt sich die Schieberegisterdarstellung zu:



c) Das Zustandsdiagramm ergibt sich zu:



d) Das Trellis-Diagramm ergibt sich zu:

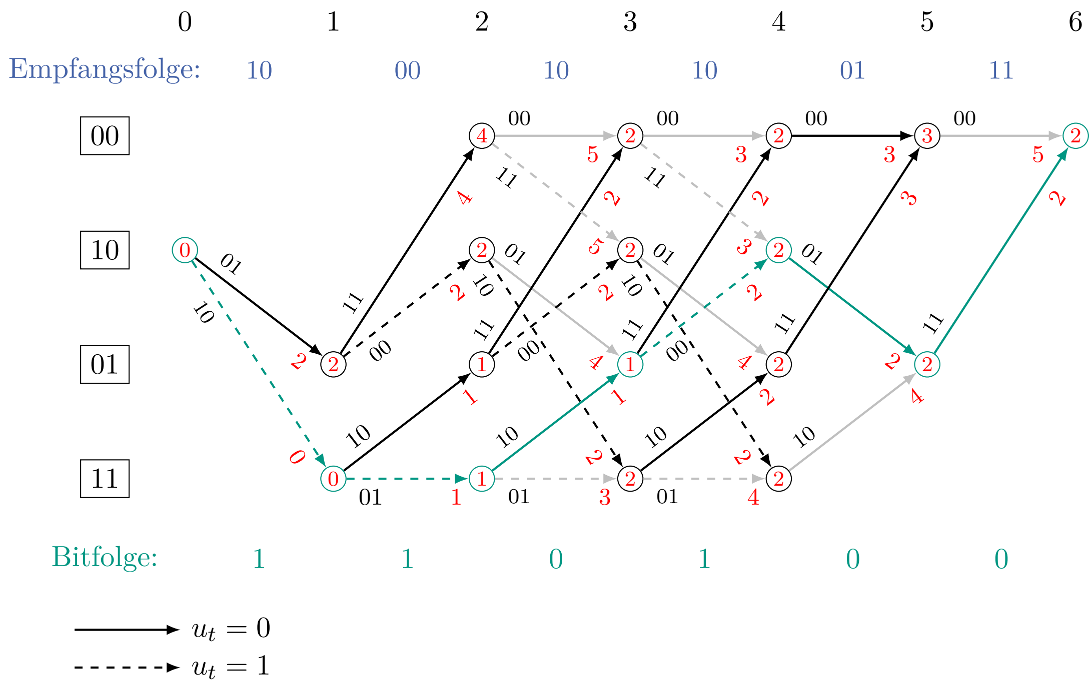


e) Die hart entschiedenen Empfangssymbole y_i werden in eine Bitfolge $\tilde{\boldsymbol{y}}$ demoduliert:

$$\tilde{y}_i = \begin{cases} 0 & y_i \geq 0 \\ 1 & y_i < 0 \end{cases} .$$

Die empfangene Codebitfolge ist $\tilde{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

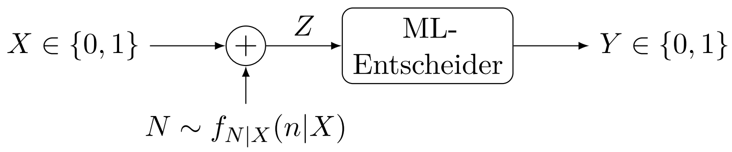
Das resultierende Trellis-Diagramm mit Viterbi-Algorithmus ergibt sich zu:



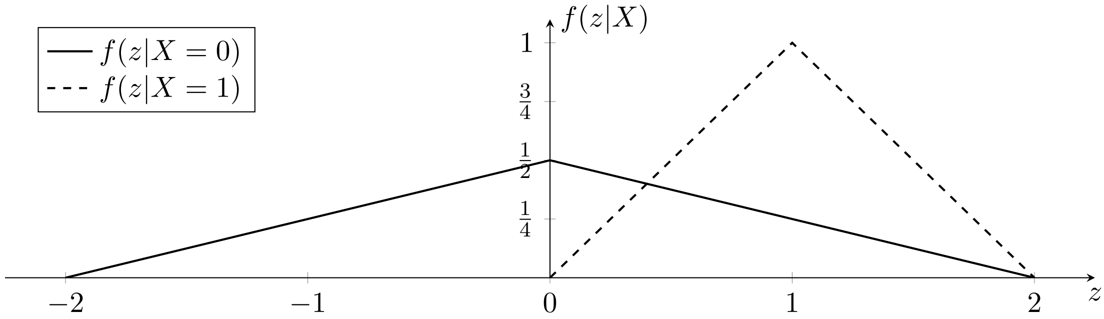
Die gesendete Codebitfolge wird zu $\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und die Datenbitfolge zu $\hat{\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ geschätzt.

Aufgabe 7 (14 Punkte)

Sie übertragen binäre Symbole $X \in \{0,1\}$ über einen gedächtnislosen, verrauschten Kanal, wobei die Eingangssymbole X gleichverteilt sind. Das additive Rauschen N des Kanals folgt einer Dreiecksverteilung, wobei die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{N|X}(n|X)$ vom gesendeten Symbol X abhängig ist. Durch eine ML-Entscheidung schätzen Sie aus den verrauschten Werten $Z \in \mathbb{R}$ die Empfangssymbole $Y \in \{0,1\}$.



Am Empfänger beobachten Sie vor der ML-Entscheidung folgende bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten:



a) Bestimmen Sie die optimale Entscheidungsschwelle θ gemäß ML-Regel. *(3 Punkte)*

b) Berechnen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{Y|X}(Y|X)$ des Kanals inklusive ML-Entscheiders. *(4 Punkte)*

c) Bestimmen Sie die Auftretenswahrscheinlichkeiten $P_Y(Y)$. *(3 Punkte)*

d) Bestimmen Sie die Transinformation $I(X;Y)$ des Kanals. *(4 Punkte)*

Lösung

a) Aus dem Diagramm der beiden Wahrscheinlichkeitsdichten ist ersichtlich, dass beide Wahrscheinlichkeitsdichten genau einen Schnittpunkt besitzen. Wir bestimmen für beide Wahrscheinlichkeitsdichten für $0 \le z \le 1$ eine Funktion und setzen diese gleich:

$$
\begin{aligned}
& f_{Z|X}(\theta|1) = f_{Z|X}(\theta|0) \\
\Leftrightarrow \quad & \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\theta \\
\Leftrightarrow \quad & \theta = \frac{2}{5}\,.
\end{aligned}
$$

b) Die Übergangswahrscheinlichkeiten lassen sich als die Integrale der entsprechenden Wahrscheinlichkeitsdichten für $z < \theta$ bzw. $z > \theta$ oder als das entsprechende Gegenereignis bestimmen:

$$P_{Y|X}(1|0) = \int_{\theta}^{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z\,\mathrm{d}z = \left[\frac{1}{2}z - \frac{1}{8}z^2\right]_{\frac{2}{5}}^{2} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{50} = \frac{8}{25}$$

$$P_{Y|X}(0|0) = 1 - P_{Y|X}(1|0) = \frac{17}{25}$$

$$P_{Y|X}(0|1) = \int_{0}^{\theta} z\,\mathrm{d}z = \left[\frac{1}{2}z^2\right]_{0}^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{25}$$

$$P_{Y|X}(1|1) = 1 - P_{Y|X}(0|1) = \frac{23}{25}\,.$$

c) Die Auftretenswahrscheinlichkeiten können über den Satz der totalen Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, wobei aus der Gleichverteilung der Sendesymbole $P_X(0) = P_X(1) = \frac{1}{2}$ folgt

$$P_Y(0) = \sum_{x\in\{0,1\}} P_{X,Y}(x,0) = \sum_{x\in\{0,1\}} P_{X|Y}(x|0)P_X(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{17}{25} + \frac{1}{2}\cdot\frac{19}{25} = \frac{19}{50}$$

$$P_Y(1) = 1 - P_Y(0) = \frac{31}{50}\,.$$

d) Mit der Definition der Transinformation $I(X;Y)$ und dem Satz von Bayes ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
I(X;Y) =& \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} P_{X,Y}(x_n,y_m)\log_2\left(\frac{P_{X,Y}(x_n,y_m)}{P_X(x_n)P_Y(y_m)}\right)\\
=& \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} P_{Y|X}(y_m|x_n)P_X(x_n)\log_2\left(\frac{P_{Y|X}(y_m|x_n)}{P_Y(y_m)}\right)\\
=& P_{Y|X}(0|0)P_X(0)\log_2\left(\frac{P_{Y|X}(0|0)}{P_Y(0)}\right) + P_{Y|X}(1|0)P_X(0)\log_2\left(\frac{P_{Y|X}(1|0)}{P_Y(1)}\right)\\
& P_{Y|X}(0|1)P_X(1)\log_2\left(\frac{P_{Y|X}(0|1)}{P_Y(0)}\right) + P_{Y|X}(1|1)P_X(1)\log_2\left(\frac{P_{Y|X}(1|1)}{P_Y(1)}\right)\\
=& \frac{17}{25}\cdot\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\frac{17}{25}}{\frac{19}{50}}\right) + \frac{8}{25}\cdot\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\frac{8}{25}}{\frac{31}{50}}\right) + \frac{2}{25}\cdot\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\frac{2}{25}}{\frac{19}{50}}\right) + \frac{23}{25}\cdot\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\frac{23}{25}}{\frac{31}{50}}\right)\\
=& \frac{1}{50}\left(17\log_2\left(\frac{34}{19}\right) + 8\log_2\left(\frac{16}{31}\right) + 2\log_2\left(\frac{4}{19}\right) + 23\log_2\left(\frac{46}{31}\right)\right)\\
\approx& 0{,}305\,\frac{\text{Bit}}{\text{Kanalzugriff}}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 8 (13 Punkte)

Die Impulsantwort $h(t)$ eines stationären Kanals ist durch

$$h(t) = \delta(t) + 0{,}2 \cdot \delta(t - T) + 0{,}6 \cdot \delta(t - 2T),$$

gegeben, wobei $T = \frac{1}{f_\mathrm{s}}$ bei einer Abtastrate von $f_\mathrm{s} = 128\,\mathrm{MHz}$.

a) Bestimmen Sie den Frequenzgang $H(f)$ des Kanals. *(2 Punkte)*

b) Geben Sie den Delay-Spread T_DS und den Doppler-Spread B_DS des Kanals an. Begründen Sie Ihre Antwort. *(2 Punkte)*

Für den gegebenen Kanal soll ein OFDM-Übertragungssystem mit $N = 8$ Unterträgern entworfen und digital implementiert werden. Die Abtastrate des Systems ist durch $f_\mathrm{sys} = f_\mathrm{s}$ gegeben.

c) Geben Sie die minimale Länge des Cyclic-Prefix in Anzahl an Abtastwerten an. Bestimmen Sie die resultierende, maximal nutzbare Symbolrate R_sym und den Unterträgerabstand Δf des OFDM-Systems. *(3 Punkte)*

d) Es soll eine Bitrate von mindestens $400\,\mathrm{Mbit/s}$ erreicht werden. Welche Modulationsverfahren können verwendet werden? *(2 Punkte)*

Im Folgenden wird eine OOK-Modulation verwendet.

e) Die OOK-Symbole

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sollen mit obigem OFDM-System gesendet werden. Bestimmen Sie das zu übertragende OFDM-Symbol $s[n]$ im Zeitbereich. *(4 Punkte)*

Lösung

a) Der Frequenzgang $H(f)$ ist:

$$\begin{aligned} H(f) &= \mathcal{F}\{h(t)\} \\ &= \mathcal{F}\{\delta(t)\} + 0{,}2 \cdot \mathcal{F}\{\delta(t - 1T)\} + 0{,}6 \cdot \mathcal{F}\{\delta(t - 2T)\} \\ &= 1 + 0{,}2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f T} + 0{,}6\mathrm{e}^{-\mathrm{j}4\pi f T} \end{aligned}$$

b) Der Delay-Spread T_DS entspricht der Differenz zwischen dem schnellsten und langsamsten Pfad:

$$T_\mathsf{DS} = 2T - 0 = 2T.$$

Da der Kanal stationär ist und sich somit mit der Zeit nicht ändert, ist seine Kohärenzzeit $T_\mathsf{C} = \infty$. Der Doppler-Spread ist $B_\mathsf{DS} \sim \frac{1}{T_\mathsf{C}}$ und es folgt $B_\mathsf{DS} = 0$.

c) Um ISI zu vermeiden muss das CP gleich lang oder länger als der Delay-Spread des Kanals sein. Dies bedeutet, dass $L_\mathrm{CP} \geq 2$, wobei aus der Forderung der minimalen Länge $L_\mathrm{CP} = 2$ folgt. Die Symboldauer T_OFDM und die Symbolrate R_sym ergeben sich zu:

$$T_\mathrm{OFDM} = T_\mathrm{M} + T_\mathrm{CP} = NT + L_\mathrm{CP}T = \frac{N + L_\mathrm{CP}}{f_\mathrm{sys}} = 78{,}1\,\mathrm{ns}$$

$$R_\mathrm{sym} = \frac{N}{N + L_\mathrm{CP}} \cdot f_\mathrm{sys} = 102{,}4\,\mathrm{MBd}$$

Der Unterträgerabstand beträgt:

$$\Delta f = \frac{1}{T_\mathrm{M}} = \frac{1}{NT} = \frac{f_\mathrm{sys}}{N} = 16\,\mathrm{MHz}.$$

d)

$$
\begin{aligned}
R_{\text{bit,min}} &\leq m \cdot R_{\text{sym}} \\
m &\geq \frac{R_{\text{bit,min}}}{R_{\text{sym}}} = 3{,}906 \quad \Rightarrow m = 4 \\
\Rightarrow \quad M &= 2^m = 16
\end{aligned}
$$

Modulationsverfahren wie 16-PSK oder 16-QAM wären geeignet.

e) Das OFDM-Symbol ohne Cyclilc-Prefix $\tilde{s}[n]$ wird über die inverse Diskrete Fourier-Transformation (IDFT)

$$
\tilde{s}[n] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{\mu=0}^{N-1} c[\mu] \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi \frac{n\mu}{N}}
$$

mit $N = 8$ bestimmt, wobei $c[\mu]$ das μ-te Element des Sendesymbolvektors $\boldsymbol{c}$ ist und das erste Element den Index $\mu = 0$ besitzt. Damit ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\tilde{s}[0] &= \frac{1}{8} \cdot \left(1 \cdot \mathrm{e}^0 + 1 \cdot \mathrm{e}^0\right) = \frac{1}{4} \\
\tilde{s}[1] &= \frac{1}{8} \cdot \left(1 \cdot \mathrm{e}^0 + 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{6}{8}}\right) = \frac{1}{8} \cdot (1 - \mathrm{j}) = \frac{1}{8} - \frac{\mathrm{j}}{8} \\
\tilde{s}[2] &= \frac{1}{8} \cdot \left(1 \cdot \mathrm{e}^0 + 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{12}{8}}\right) = \frac{1}{8} \cdot (1 - 1) = 0 \\
\tilde{s}[3] &= \frac{1}{8} \cdot \left(1 \cdot \mathrm{e}^0 + 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{18}{8}}\right) = \frac{1}{8} \cdot (1 + \mathrm{j}) = \frac{1}{8} + \frac{\mathrm{j}}{8} \\
\tilde{s}[4] &= \frac{1}{8} \cdot \left(1 \cdot \mathrm{e}^0 + 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{24}{8}}\right) = \frac{1}{8} \cdot (1 + 1) = \frac{1}{4} \\
\tilde{s}[5] &= \frac{1}{8} \cdot \left(1 \cdot \mathrm{e}^0 + 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{30}{8}}\right) = \frac{1}{8} \cdot (1 - \mathrm{j}) = \frac{1}{8} - \frac{\mathrm{j}}{8} \\
\tilde{s}[6] &= \frac{1}{8} \cdot \left(1 \cdot \mathrm{e}^0 + 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{36}{8}}\right) = \frac{1}{8} \cdot (1 - 1) = 0 \\
\tilde{s}[7] &= \frac{1}{8} \cdot \left(1 \cdot \mathrm{e}^0 + 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{42}{8}}\right) = \frac{1}{8} \cdot (1 + \mathrm{j}) = \frac{1}{8} + \frac{\mathrm{j}}{8}
\end{aligned}
$$

Mit dem Cyclic-Prefix der Länge L_{CP} ergibt sich das OFDM Symbol $s[n]$ zu

$$
s[n] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} + \frac{\mathrm{j}}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} - \frac{\mathrm{j}}{8} & 0 & \frac{1}{8} + \frac{\mathrm{j}}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} - \frac{\mathrm{j}}{8} & 0 & \frac{1}{8} + \frac{\mathrm{j}}{8} \end{pmatrix} .
$$

Aufgabe 9 (12 Punkte)

Gegeben sei ein MIMO-System mit der Kanalmatrix

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ H_3 & H_4 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind H_i unabhängige, gleichverteilte Zufallsvariablen, die einer Bernoulliverteilung folgen. Das bedeutet

$$P(H_i = 0) = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad P(H_i = 1) = \frac{1}{2}\,.$$

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Sendeantennen N_T und die Anzahl der Empfangsantennen N_R. *(2 Punkte)*

b) Wieviele unterschiedliche Kanalmatrizen gibt es insgesamt? *(1 Punkt)*

c) Berechnen Sie die Kapazität dieses Kanals und nehmen Sie unabhängige und identisch verteilte Eingangssymbole sowie unabhängiges, unkorreliertes und identisch verteiltes Rauschen an. Dabei ist das Signal-Rausch-Verhältnis $\mathrm{SNR} = 2$. *(9 Punkte)*

Lösung

a) Aus der Kanalmatrix ergibt sich direkt $N_\mathrm{T} = N_\mathrm{R} = 2$.

b) Jeder Kanalkoeffizient kann einen von 2 unterschiedlichen Werten annehmen. Damit gibt es insgesamt $2^4 = 16$ verschiedene Kanalmatrizen.

c) Die Kapazität ergibt sich unter den in der Aufgabe dargelegten Randbedingungen zu

$$C_0 = \mathbb{E}\left\{\log_2\left(\det\left(\boldsymbol{I}_{N_\mathrm{R}} + \frac{\mathrm{SNR}}{N_\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^\mathrm{H}\right)\right)\right\} = \mathbb{E}\left\{\log_2\left(\det\left(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^\mathrm{H}\right)\right)\right\}.$$

Es gibt 16 mögliche, gleichwahrscheinliche (mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$) Kanalmatrizen. Für jede dieser Matrizen berechnen wir $\det\left(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)$ und erhalten:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}: &\quad \det\left(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right) = 1 \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: &\quad \det\left(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right) = 2 \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}: &\quad \det\left(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right) = 2 \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}: &\quad \det\left(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right) = 3 \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}: &\quad \det\left(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right) = 2 \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: &\quad \det\left(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right) = 3 \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}: &\quad \det\left(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right) = 4 \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}: &\quad \det\left(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right) = 5 \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}: &\quad \det\left(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right) = 2 \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: &\quad \det\left(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right) = 4 \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}: &\quad \det\left(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right) = 3 \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}: &\quad \det\left(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right) = 5 \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}: &\quad \det\left(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right) = 3 \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: &\quad \det\left(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right) = 5 \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}: &\quad \det\left(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right) = 5 \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}: &\quad \det\left(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right) = 5 \,.
\end{aligned}
$$

Das bedeutet, dass

$$
\det\left(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right) = \begin{cases} 1 & \text{mit Wkt. } \frac{1}{16} \\ 2 & \text{mit Wkt. } \frac{4}{16} \\ 3 & \text{mit Wkt. } \frac{4}{16} \\ 4 & \text{mit Wkt. } \frac{2}{16} \\ 5 & \text{mit Wkt. } \frac{5}{16} \end{cases} \,.
$$

Damit ergibt sich die Kapazität zu

$$\begin{aligned}
C_0 &= \mathbb{E}\Big\{\log_2\Big(\det\Big(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\Big)\Big)\Big\} \\
&= \frac{1}{16}\cdot 0 + \frac{4}{16}\cdot 1 + \frac{4}{16}\cdot \log_2(3) + \frac{2}{16}\cdot 2 + \frac{5}{16}\log_2(5) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\log_2(3) + \frac{5}{16}\log_2(5) \\
&\approx 1{,}622\ \frac{\text{Bit}}{\text{Kanalzugriff}}\,.
\end{aligned}$$

Formelsammlung und Tabellen/*Formulary and Tables*

A Tabelle der Standardnormalverteilung/ *Standard Normal Distribution Table*

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	0,80	0,788145	1,60	0,945201	2,40	0,991802	3,20	0,999313
0,02	0,507978	0,82	0,793892	1,62	0,947384	2,42	0,992240	3,22	0,999359
0,04	0,515953	0,84	0,799546	1,64	0,949497	2,44	0,992656	3,24	0,999402
0,06	0,523922	0,86	0,805105	1,66	0,951543	2,46	0,993053	3,26	0,999443
0,08	0,531881	0,88	0,810570	1,68	0,953521	2,48	0,993431	3,28	0,999481
0,10	0,539828	0,90	0,815940	1,70	0,955435	2,50	0,993790	3,30	0,999517
0,12	0,547758	0,92	0,821214	1,72	0,957284	2,52	0,994132	3,32	0,999550
0,14	0,555670	0,94	0,826391	1,74	0,959070	2,54	0,994457	3,34	0,999581
0,16	0,563559	0,96	0,831472	1,76	0,960796	2,56	0,994766	3,36	0,999610
0,18	0,571424	0,98	0,836457	1,78	0,962462	2,58	0,995060	3,38	0,999638
0,20	0,579260	1,00	0,841345	1,80	0,964070	2,60	0,995339	3,40	0,999663
0,22	0,587064	1,02	0,846136	1,82	0,965621	2,62	0,995604	3,42	0,999687
0,24	0,594835	1,04	0,850830	1,84	0,967116	2,64	0,995855	3,44	0,999709
0,26	0,602568	1,06	0,855428	1,86	0,968557	2,66	0,996093	3,46	0,999730
0,28	0,610261	1,08	0,859929	1,88	0,969946	2,68	0,996319	3,48	0,999749
0,30	0,617911	1,10	0,864334	1,90	0,971283	2,70	0,996533	3,50	0,999767
0,32	0,625516	1,12	0,868643	1,92	0,972571	2,72	0,996736	3,52	0,999784
0,34	0,633072	1,14	0,872857	1,94	0,973810	2,74	0,996928	3,54	0,999800
0,36	0,640576	1,16	0,876976	1,96	0,975002	2,76	0,997110	3,56	0,999815
0,38	0,648027	1,18	0,881000	1,98	0,976148	2,78	0,997282	3,58	0,999828
0,40	0,655422	1,20	0,884930	2,00	0,977250	2,80	0,997445	3,60	0,999841
0,42	0,662757	1,22	0,888768	2,02	0,978308	2,82	0,997599	3,62	0,999853
0,44	0,670031	1,24	0,892512	2,04	0,979325	2,84	0,997744	3,64	0,999864
0,46	0,677242	1,26	0,896165	2,06	0,980301	2,86	0,997882	3,66	0,999874
0,48	0,684386	1,28	0,899727	2,08	0,981237	2,88	0,998012	3,68	0,999883
0,50	0,691463	1,30	0,903200	2,10	0,982136	2,90	0,998134	3,70	0,999892
0,52	0,698468	1,32	0,906582	2,12	0,982997	2,92	0,998250	3,72	0,999900
0,54	0,705401	1,34	0,909877	2,14	0,983823	2,94	0,998359	3,74	0,999908
0,56	0,712260	1,36	0,913085	2,16	0,984614	2,96	0,998462	3,76	0,999915
0,58	0,719043	1,38	0,916207	2,18	0,985371	2,98	0,998559	3,78	0,999922
0,60	0,725747	1,40	0,919243	2,20	0,986097	3,00	0,998650	3,80	0,999928
0,62	0,732371	1,42	0,922196	2,22	0,986791	3,02	0,998736	3,82	0,999933
0,64	0,738914	1,44	0,925066	2,24	0,987455	3,04	0,998817	3,84	0,999938
0,66	0,745373	1,46	0,927855	2,26	0,988089	3,06	0,998893	3,86	0,999943
0,68	0,751748	1,48	0,930563	2,28	0,988696	3,08	0,998965	3,88	0,999948
0,70	0,758036	1,50	0,933193	2,30	0,989276	3,10	0,999032	3,90	0,999952
0,72	0,764238	1,52	0,935745	2,32	0,989830	3,12	0,999096	3,92	0,999956
0,74	0,770350	1,54	0,938220	2,34	0,990358	3,14	0,999155	3,94	0,999959
0,76	0,776373	1,56	0,940620	2,36	0,990862	3,16	0,999211	3,96	0,999963
0,78	0,782305	1,58	0,942947	2,38	0,991344	3,18	0,999264	3,98	0,999966

B Folgen und Reihen/*Sequences and Series*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}, \qquad |x| < 1 \tag{B.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad |x| < 1 \tag{B.2}$$

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}, \qquad x \neq 1 \tag{B.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \cdots = (1+x)^r, \qquad \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \tag{B.4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \cdots = \mathrm{e}^x, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{B.5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \cdots = \ln(x), \qquad 0 < x \leq 2 \tag{B.6}$$

$$\sum_{n=1}^{k} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}, \qquad k \geq 1 \tag{B.7}$$

C Integralrechnung/*Integrals*

$$\int \delta(x - x_0)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \varphi(x_0), \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R} \tag{C.1}$$

$$\int x\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2}(ax - 1) \tag{C.2}$$

$$\int x^2\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^3}(a^2 x^2 - 2ax + 2) \tag{C.3}$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \tag{C.4}$$

$$\int \mathrm{e}^{ax} \sin(bx)\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2 + b^2}\Big(a \sin(bx) - b \cos(bx)\Big) \tag{C.5}$$

$$\int \sin(ax) \cos(ax)\, \mathrm{d}x = -\frac{\cos^2(ax)}{2a}, \qquad a \neq 0 \tag{C.6}$$

$$\int_0^{\infty} x^n\, \mathrm{e}^{-ax}\, \mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}}, \qquad a > 0, n \in \mathbb{N} \tag{C.7}$$

$$\int_0^{\infty} x^2\, \mathrm{e}^{-ax^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \qquad \text{für } a > 0 \tag{C.8}$$

D Formeln zur Fouriertransformation/*Fourier Transformation*

Definition

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t}\, \mathrm{d}f \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\, \mathrm{d}t = X(f) \tag{D.1}$$

Eigenschaften/*Properties*

$$\sum c_i x_i(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \sum c_i X_i(f) \tag{D.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad (\mathrm{j}2\pi f)^n \; X(f) \tag{D.3}$$

$$x\left(t-t_0\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_0} \; X(f) \tag{D.4}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t} \; x(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X\left(f-f_0\right) \tag{D.5}$$

$$x(t) * y(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f)Y(f) \tag{D.6}$$

$$x(t)y(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f) * Y(f) \tag{D.7}$$

$$x(t/a) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad |a|X(af) \tag{D.8}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \; \mathrm{d}t \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \; \mathrm{d}f \tag{D.9}$$

Korrespondenzen/*Transform Pairs*

$$1 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \delta(f) \tag{D.10}$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2}\delta(f+f_0) + \frac{1}{2}\delta(f-f_0) \tag{D.11}$$

$$F \cdot \operatorname{sinc}(Ft) = \frac{\sin(\pi F t)}{\pi t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f) = \begin{cases} 1, & |f| < \frac{F}{2} \\ 0, & |f| > \frac{F}{2} \end{cases} \tag{D.12}$$

$$\mathrm{e}^{-\pi t^2} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{e}^{-\pi f^2} \tag{D.13}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad T \cdot \operatorname{sinc}(Tf) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} \tag{D.14}$$

$$\frac{1}{2}\delta(t+t_0) + \frac{1}{2}\delta(t-t_0) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \cos(2\pi f t_0) \tag{D.15}$$

$$\delta(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 1 \tag{D.16}$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\mathrm{j}}{2}\delta(f+f_0) - \frac{\mathrm{j}}{2}\delta(f-f_0) \tag{D.17}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{\mathrm{j}2\pi f} \tag{D.18}$$

$$\mathrm{e}^{-a|t|}\,, \quad a > 0 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} \tag{D.19}$$

$$x(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad a > 0 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{a + \mathrm{j}2\pi f} \tag{D.20}$$

$$x(t) = \begin{cases} t\mathrm{e}^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad a > 0 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{\left(a + \mathrm{j}2\pi f\right)^2} \tag{D.21}$$

$$\frac{1}{\pi t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -\,\mathrm{j}\;\operatorname{sign}(f) \tag{D.22}$$

$$\mathrm{j}\;\operatorname{sign}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{\pi f} \tag{D.23}$$

$$\mathcal{H}\{x(t)\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\lambda)}{t-\lambda}\,\mathrm{d}\lambda \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -\,\mathrm{j}\;\operatorname{sign}(f)X(f) \tag{D.24}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) \tag{D.25}$$

E Trigonometrie/ *Trigonometry*

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \tag{E.1}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \tag{E.2}$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\Big) \tag{E.3}$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big) \tag{E.4}$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\Big) \tag{E.5}$$