Übungen zu Nachrichtentechnik 1

Zusammenstellung der Zusatzfolien aus der Übung

Dipl.-Ing. Johannes Fink | 16. Juli 2014

INSTITUT FÜR NACHRICHTENTECHNIK (CEL)

Organisatorisches

- Übungsleiter:
  Johannes Fink (Johannes.Fink@kit.edu)
- Sprechstunde:
  Mittwoch, 14.00 - 15.00 Uhr, oder nach Vereinbarung
- Übungstermine 2014:
  23.04., 07.05., 21.05., 28.05., 04.06., 25.06., 09.07., 16.07.
- Übungsaufgaben und Zusatzmaterialien:
  - im VAB NT1
  - Übungsaufgaben normalerweise eine Woche vorher online
  - mit * markierte Aufgaben werden vorgerechnet
  - weitere Aufgaben dienen der Intensivierung des Stoffes und der Klausurvorbereitung
- Diskussionsforum:
  im VAB NT1 $\rightarrow$ Vor- und Nachbesprechung der Übung, Errata

Klausur

Karlsruher Institut für Technologie

- Datum:
  06.10.2014, 15.00h - 18.00h
  Anmeldeschluss beachten!
- Hilfsmittel
  - ein doppelseitig und **eigenhändig** beschriebenes DIN A4 Blatt
  - ein nicht-programmierbarer Taschenrechner
- Klausuranhang:
  - notwendige Formeln (z.B. Fourierkorrespondenzen, Tabelle der Standardnormalverteilung) werden an die Aufgabenblätter angehängt sein
  - Anhang vorher im VAB zum Download
- Vorbereitung:
  1. Übungsaufgaben
  2. Zum Großteil: alte Klausuren

Über dieses Dokument...

Bemerkung: *Dieses Dokument ist eine Zusammenstellung der Zusatzfolien aus der Übung, in denen teilweise wichtige Begriffe wiederholt, Theoriekapitel kurz zusammengefasst oder wichtige Rechentechniken erläutert werden. Es stellt bei weitem keine vollständige Zusammenfassung der Theorie dar und sollte daher nicht als einziges Dokument zum Lernen verwendet werden. Maßgebend ist das Textbuch Jondral: "Nachrichtensysteme", erschienen 2011 in der 4. Auflage im Schlembach Fachverlag.*

Falls Sie Fehler in diesem Dokument finden, zögern Sie bitte nicht, mich zu benachrichtigen: Johannes.Fink@kit.edu

Stochastische Prozesse

Karlsruher Institut für Technologie

Ein **stochastischer Prozess** $X\{t, \xi\}$ ist eine Familie von Zufallsvariablen.

- t ist üblicherweise die Zeit.
- ξ stellt eine Realisierung dar.
- **ergodisch**: Alle Eigenschaften des Prozesses können aus einer Realisierung abgelesen werden. Ergodizität kann nur schwer nachgewiesen werden und wird im Folgenden immer als gegeben vorausgesetzt, d.h. es werden nur Prozesse $X(t)$ betrachtet.
- Betrachtet man einen stochastischen Prozess zu einem festen Zeitpunkt t_0, so erhält man eine Zufallsvariable.
- Stochastische Prozesse können durch ihre Verteilungsfunktion $F_X(x, t)$ beschrieben werden.

Stochastische Prozesse: Erwartungswert und Kreuzkorrelation

- Der Erwartungswert ist definiert als:

$$\mathrm{E}\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x,t) dx$$

- Für den Erwartungswert gilt:

$$\mathrm{E}\{cX(t) + d\} = c\mathrm{E}\{X(t)\} + d$$

- Die Kreuzkorrelationsfunktion beschreibt eine Beziehung zwischen zwei stochastischen Prozessen. Sie kann als eine Art Ähnlichkeitsmaß interpretiert werden:

$$\varphi_{XY}(t_1, t_2) = \mathrm{E}\{X(t_1)Y(t_2)^*\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{t_1} y_{t_2}^* f_{XY}(x_{t_1}, y_{t_2}) dx_{t_1} dy_{t_2}$$

Für $X(t) = Y(t)$ ergibt sich die Autokorrelationsfunktion.

Stochastische Prozesse: Unabhängigkeit und Unkorreliertheit

- Sind zwei stochastische Prozesse **unabhängig**, so ist

$$f_{XY}(x_{t_1}, y_{t_2}) = f_X(x_{t_1}) \cdot f_Y(y_{t_2})$$

  und

$$\varphi_{XY}(t_1, t_2) = \mathrm{E}\{X(t_1)\}\mathrm{E}\{Y^*(t_2)\}.$$

- Letzteres wird als **Unkorreliertheit** bezeichnet.
- Aus der Unabhängigkeit folgt immer die Unkorreliertheit. Umgekehrt gilt dies im Allgemeinen nicht. Bei normalverteilten Zufallsvariablen kann jedoch von Unkorreliertheit auf Unabhängigkeit geschlossen werden.

Stochastische Prozesse: Leistungsdichtespektrum, Stationarität

Karlsruher Institut für Technologie

- Als Leistungsdichtespektrum wird die Fouriertransformierte der Autokorrelationsfunktion bezeichnet:

$$\Phi_{XX}(f) = \mathcal{F}\{\varphi_{XX}(\tau)\}$$

- **(Schwache) Stationärität:** Ein stochastisches Signal $X(t)$ ist schwach stationär, wenn folgende *beide* Bedingungen erfüllt sind:
  1. Sein Erwartungswert $E\{X(t)\}$ ist konstant für alle t.
  2. Seine AKF $\varphi(t_1, t_2)$ hängt nur von der Zeitdifferenz $\tau = t_2 - t_1$ ab.

Bandpass - Tiefpass: Was ist was?

Tiefpasssignal: Trägerfrequenz $f_\mathrm{T} = 0$ Hz $\Rightarrow$ gesamte spektrale Leistung um 0 Hz konzentriert.

Bandpasssignal: Trägerfrequenz viel größer, als die Signalbandbreite: $f_\mathrm{T} \gg B$.

Praxis:

- Funkübertragung findet praktisch immer im Bandpassbereich statt
- Übertragung auf Kabeln in beiden Bereichen möglich
- Digitale Verarbeitung im Rechner: Tiefpassbereich (komplexes Basisband)

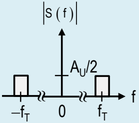
Bandpass - Tiefpass: Beispiele

Tabelle: Übertragungsverfahren und ihre Eigenschaften

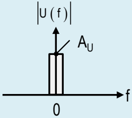
Verfahren	B	f_{T}	$\frac{f_{\mathrm{T}}}{B}$	BP / TP
GSM 900	200 kHz	900 MHz	4500	BP
DCF77	440 Hz	77,5 kHz	176	BP
ISDN	128 kHz	64 kHz	0,5	TP
ADSL	972 kHz	614 kHz	0,63	TP

Bandpassdarstellung - Basisbanddarstellung

Sende-**Signal**

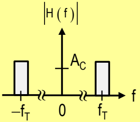


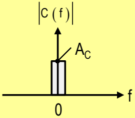
$S(f)$ $\qquad S(f) = \frac{1}{2}\left(U(f - f_T) + U^*(-f - f_T)\right) \qquad$ $U(f)$



Kanal (System):

$\boxed{H(f)}$ $\qquad H(f) = C(f - f_T) + C^*(-f - f_T) \qquad$ $\boxed{C(f)}$



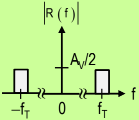


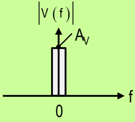
Empfangs-**Signal**

$R(f)$ $\qquad R(f) = \frac{1}{2}\left(V(f - f_T) + V^*(-f - f_T)\right) \qquad$ $V(f)$

$R(f) = S(f) \cdot H(f)$

$V(f) = U(f) \cdot C(f)$





Energie und Leistung eines Signals

Sei $u(t)$ das äquivalente Basisbandsignal zum Bandpasssignal $s(t)$ und $U(f)$ und $S(f)$ die zugehörigen Fouriertransformierten, so ergibt sich

- die **Energie** des Signals durch:
  - Berechnung im Bandpassbereich:
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\mathrm{d}t$$
  - Berechnung im Basisband:
$$E = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2\mathrm{d}t$$
- und die **Leistung** des Signals:
  - Berechnung im Bandpassbereich:
$$P = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2\mathrm{d}f$$
  - Berechnung im Basisband:
$$P = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |U(f)|^2\mathrm{d}f$$

Zur Definition der Information

Es gibt gute Gründe, warum Shannon, der Begründer der Informationstheorie, eine Information als $I(x) = -\log_2 P(x)$ definiert hat.

- Eine Information soll nie negativ sein. Dies ist gegeben, da die Wahrscheinlichkeit $P(x)$ immer kleiner gleich Eins ist und somit die Information Werte von 0 bis ∞ annehmen kann.
- Seltene Ereignisse sollen mehr Information tragen als häufige.
- Die Information von zwei unabhängigen Ereignissen soll gleich der Summe der Einzelinformationen sein. Dies ist ebenfalls beim Logarithmus gegeben: $\log\left(P(x_1)P(x_2)\right) = \log P(x_1) + \log P(x_2)$
- Die Wahl des 2er Logarithmusses ist der guten Umsetzbarkeit binärer Signale im Rechner geschuldet.

Entropie, Transinformation, Kanalkapazität

- Die **Entropie** einer Quelle ist die mittlere Information, die die von ihr erzeugten Zeichen tragen. Selbstverständlich können Sie auch die Entropie einer Senke betrachten.
- Die **Transinformation** ist nun ein Maß dafür, wie viel Information über einen Kanal übertragen werden kann. Ist die Transinformation Null, wird über den Kanal keine Information übertragen.
- Die **Kanalkapazität** ist das Maximum der mittleren Transinformation und ist ein Maß für die maximal über einen Kanal übertragbare Datenrate. Die Kanalkapazität ist eine theoretische Obergrenze und sagt nichts darüber aus, was man technisch tun muss, um eine solche Datenrate zu erreichen.

(Schwache) Kanalsymmetrie

Diskrete Übertragungskanäle können ganz allgemein durch eine Kanalmatrix

$$\overline{\mathrm{P}}(Y|X) = \begin{bmatrix} P(y_1|x_1) & \cdots & P(y_m|x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P(y_1|x_n) & \cdots & P(y_m|x_n) \end{bmatrix}$$

beschrieben werden. Die Matrix gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein bestimmtes Eingangssymbol x_n auf ein bestimmtes Ausgangssymbol y_m abgebildet wird.

- Ein Kanal ist schwach symmetrisch, wenn alle Zeilen der Kanalmatrix Permutationen voneinander sind. Sind zusätzlich noch alle Spalten Permutationen voneinander, so ist der Kanal stark symmetrisch.
- Bei einem symmetrischen Kanal ergibt sich die maximale mittlere Transinformation bei einer Gleichverteilung der Eingangssymbole.
- Die Umkehrung dieser Aussage, dass bei gleichwahrscheinlichen Eingangssymbolen ein symmetrischer Kanal die mittlere Transinformation maximiert gilt nicht.

Quellencodierung: Präfixeigenschaft

Definition: **Präfixeigenschaft (kommafrei):**
Kein Codewort ist der Beginn eines anderen Codeworts.

$\Rightarrow$ Alle zu übertragenden Codewörter können nahtlos hintereinander gesendet werden, ohne dass zwischen ihnen ein spezielles Trennwort (Komma) stehen muss. $\Rightarrow$ Geringere zu übertragende Datenmenge.

Tabelle: Beispiele Präfixeigenschaft

X	A	B	C	Präfixeigenschaft
Code I	00	01	10	erfüllt!
Code II	0	1	01	nicht erfüllt!

Kanalcodierung: Blockcodierung

(n,k)-Code: Abbildung k-Bit Datenwort (Infowort) $\vec{d}^{\mathrm{T}} = (d_1 d_2 \dots d_k)$ auf n-Bit Codewort $\vec{c}^{\mathrm{T}} = (c_1 c_2 \dots c_n)$

- **Coderate:** $r = \frac{k}{n}$
- **Linear:** Die Codebits ergeben sich als Linearkombination der Infobits: $c_j = \sum_{i=1}^{k} d_i g_{ij}$. Daraus folgt, dass die Summe zweier CW in GF(2) wieder ein gültiges CW ist.
- **Systematisch:** $c_i = d_i \, \forall \, i = 1, 2, \dots k \quad \Rightarrow \vec{c}^{\mathrm{T}} = (d_1 d_2 \dots d_k c_{n-k+1} \dots c_n)$
- **Zyklisch:** Jede zyklische Verschiebung eines CW ergibt wieder ein gültiges CW.

Encodierung: $\vec{c}^{\mathrm{T}} = \vec{d}^{\mathrm{T}} \overline{\mathrm{G}}$ mit Generatormatrix $\overline{\mathrm{G}} = [\overline{\mathrm{I}}_k \overline{\mathrm{P}}]$

Hammingabstand: Anzahl unterschiedl. Bits zwischen zwei Bitfolgen.

Minimaler Hammingabstand: $d_{\min}$. Da Nullwort $(00 \dots 0)$ immer Teil eines linearen Blockcodes ist, muss nur mit diesem verglichen werden!

Korrigierbarkeit von t Fehlern: $d_{\min} \geq 2t + 1$

Syndromdecodierung

Syndrom: $\vec{s}^{\mathrm{T}} = \vec{r}^{\mathrm{T}} \mathrm{H}^{\mathrm{T}}$ mit der Paritycheckmatrix $\mathrm{H} = [\mathrm{P}^{\mathrm{T}} \mathrm{I}_{n-k}]$

- kein Übertragungsfehler $\Rightarrow \quad \vec{s} = \vec{0}$
- $\vec{s} \neq \vec{0} \Rightarrow$ Übertragungsfehler mit Fehlermuster $\vec{e}$, so dass gilt: $\vec{r} = \vec{c} + \vec{e}$
- Aus dem Syndrom kann auf die verfälschten Bits geschlossen werden, sofern dies die Korrigierbarkeit des Codes zulässt. Bei Korrigierbarkeit eines Fehlers genügt der Vergleich des Syndroms mit den Spalten der Paritycheckmatrix.

Viterbi-Decodierung

1. Erstellen eines Trellis durch Ablesen aus dem Zustandsdiagramm.
2. Ordentliche Beschriftung der Übergänge z.B. nach der Notation $d_1 d_2 \ldots d_n | c_1 c_2 \ldots c_m$ wobei $d_1 d_2 \ldots d_n$ die Eingangsbits darstellen, die zu der entsprechenden Zustandsänderung führen. $c_1 c_2 \ldots c_m$ sind die dabei resultierenden Codebits.
3. Für jeden möglichen Zustandsübergang wird die Hammingdistanz bzw. die Euklidische Distanz zwischen den Empfangssymbolen und den möglichen Sendesymbolen gebildet und zu der akkumulierten Distanz addiert.
4. Enden mehrere Pfade in einem Knoten, wird derjenige gewählt, der die geringere Distanz hat („Survivor“). Haben mehrere Pfade die gleiche Distanz, so entscheidet das Los für einen der beiden, sie sind gleichwahrscheinlich.
5. Sind alle Survivor bestimmt, wird der Gesamtpfad mit der geringsten Distanz zurückverfolgt und die entsprechenden Eingangsbits herausgeschrieben.

PSK Grundlagen

M-PSK: Phase Shift Keying (dt. *Phasenumtastung*) mit M Symbolen, die im Konstellationsdiagramm auf einem Kreis mit dem Durchmesser A liegen, welcher der Amplitude des Sendesignals entspricht. Zum Abtastzeitpunkt wird eines der M Symbole gesendet. Der Verlauf der Übergänge zwischen zwei Symbolen (Trajektorie) hängt vom Impulsformer und der verwendeten PSK-Variante ab.

D = Differenziell: Es wird die Differenzphase zweier aufeinanderfolgender Symbole übertragen $\Rightarrow$ keine Phasenkohärenz notwendig, d.h. Kenntnis der absoluten Phase nicht notwendig (d.h. Phasenmehrdeutigkeiten = Drehungen des Konstellationsdiagramms egal) $\Rightarrow$ Keine Phasensynchronisation notwendig.

Amplitudenschwankungen: Je näher Trajektorien am Ursprung vorbeigehen, desto stärker bricht in diesem Moment die Amplitude des Sendesignals ein. Das erfordert die Verwendung von Verstärkern mit einem großen linearen Bereich. Diese sind teuer und (Leistungs-)ineffizient. $\Rightarrow$ In der Praxis werden PSK-Varianten

PSK Varianten

QPSK = 4-PSK: Quadrature Phase Shift Keying, PSK mit 4 Symbolen.

O = Offset: Real- und Imaginärteil der Symbole werden zeitlich versetzt umgetastet $\Rightarrow$ keine Phasensprünge um $\pi \Rightarrow$ kein Amplitudeneinbruch bis auf Null!

φ-M-PSK: Konstellationsdiagramm ist aus der Nullage um φ gedreht.

$\frac{\pi}{4}$-DQPSK: Differenzielles Verfahren, bei dem bei jedem 2. Symbol ein um $\frac{\pi}{4}$ gedrehtes Konstellationsdiagramm verwendet wird $\Rightarrow$ kein Amplitudeneinbruch bis auf Null! Keine Phasensynchronisation notwendig!

A.33 - Wie kommt man zur bedingten Dichte?

$$f_X(x_k) = \frac{1}{3}\delta(x_k - 1) + \frac{2}{3}\delta(x_k + 1) \quad \text{und} \quad f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2}$$

Gemeinsame Dichte (beachte Unabhängigkeit von X und N):

$$f_{X,N}(x_k, n) = f_X(x_k) f_N(n) = \frac{1}{3}\delta(x_k - 1)\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2} + \frac{2}{3}\delta(x_k + 1)\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2} \qquad (1)$$

Bedingte Dichte:

$$f_R(r|x_k) = \frac{f_{X,N}(x_k, n)}{f_X(x_k)}, \quad \text{falls } f_X(x_k) > 0 \,\forall\, x_k$$

Hier nicht erfüllt, da aber X diskret: Direkt einsetzen für $x_k = 1$ und $x_k = -1$ mit $r = x_k + n \Leftrightarrow n = r - x_k$:

$$f_R(r|x_k = 1) = \frac{f_{X,N}(x_k = 1, n)}{f_X(x_k = 1)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(r-1)^2}$$

$$f_R(r|x_k = -1) = \frac{f_{X,N}(x_k = -1, n)}{f_X(x_k = -1)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(r+1)^2}$$

Wiederholung: Normalverteilung

Verteilungsfunktion:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathcal{N}(0;1) dn = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{n^2}{2}} dn$$

Es gilt:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

$$\int_{a}^{b} \mathcal{N}(0;1) dn = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Standardnormalverteilung ist tabelliert (Klausuranhang), daher muss, um Werte angeben zu können auf diese umgeformt werden, sofern keine Standardnormalverteilung vorliegt. Dies geschieht durch die Substitution:

$$Y := \frac{X - \mu}{\sigma}$$