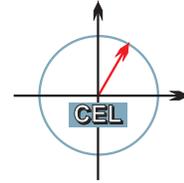




Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Prof. Dr.rer.nat. Friedrich K. Jondral



Übungen zur Vorlesung

Nachrichtentechnik I

Dipl.-Ing. Johannes Fink
johannes.fink@kit.edu

Stand: 20. April 2015

Vorbemerkung

Allgemeine Hinweise zur Übung

Im folgenden finden Sie Übungsaufgaben zur Vorlesung *Nachrichtentechnik I*. Um Ihnen die Möglichkeit zu geben, sich ausführlich auf die Klausur vorzubereiten, werden teilweise mehr Aufgaben abgedruckt sein, als in der Übung vorgerechnet werden können. Durch die ausführliche Darstellung sollte ein Nachvollziehen der Lösungen auch außerhalb der Übung möglich sein, so dass in der Übung mehr Zeit für die Diskussion schwierigerer Probleme und Aufgaben bleibt.

Sollten nach der Übung noch Fragen offen geblieben sein, so können wir diese gerne im Forum zur Vorlesung im ILIAS (Link siehe Homepage CEL / Vorlesungsverzeichnis) oder Mittwochs von 15.30 Uhr bis 17.00 Uhr in meiner Sprechstunde diskutieren.

Falls Sie Fehler gefunden haben oder Kritik an der Übung äußern möchten, so zögern Sie bitte nicht, mir eine Email an Johannes.Fink@kit.edu zu schreiben.

Termine

Die Übung findet im Sommersemester 2015 an folgenden Terminen statt:

| Übung | Datum | Thema |
|-------|------------|--|
| 1 | 22.04.2014 | Stochastische Prozesse, Signale und Systeme |
| 2 | 06.05.2014 | Äquivalentes Tiefpasssystem, Informationstheorie, Quellencodierung, Mobilfunkkanal |
| 3 | 20.05.2014 | Blockcodierung, Faltungscodierung |
| 4 | 10.06.2014 | Modulationsverfahren, OFDM |
| 5 | 24.06.2014 | Entscheidungstheorie, Demodulation |
| 6 | 08.07.2014 | Matched Filter, Modulationsverfahren, CDMA |
| 7 | 15.07.2014 | Wiederholung und Prüfungsfragen |

Die mit * gekennzeichneten Aufgaben werden, sofern es die Zeit erlaubt, in der Saalübung vorgerechnet.

Prüfung

Die nächste schriftliche Prüfung findet am **31.07.2015 von 14:00 bis 17:00 Uhr** statt. Die Prüfungsdauer beträgt drei Stunden.

Als *Hilfsmittel* ist bei der Prüfung ein beidseitig von eigener Hand mit Bleistift, Kugelschreiber, Füller o. Ä. beschriebenes A4-Blatt (Original, keine Kopie) sowie ein nicht programmierbarer Taschenrechner erlaubt. Beachten Sie bitte den Anmeldeschluss.

1. Übung: Stochastische Prozesse, Signale und Systeme

Stand 20. April 2015

Aufgabe 1* [Jon11]

Für die Bewertung von Übertragungsverfahren ist der Kanal, der nur weißes Gauß'sches Rauschen zum Signal addiert, besonders wichtig. Nach seiner englischen Bezeichnung wird dieser Kanal auch *Additive White Gaussian Noise (AWGN)*-Kanal genannt.

- Welche Amplitudenverteilung hat das Störsignal im AWGN-Kanal?
- Geben Sie die Autokorrelationsfunktion (AKF) und das Leistungsdichtespektrum (LDS) des Störsignals an.

Bemerkung: Warum wird so oft von Gaußverteilten Störeinflüssen ausgegangen?

Als Beispiel für eine Rauschquelle wird das thermische Rauschen, das über einem Widerstand abfällt, betrachtet. Auch ohne Anlegen einer äußeren Spannung kann eine elektrische Spannung an den beiden Polen gemessen werden, deren zeitlicher Mittelwert Null ist. Die Spannung wird durch thermisch angeregte Bewegung atomarer Teilchen erzeugt. Diese Spannung ist eine Zufallsvariable X_{Rausch} , die sich aus der additiven Überlagerung von vielen verschiedenen Bewegungen ergibt, also $X_{Rausch} = \sum_n X_n$. Man kann nun die Wahrscheinlichkeitsdichte der Rauschspannung auch ohne Kenntnis der einzelnen Verteilungsfunktionen von X_n bestimmen. Der *Zentrale Grenzwertsatz* [JW02] besagt, dass X_{Rausch} normalverteilt ist, wenn die einzelnen Zufallsvariablen X_n unabhängig und identisch verteilt sind, wovon in diesem Beispiel ausgegangen werden kann. Abbildung 1 zeigt jeweils unterschiedlich lange Summationen von Zufallsvariablen. Im Bild links wurde eine Gleichverteilung angenommen, während im Bild rechts eine quadratische Verteilungsfunktion angenommen wurde. Man erkennt deutlich, dass je länger die Summation ist, desto mehr nähert sich die resultierende Verteilungsfunktion einer Gaußverteilung an. Die Dichte einer Summe von Zufallsvariablen entspricht der Faltung der Einzeldichten.

Aufgabe 2* [Jon11]

Ein reeller weißer Gaußprozess $X(t)$ wird mit einem idealen Tiefpass der Breite $B = \frac{1}{T}$ gefiltert:

- Wie lautet die AKF des Tiefpass-Ausgangsprozesses $Y(t)$?
- $Y(t)$ wird zu den Zeitpunkten $t = kT_A$ abgetastet: Wie muss T_A gewählt werden, damit die Abtastwerte mit dem zeitlichen Abstand T_A unkorreliert sind?

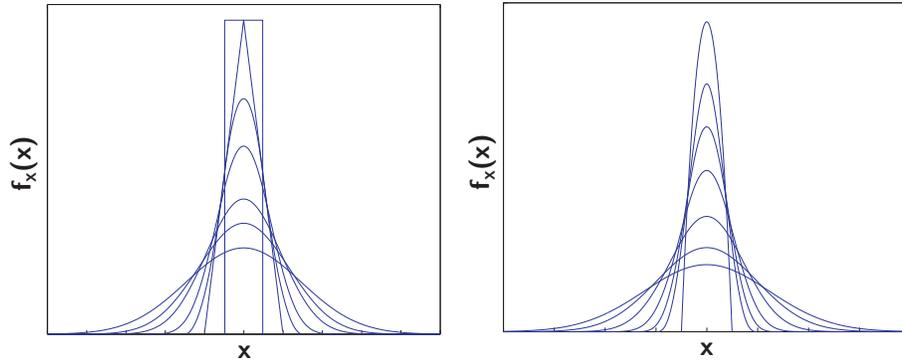


Abbildung 1: Veranschaulichung des zentralen Grenzwertsatzes

Aufgabe 3 [Jon11]

Durch

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

sei ein stochastisches Signal gegeben. Dabei sind ω_0 eine (konstante) Kreisfrequenz und A und B zwei unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen.

Zeigen Sie, dass $X(t)$ genau dann stationär ist, wenn $E\{A\} = E\{B\} = 0$ und $E\{A^2\} = E\{B^2\}$ gilt.

Bemerkung:

Ein stochastisches Signal $X(t)$ ist (schwach) stationär, wenn der Erwartungswert $E\{X(t)\}$ für alle t konstant ist und seine AKF $\varphi(t_1, t_2)$ nur von der Zeitdifferenz $\tau = t_2 - t_1$ abhängt.

Bemerkung: Stochastische Prozesse - Das Wichtigste in Kürze [JW02]

- a) Ein stochastischer Prozess $X\{t, \xi\}$ ist eine Familie von Zufallsvariablen. t ist üblicherweise die Zeit, während ξ eine Realisierung darstellt. Ist der Prozess ergodisch, können alle Eigenschaften des Prozesses aus einer Realisierung abgelesen werden. Ergodizität kann nur schwer nachgewiesen werden und wird im Folgenden immer als gegeben vorausgesetzt, d.h. es werden nur Prozesse $X(t)$ betrachtet. Betrachtet man einen stochastischen Prozess zu einem festen Zeitpunkt t_0 , so erhält man eine Zufallsvariable. Stochastische Prozesse können - genauso wie Zufallsvariablen - durch ihre Verteilungsfunktion $F_X(x, t)$ beschrieben werden.
- b) Der Erwartungswert ist definiert als:

$$E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x, t) dx$$

Für den Erwartungswert gilt:

$$E\{cX(t) + d\} = cE\{X(t)\} + d$$

- c) Die Korrelation beschreibt eine Beziehung zwischen zwei stochastischen Prozessen. Sie kann als eine Art Ähnlichkeitsmaß interpretiert werden.

$$\varphi_{XY}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)Y(t_2)^*\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{t_1} y_{t_2}^* f_{XY}(x_{t_1}, y_{t_2}) dx_{t_1} dy_{t_2}$$

- d) Sind zwei stochastische Prozesse unabhängig, so ist $f_{XY}(x_{t_1}, y_{t_2}) = f_X(x_{t_1}) \cdot f_Y(y_{t_2})$ und $\varphi_{XY}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)\}E\{Y^*(t_2)\}$. Dies wird als Unkorreliertheit bezeichnet. Aus der Unabhängigkeit folgt immer die Unkorreliertheit. Umgekehrt gilt dies im Allgemeinen nicht. Bei normalverteilten Zufallsvariablen kann jedoch von Unkorreliertheit auf Unabhängigkeit geschlossen werden.
- e) Als Leistungsdichtespektrum wird die Fouriertransformierte der Autokorrelationsfunktion bezeichnet:

$$\Phi_{XX}(f) = \mathcal{F}\{\varphi_{XX}(\tau)\}$$

Aufgabe 4* [F2012]

Gegeben ist der folgende stochastische Prozess:

$$Z(t) = X \sin(2\pi f_T t + Y).$$

X und Y sind stochastisch unabhängig und beschreiben jeweils eine Gleichverteilung im Intervall $[-\pi, \pi)$.

- Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion von $Z(t)$.
- Ist $Z(t)$ stationär? Begründung!

Aufgabe 5

Die vektorielle Zufallsvariable $\vec{X} = (X_1, X_2)^T$ besitze eine zweidimensionale Normalverteilung mit dem Erwartungswertvektor $\vec{\mu}_x = (\mu_{x_1}, \mu_{x_2})^T$. Ihre Dichtefunktion ist gegeben durch

$$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho \frac{(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} \right] \right\}$$

mit dem Korrelationskoeffizient ρ .

Zeigen Sie: Sind X_1 und X_2 unkorreliert, dann sind sie auch stochastisch unabhängig.

Aufgabe 6 [Jon11]

Gegeben sei der in Bild 2 gezeigte Schaltkreis. Das Eingangssignal $X(t)$ ist ein stationärer stochastischer Prozess mit $E\{X(t)\} = 0$ und $\varphi_{XX}(\tau) = \sigma^2\delta(\tau)$, d.h. $X(t)$ ist ein weißes Rauschen.

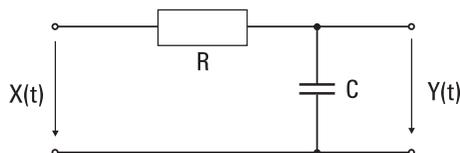


Abbildung 2: Schaltkreis eines RC-Tiefpasses

- Bestimmen Sie das Leistungsdichtespektrum $\Phi_{YY}(f)$ des Ausgangssignals $Y(t)$.
- Bestimmen Sie $\varphi_{YY}(\tau)$ und $E\{Y^2(t)\}$.

Aufgabe 7 [F2011]

Gegeben ist die Gabelschaltung aus Abbildung 3, die in der analogen Telefonie zur Echounterdrückung zwischen Mikrophon und Lautsprecher genutzt wird. Hiermit ist es möglich, eine Zweidrahtleitung (öffentliches Telefonnetz) auf eine Vierdrahtleitung (Telefonhörer) umzuschalten. Das Ziel der Schaltung ist, dass $u_{aus}(t)$ keine Anteile von $u_{ein}(t)$ enthält. Hierzu wird ein Differentialtransformator genutzt, der sekundärseitig zwei identische, gegenphasig in Reihe geschaltete Spulen enthält. Die primärseitige Spannung $u_{aus}(t)$ ist dann gegeben als $u_{aus}(t) = \alpha(u_1(t) - u_2(t))$.

- Stellen Sie die Spannungen $u_1(t)$ und $u_2(t)$ in Abhängigkeit von den über Z_1 und Z_2 abfallenden Spannungen und der Eingangsspannung $u_{ein}(t)$ dar.
- Welche Impedanz muss Z_2 haben, damit das Echo ideal unterdrückt wird, d.h. dass $u_{aus}(t) = 0$ ist?
- Berechnen Sie den Betrag der Übertragungsfunktion $|H(f)| = \left| \frac{U_{Z1}(f)}{U_{ein}(f)} \right|$. Z_1 sei reell.

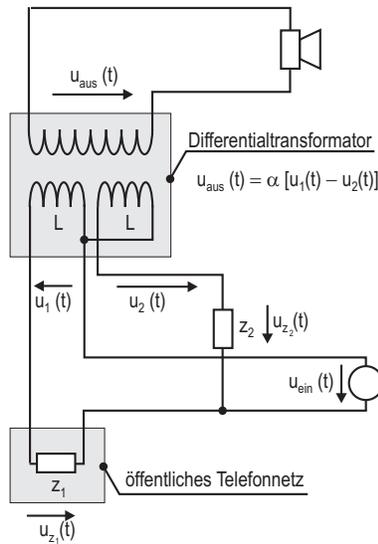


Abbildung 3: Gabelschaltung

- d) $u_{ein}(t)$ sei nun ein reeller, weißer Prozess mit der mittleren Leistung σ^2 . Geben Sie die Autokorrelationsfunktion von $u_{z1}(t)$ an.
- e) Skizzieren Sie die Autokorrelationsfunktionen von $u_{ein}(t)$ und von $u_{z1}(t)$.
- f) Können durch Abtastung von $u_{z1}(t)$ unkorrelierte Abtastwerte gewonnen werden? Begründung!

Aufgabe 8* [H2011]

In der folgenden Abbildung finden Sie das Ersatzschaltbild einer Ferritstabantenne, die unter anderem zum Empfang von Langwellensignalen genutzt wird.

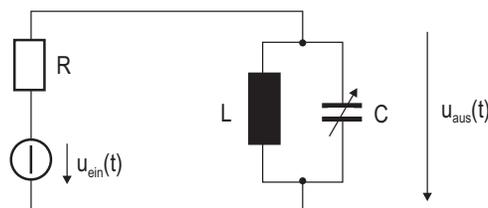


Abbildung 4: Ersatzschaltbild einer Ferritstabantenne

- a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H(f) = \frac{U_{aus}(f)}{U_{ein}(f)}$ sowie deren Betrag $|H(f)|$.
- b) Die Spule hat eine Induktivität von 7 mH. Welche Kapazität müssen Sie einstellen, um einen Radiosender mit der Trägerfrequenz $f_T = 150$ kHz zu empfangen.
Hinweis: Die Resonanzfrequenz ist die Frequenz, bei der die Übertragungsfunktion rein reell ist.
- c) Sie wissen durch Messungen, dass die Autokorrelationsfunktion des Eingangssignals $u_{ein}(t)$ den in der folgenden Abbildung dargestellten Verlauf hat. Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum des Ausgangssignals $u_{aus}(t)$.

Aufgabe 9 [F2012]

In der folgenden Abbildung finden Sie das Schaltbild eines Hüllkurvendetektors, wie er in einfachen AM-Rundfunkempfängern zur Demodulation genutzt wird. Das Eingangssignal wird durch die Diode gleichgerichtet und durchläuft dann eine Filterung.

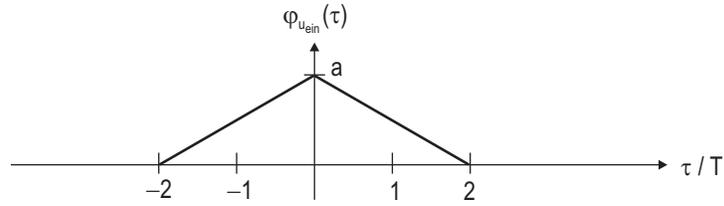
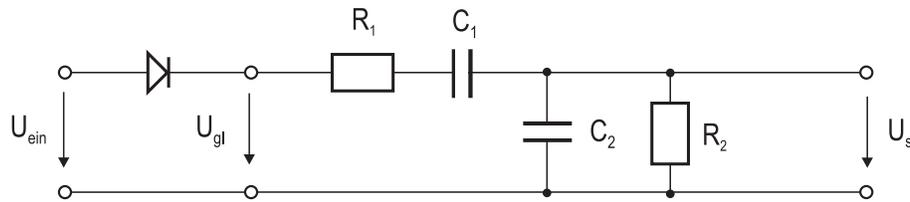


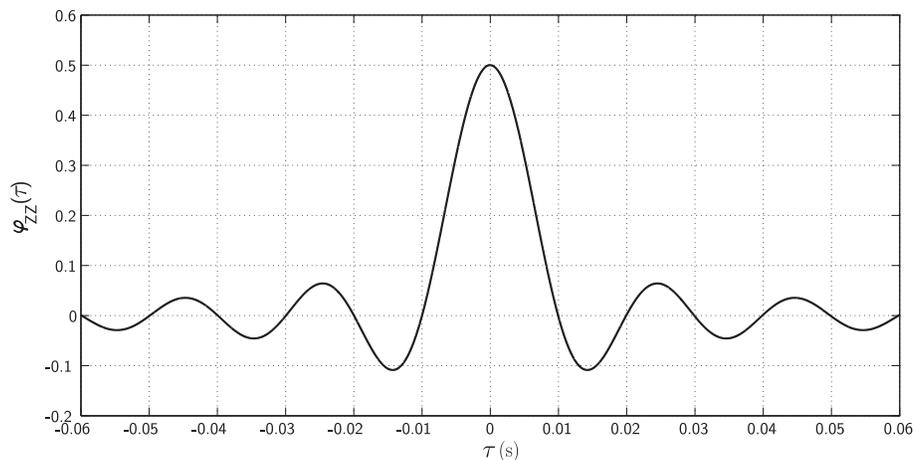
Abbildung 5: Autokorrelationsfunktion von $u_{\text{ein}}(t)$



- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Filters $H(f) = \frac{U_s(f)}{U_{\text{gl}}(f)}$ sowie deren Betrag $|H(f)|$.
- Um welchen Filtertyp handelt es sich? Begründung!

Aufgabe 10 [F2012]

Sie möchten ein unbekanntes Filter vermessen, indem Sie als Eingangssignal weißes Rauschen anlegen. In der folgenden Abbildung ist die AKF des am Ausgang gemessenen Signals dargestellt.



Um welchen Filtertyp handelt es sich? Geben Sie die Übertragungsfunktion an.

Aufgabe 11* [F2011]

Gegeben ist das Spektrum $S(f)$ des Signals $s(t)$:

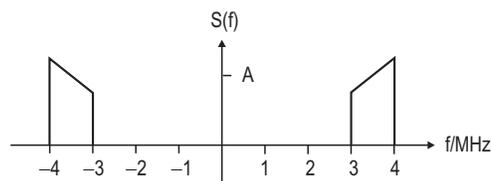


Abbildung 6: Spektrum $S(f)$ von $s(t)$

Das Signal $s(t)$ wird nun mittels der in Abbildung 7 dargestellten Mischerstufe gemischt.

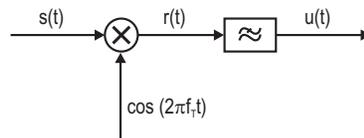


Abbildung 7: Mischerstufe

Die Trägerfrequenz ist $f_T = 2$ MHz, der Tiefpass kann als ideal angenommen werden und hat eine Grenzfrequenz von $f_G = 3$ MHz.

- Skizzieren Sie die Spektren der Signale $r(t)$ und $u(t)$ im Bereich von $-6\text{MHz} < f < 6\text{MHz}$. Achten Sie auf korrekte Beschriftung der Achsen.
- Warum ist $u(t)$ kein Tiefpasssignal?
- Sind die Signale $s(t)$ und $u(t)$ komplex oder reell? Begründung!
- Mit welchem Signal müssen Sie $s(t)$ multiplizieren, damit $u(t)$ das äquivalente Tiefpasssignal zu $s(t)$ ist?
- Skizzieren Sie das Spektrum des zu $s(t)$ äquivalenten Tiefpasssignals.

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1

- a) Die Amplitudenverteilung eines Gauß'schen Rauschprozesses ist eine Normalverteilung. Sie besitzt also die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad (1)$$

in der die Parameter μ und σ^2 festzulegen sind. Da positive und negative Amplituden des Störsignals derselben Größe gleich häufig auftreten, ist anschaulich klar, dass $\mu = 0$ gilt, aus (1) also

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (2)$$

wird. Die Festlegung von σ^2 ist nicht so einfach, insbesondere weil für den Fall, dass keine Bandbegrenzung vorliegt, die mittlere Leistung des Störprozesses, die durch σ^2 repräsentiert wird, nicht endlich ist. Bild 8 zeigt den AWGN-Kanal. Wenn das Gaußrauschen weiß ist, bedeutet dies, dass alle Frequenzen in

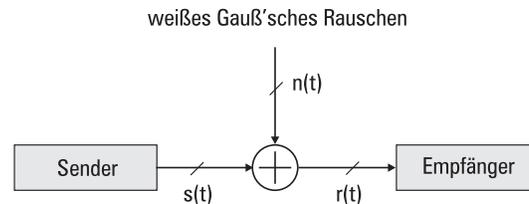


Abbildung 8: AWGN-Kanal

diesem Prozess gleich stark vertreten sind. Bild 9 zeigt das Leistungsdichtespektrum $\Phi(f)$ und die damit über die Fouriertransformation verbundene AKF $\varphi(\tau)$ des Störsignals: $\Phi(f) \bullet \leftrightarrow \varphi(\tau)$. Für ein

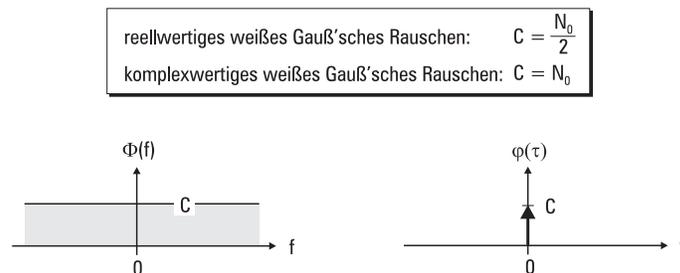


Abbildung 9: Leistungsdichtespektrum und AKF des weißen Gauß'schen Rauschens

tiefpassbegrenztes reellwertiges weißes Gauß'sches Rauschen ergibt sich das Leistungsdichtespektrum (siehe auch Bild a)

$$\Phi(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & \text{für } |f| \leq \frac{B}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Damit berechnet sich die AKF zu

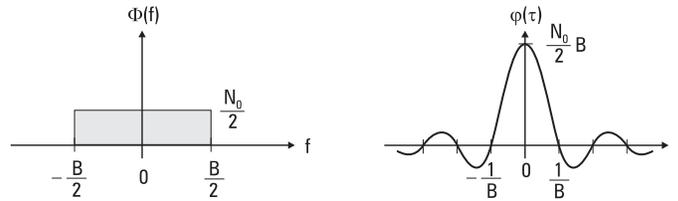


Abbildung 10: Leistungsdichtespektrum und AKF des tiefpassbegrenzten reellwertigen weißen Gauß'schen Rauschens

$$\varphi(\tau) = \frac{N_0}{2} \frac{\sin(\pi B \tau)}{\pi \tau},$$

woraus für die mittlere Leistung und damit für die Varianz in (2)

$$\varphi(0) = \sigma^2 = \frac{N_0}{2} B$$

folgt.

Lösung zu Aufgabe 2

Bild 11 zeigt den Frequenzgang des idealen Tiefpasses und schematisch sein Übertragungsverhalten. Es gilt

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{für } |f| \leq \frac{1}{2T} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$h(t) = \frac{\sin(\pi B t)}{\pi t}.$$

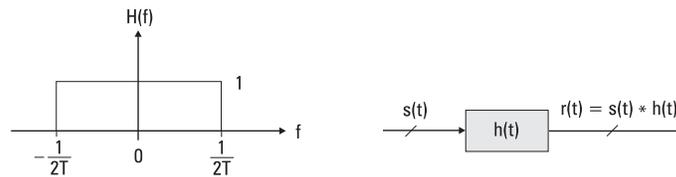


Abbildung 11: Frequenzgang des idealen Tiefpasses

a) Das Leistungsdichtespektrum des Eingangssignals $X(t)$ ist $\Phi_{XX}(f) = \frac{N_0}{2}$ für alle f .

Mit (1.4-4) folgt für das LDS des Ausgangssignals $Y(t)$:

$$\begin{aligned} \Phi_{YY}(f) &= \Phi_{XX}(f) \cdot |H(f)|^2 \\ &= \begin{cases} \frac{N_0}{2} & \text{für } |f| \leq \frac{1}{2T} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

durch Fourierrücktransformation ergibt sich daraus für die AKF des Ausgangssignals $Y(t)$

$$\varphi_{YY}(\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{\sin(\pi B \tau)}{\pi \tau}$$

b) Die Zufallsvariablen $Y(t)$ und $Y(t + \tau)$ sind unkorreliert, wenn ihr Kreuzkorrelationskoeffizient Null ist. Das ist er aber genau dann, wenn die AKF $\varphi_{YY}(\tau)$ verschwindet. Deren Nullstellen liegen bei

$$\tau = k \cdot \frac{1}{B} = kT.$$

Das heißt es ist $T_A = \frac{1}{B}$ zu wählen, damit die Abtastwerte von $Y(t)$ unkorreliert sind.

Lösung zu Aufgabe 3

(i) Es gelte $E\{A\} = E\{B\} = 0$ und $E\{A^2\} = E\{B^2\}$. Offensichtlich folgt $E\{X(t)\} = 0$ für alle t . Für die AKF gilt:

$$\begin{aligned}\varphi(t, t + \tau) &= E\{[A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)] \\ &\quad \cdot [A \cos(\omega_0(t + \tau)) + B \sin(\omega_0(t + \tau))]\} \\ &= E\{A^2 \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_0(t + \tau)) + B^2 \sin(\omega_0 t) \sin(\omega_0(t + \tau))\}, \\ &= E\{A^2\} \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_0(t + \tau)) + E\{B^2\} \sin(\omega_0 t) \sin(\omega_0(t + \tau)),\end{aligned}$$

da die Erwartungswertbildung eine lineare Operation ist und $E\{AB\} = 0$ gilt, weil A und B unabhängige Zufallsvariablen sind. Weiter ist wegen

$$\begin{aligned}\cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)], \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad \text{und} \\ E\{A^2\} &= E\{B^2\} \\ \varphi(t, t + \tau) &= E\{A^2\} \cos(\omega_0 \tau) = \varphi(\tau)\end{aligned}$$

die AKF nur von der Zeitdifferenz τ abhängig. $X(t)$ ist also (schwach) stationär.

(ii) Jetzt sei $X(t)$ stationär, d.h. $E\{X(t)\} = c$ für alle t sowie $\varphi(t, t + \tau) = \varphi(\tau)$. Aus $E\{X(t)\} = c$ für alle t folgt:

$E\{X(t)\} = E\{A\} \cos(\omega_0 t) + E\{B\} \sin(\omega_0 t) \stackrel{!}{=} c$ für alle t . Die letzte Gleichung ist nur erfüllt, wenn $E\{A\} = E\{B\} = 0$ gilt. Wegen der Unabhängigkeit von A und B folgt $E\{AB\} = 0$ und damit muss

$$\begin{aligned}\varphi(t, t + \tau) &= \frac{1}{2} E\{A^2\} [\cos(\omega_0 \tau) + \cos(\omega_0(2t + \tau))] \\ &\quad + \frac{1}{2} E\{B^2\} [\cos(\omega_0 \tau) - \cos(\omega_0(2t + \tau))] \\ &= \varphi(\tau)\end{aligned}$$

gelten. Das geht aber nur, wenn $E\{A^2\} = E\{B^2\}$ erfüllt ist.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Definitionsgemäß ist die Autokorrelationsfunktion für reelle Prozesse $\varphi_{ZZ}(t_1, t_2) = E\{Z(t_1)Z(t_2)\}$. Es gilt also

$$\begin{aligned}\varphi_{ZZ}(t_1, t_2) &= E\{X^2 \sin(2\pi f_T t_1 + Y) \sin(2\pi f_T t_2 + Y)\} \\ &= E\left\{\frac{X^2}{2} [\cos(2\pi f_T(t_1 - t_2)) - \cos(2\pi f_T(t_1 + t_2) + 2Y)]\right\} \\ &= E\left\{\frac{X^2}{2}\right\} E\{\cos(2\pi f_T \tau) - \cos(2\pi f_T(t_1 + t_2)) \cos(2Y) + \sin(2\pi f_T(t_1 + t_2)) \sin(2Y)\}\end{aligned}$$

Der Erwartungswert von $E\{\cos(2Y)\}$ ist

$$E\{\cos(2Y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2y) f_Y(y) dy,$$

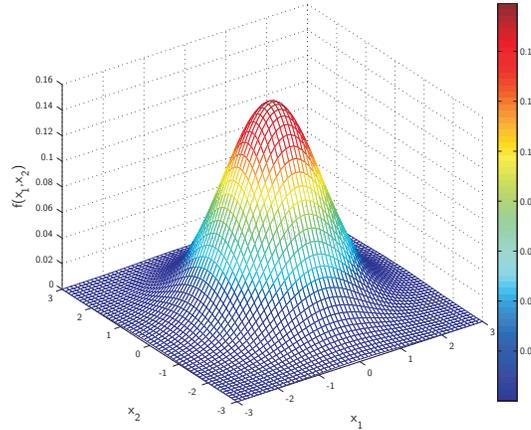


Abbildung 12: 2-dimensionale Normalverteilung mit $\rho = 0$, $\sigma = 1$ und $\mu = 0$

mit der Dichte $f_Y(y) = \frac{1}{2\pi}$ im Bereich von $-\pi$ bis π . Es folgt also

$$E\{\cos(2Y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2y) f_Y(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2y) dy = 0$$

$$E\{\sin(2Y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2y) f_Y(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2y) dy = 0$$

$$E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

Die AKF ist also

$$\varphi_{ZZ}(t_1, t_2) = \frac{\pi^2}{6} \cos(2\pi f_T(t_1 - t_2)) = \varphi_{ZZ}(\tau)$$

b) Der Erwartungswert von $Z(t)$ ist:

$$E\{Z(t)\} = E\{\sin(2\pi f_T t) \cos(Y) + \cos(2\pi f_T t) \sin(Y)\} = 0$$

Da der Erwartungswert konstant ist und die AKF nur von τ abhängt ist $Z(t)$ stationär.

Lösung zu Aufgabe 5

Wenn X_1 und X_2 unkorreliert sind, gilt $\rho = 0$ und aus der Dichte wird

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left\{-\frac{(x_2 - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\} \\ &= f(x_1) \cdot f(x_2). \end{aligned}$$

Das heißt X_1 und X_2 sind unabhängig. Abbildung 12 zeigt die Dichtefunktion einer 2-dimensionalen Standardnormalverteilung.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Der Frequenzgang des Systems ist

$$H(f) = \frac{1}{R + \frac{1}{j2\pi fC}} = \frac{1}{j2\pi fRC + 1}.$$

Es folgt

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + (2\pi fRC)^2} .$$

Mit (1.4-4) und $\varphi_{XX}(\tau) \circ \bullet \Phi_{XX}(f) = \sigma^2$ ergibt sich

$$\Phi_{YY}(f) = \Phi_{XX}(f)|H(f)|^2 = \frac{\sigma^2}{1 + (2\pi fRC)^2} .$$

b) Zunächst wird $\Phi_{YY}(f)$ umgeschrieben:

$$\Phi_{YY}(f) = \frac{\sigma^2}{2RC} \frac{2(\frac{1}{RC})}{(\frac{1}{RC})^2 + (2\pi f)^2}$$

Mit der Korrespondenz (siehe Anhang A)

$$e^{-a|\tau|} \circ \bullet \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}, \quad a > 0,$$

ergibt sich die AKF

$$\varphi_{YY}(\tau) = \frac{\sigma^2}{2RC} e^{-\frac{1}{RC}|\tau|} .$$

Darüber hinaus erhalten wir

$$E\{Y^2(t)\} = \varphi_{YY}(0) = \frac{\sigma^2}{2RC} .$$

Lösung zu Aufgabe 7

a) Die Abbildung 13 zeigt das vereinfachte Ersatzschaltbild der Gabelschaltung. Man kann unmittelbar ablesen, dass

$$u_1(t) = u_{ein}(t) - u_{Z1}(t)$$

$$u_2(t) = u_{ein}(t) - u_{Z2}(t)$$

ist.

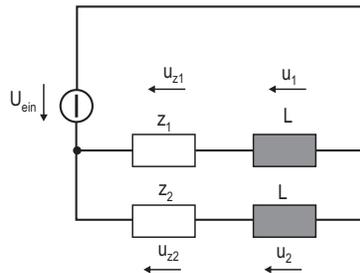


Abbildung 13: Ersatzschaltbild der Gabelschaltung

b) Laut Aufgabenstellung ist $u_{aus}(t) = \alpha(u_1(t) - u_2(t))$ und soll Null werden. Hieraus ergibt sich, mit dem Ergebnis von Aufgabenteil a) dass $u_{Z1}(t) = u_{Z2}(t)$ und dass damit $Z_1 = Z_2$ gelten muss. D.h. die Impedanz des öffentlichen Telefonnetzes Z_1 muss im Telefon ideal nachgebildet werden (Z_2), damit keine Rückkopplungen zu hören sind. In der Praxis sind exakte bzw. zu gute Anpassungen nicht gewünscht, da diese das Gefühl vermitteln, die Leitung sei tot. Eine gewisse Fehlanpassung ist also nicht hinderlich.

c) Unter Anwendung der Spannungsteilerregel ergibt sich

$$H(f) = \frac{U_{Z_1}(f)}{U_{\text{ein}}(f)} = \frac{Z_1}{Z_1 + j2\pi fL}$$

Der Betrag $|H(f)|$ kann nun wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} |H(f)|^2 &= \frac{Z_1^2 - j2\pi Z_1 fL}{Z_1^2 + (2\pi fL)^2} \cdot \frac{Z_1^2 + j2\pi Z_1 fL}{Z_1^2 + (2\pi fL)^2} = \frac{Z_1^2}{Z_1^2 + (2\pi fL)^2} \\ |H(f)| &= \frac{Z_1}{\sqrt{Z_1^2 + (2\pi fL)^2}} \end{aligned}$$

d) Die Autokorrelationsfunktion von $u_{Z_1}(t)$ ist wieder mit $\Phi_{YY}(f) = \Phi_{XX}(f)|H(f)|^2$:

$$\begin{aligned} \varphi_{U_{Z_1}}(\tau) &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sigma^2 \frac{Z_1^2}{Z_1^2 + (2\pi fL)^2} \right\} \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\sigma^2 Z_1}{2L} \cdot \frac{2 \cdot \frac{Z_1}{L}}{\left(\frac{Z_1}{L}\right)^2 + (2\pi f)^2} \right\} \\ &= \frac{\sigma^2 Z_1}{2L} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2 \cdot \frac{Z_1}{L}}{\left(\frac{Z_1}{L}\right)^2 + (2\pi f)^2} \right\}. \end{aligned}$$

Mit der Korrespondenz (siehe Anhang A)

$$e^{-a|t|} \circ \bullet \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}, \quad a > 0,$$

ergibt sich

$$\varphi_{U_{Z_1}}(\tau) = \frac{\sigma^2 Z_1}{2L} e^{-\frac{Z_1}{L}|\tau|}$$

e) Siehe Abbildung 14.

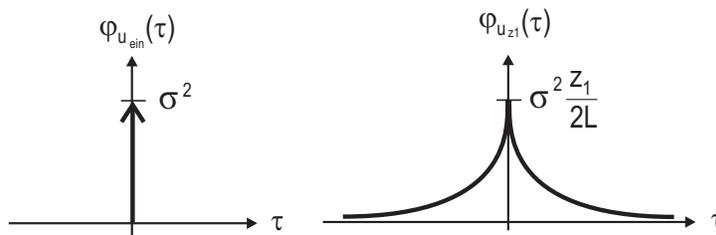


Abbildung 14: Autokorrelationsfunktionen von $u_{\text{ein}}(t)$ und von $u_{Z_1}(t)$

f) Da $\varphi_{U_{Z_1}}(\tau)$ nie ganz Null wird, können die abgetasteten Werte nicht unkorreliert sein.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Die Übertragungsfunktion ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{j\omega L}{\frac{1-\omega^2 LC}{j\omega L + R(1-\omega^2 LC)}} \\ &= \frac{j\omega L(R(1-\omega^2 LC) - j\omega L)}{[R(1-\omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2} \\ &= \frac{(\omega L)^2 - j\omega LR(1-\omega^2 LC)}{[R(1-\omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2} \end{aligned}$$

Woraus sich der Betrag wie folgt berechnen lässt:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{(\omega L)^4 + (\omega LR)^2(1 - \omega^2 LC)^2}{\left([R(1 - \omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2\right)^2}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega L}{\sqrt{[R(1 - \omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2}}$$

b) Da, laut Hinweis, der Imaginärteil verschwinden muss, gilt

$$\text{Im}\{H(j\omega)\} = \frac{\omega^3 L^2 RC - \omega LR}{(\omega L)^2} \stackrel{!}{=} 0,$$

woraus $C = \frac{1}{\omega^2 L} = 160,8 \mu\text{F}$ folgt.

c) Es gilt $\Phi_{YY}(f) = |H(f)|^2 \cdot \Phi_{XX}(f)$ mit

$$\Phi_{XX}(f) = \mathcal{F}\{\varphi_{XX}(\tau)\} = 2T \left(\frac{\sin(2\pi fT)}{2\pi fT} \right)^2 \cdot a.$$

Hiermit berechnet man das Leistungsdichtespektrum des Ausgangssignals:

$$\Phi_{YY}(f) = \frac{2Ta(2\pi fL)^2 \text{si}^2(2\pi fT)}{[R(1 - (2\pi f)^2 LC)]^2 + (2\pi fL)^2}$$

Lösung zu Aufgabe 9

a) Die Übertragungsfunktion und der dazugehörige Betrag lassen sich vergleichbar zu den vorhergehenden Aufgaben berechnen:

$$H(j\omega) = \frac{\frac{R_2(j\omega C_2)^{-1}}{R_2 + (j\omega C_2)^{-1}}}{R_1 + (j\omega C_1)^{-1} + \frac{R_2(j\omega C_2)^{-1}}{R_2 + (j\omega C_2)^{-1}}}$$

$$= \frac{j\omega C_1 R_2}{(1 - \omega^2 C_1 R_1 C_2 R_2) + j\omega(C_1 R_2 + C_1 R_1 + C_2 R_2)}$$

$$|H(\omega)| = \frac{\omega C_1 R_2}{\sqrt{(1 - \omega^2 C_1 R_1 C_2 R_2)^2 + \omega^2 (C_1 R_2 + C_1 R_1 + C_2 R_2)^2}}$$

b) Es handelt sich um einen Bandpassfilter, da jeweils für $\omega \rightarrow 0$ und für $\omega \rightarrow \infty$ $H(\omega) = 0$ ist.

Lösung zu Aufgabe 10

Die Autokorrelationsfunktion des Ausgangssignals kann aus der Abbildung abgelesen werden und ist

$$\varphi_{ZZ}(\tau) = 0,5 \frac{\sin(\pi \tau F)}{\pi \tau F} \quad \text{mit } F = \frac{1}{0,01\text{s}}.$$

Durch Fouriertransformation kann das Leistungsdichtespektrum berechnet werden:

$$\Phi_{ZZ}(f) = \frac{1}{2F} \text{rect}\left(\frac{f}{F}\right) = \begin{cases} \frac{1}{200} & \text{für } |f| < 50 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da das Eingangssignal weiß ist, ist die Übertragungsfunktion

$$G(f) = \sqrt{\Phi_{ZZ}(f)} \cdot \varphi_0,$$

es handelt sich also um einen Tiefpass. Die unbekannte Phase φ_0 kann nur durch Betrachtung der AKF nicht identifiziert werden.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Siehe Abbildung 15.

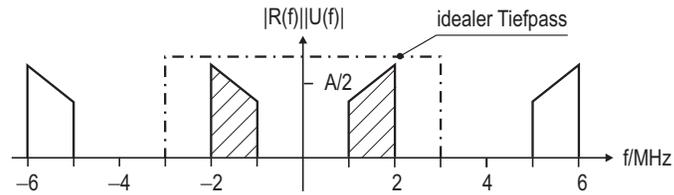


Abbildung 15: Spektren $R(f)$ und $U(f)$

- b) $u(t)$ hat immer noch Bandpasscharakteristik mit einer Trägerfrequenz $f_T = 1,5$ MHz.
- c) Die Spektren $R(f)$ und $U(f)$ sind achsensymmetrisch, d.h. sowohl $r(t)$ als auch $u(t)$ sind reell.
- d) Damit $u(t)$ das äquivalente Tiefpasssignal zu $s(t)$ ist, muss es mit $2e^{-j2\pi f_T t}$ mit der Trägerfrequenz $f_T = 3,5$ MHz gemischt werden.
- e) Durch Multiplikation mit der Funktion $2 \exp\{-2\pi f_T t\}$, was im Frequenzbereich einer Faltung mit der Diracfunktion $\delta(f - f_T)$ entspricht und eine Verschiebung des Spektrums um f_T bedeutet, ergibt sich nach anschließender Tiefpassfilterung das äquivalente Tiefpasssignal aus Abbildung 16.

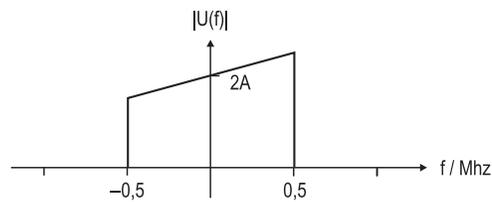


Abbildung 16: Spektrum des zu $s(t)$ äquivalenten Tiefpasssignals

2. Übung: Äquivalentes Tiefpasssystem, Informationstheorie, Quellencodierung, Mobilfunkkanal

Aufgabe 12* [Jon11]

Gegeben sei die Impulsantwort eines Bandpasssystems:

$$h(t) = e^{-\pi(f_0 t)^2} [\sin(40\pi f_0 t) - \sin(36\pi f_0 t)]$$

- Berechnen Sie die Fouriertransformierte $H(f)$ von $h(t)$ und skizzieren Sie $|H(f)|$.
- Bestimmen Sie die komplexe Einhüllende, die Trägerfrequenz und die Phase der Impulsantwort $h(t)$, wenn diese als moduliertes Signal interpretiert wird.
- Berechnen Sie die Impulsantwort $c(t)$ des zu $h(t)$ äquivalenten Tiefpasssystems.
- Berechnen Sie die Fouriertransformierte $C(f)$ von $c(t)$ und skizzieren Sie $|C(f)|$.

Bemerkung: Bandpass - Tiefpass. Was ist was?

Von einem Tiefpasssignal sprechen wir, wenn das Signal die Trägerfrequenz $f_T = 0$ Hz hat, sich die gesamte spektrale Leistung also um 0 Hz konzentriert. Ist die Trägerfrequenz bezogen auf die Signalbandbreite groß, so sprechen wir von einem Bandpasssignal. Die Frage, ab wann die Trägerfrequenz als groß betrachtet werden kann, stellt sich in der Praxis nicht. Denkt man beispielsweise an Mobilkommunikation mittels GSM, so haben die einzelnen Kanäle eine Breite von 200 kHz bei Trägerfrequenzen von 900 MHz bzw. 1800 MHz. Ein anderes Beispiel ist der deutsche Zeitsignalsender DCF77, der bei einer Trägerfrequenz von 77,5 kHz eine Bandbreite von wenigen Hz nutzt. Auch hierbei handelt es sich eindeutig um ein Bandpasssignal.

ISDN ist ein gutes Beispiel für eine Tiefpassübertragung. ISDN nutzt den Frequenzbereich von 0 Hz bis 128 kHz. Die gesamte spektrale Leistung konzentriert sich um 0 Hz. Ein weiteres Beispiel ist ADSL, das den sich anschließenden Frequenzbereich von 128 kHz bis 1,1 MHz nutzt. Hier liegt die Trägerfrequenz nun ca. bei 600 kHz, bei einer Bandbreite von ca. 1 MHz ist dies ebenfalls eindeutig ein Tiefpasssignal.

Bemerkung: Was genau ist die Bandbreite eines Systems?

Die Frage nach der Bandbreite eines Systems ist nicht ganz einfach zu beantworten.

Betrachten wir zuerst ein Signal mit einem ideal rechteckigen Frequenzgang. Sie wissen, dass ein solches Signal nicht erzeugt werden kann, da die Rechteckfunktion mit der $\sin(x)/x$ -Funktion korrespondiert. D.h. für die Erzeugung eines rechteckigen Frequenzganges müsste man ein unendlich langes Signal aussenden und dieses am Empfänger unendlich lange beobachten. Dennoch wird es für theoretische Betrachtungen gerne herangezogen. Bei diesem $\sin(x)/x$ -Zeitsignal ist die Bandbreite einfach zu bestimmen: Sie ist $B = 2/T$. Wird nun der umgekehrte, ebenfalls nicht realisierbare Fall betrachtet, nämlich ein im Zeitbereich rechteckförmiges Signal, ist die Beantwortung der Frage nach der Bandbreite nicht so einfach. Theoretisch ist sie unendlich, da die $\sin(x)/x$ -Funktion zwar abklingt, aber keine Grenzfrequenz angegeben werden kann, ab der die spektrale Leistungsdichte für alle folgenden Frequenzen Null ist. Dies wird gelegentlich als absolute Bandbreite bezeichnet.

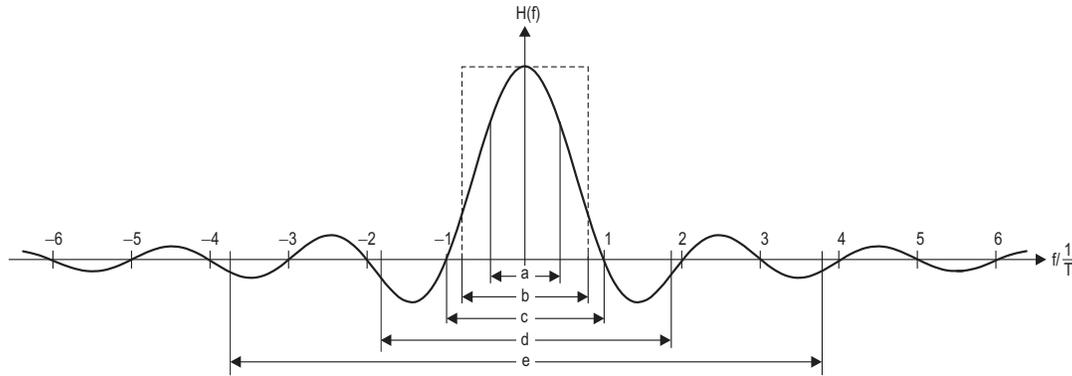


Abbildung 17: Exemplarische Darstellung verschiedener Bandbreitendefinitionen

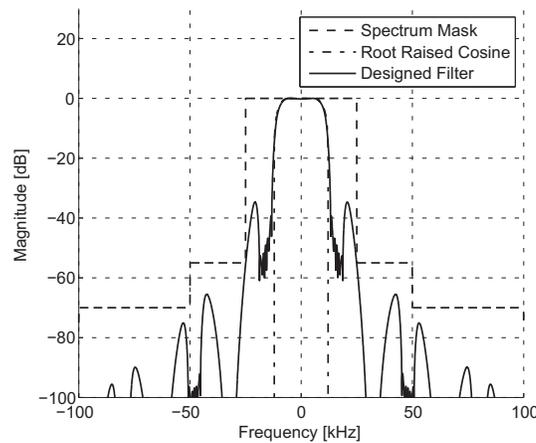


Abbildung 18: TETRA Frequenzmaske [Nag11]

Hat man allerdings wieder die praktische Anwendbarkeit im Kopf, so wird man argumentieren, dass das Signal ab einer gewissen Grenze so weit abgeklungen ist, dass es unter dem Rauschen liegt und als vernachlässigbar gelten kann. Abbildung 17 zeigt exemplarisch die verschiedenen üblichen Bandbreitendefinitionen [Sk101]:

- a) Die Bandbreite ab der die spektrale Leistungsdichte um die Hälfte (3 dB) gefallen ist.
- b) Die Bandbreite, die weißes bandbegrenztetes Rauschen gleicher Leistung hätte.
- c) Die Abstände der ersten Nullstellen von $|H(f)|$.
- d) Die Bandbreite innerhalb derer sich z.B. 99% der spektralen Leistung befinden.
- e) Die Bandbreite innerhalb derer die Amplitude des Spektrums um z.B. 35 dB gesunken ist (vergleiche a))

Ebenfalls von eher theoretischem Interesse ist die Definition der Bandbreite als Wurzel aus dem zweiten Moment des Leistungsdichtespektrums [Kam04] (manchmal RMS-Bandwidth genannt):

$$B = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |H(j\omega)|^2 d\omega}.$$

Alle Funkstandards enthalten Frequenzmasken, die genau angeben, innerhalb welcher Grenzen sich das Funksignal befinden darf. Ein Beispiel für die Frequenzmaske von TETRA ist in Abbildung 18 gezeigt. Auf diese Weise werden die unterschiedlichen Bandbreitendefinitionen umgangen.

Aufgabe 13* [Jon11]

Eine Quelle erzeugt die Buchstaben x_1, x_2, x_3 mit den Wahrscheinlichkeiten $P(x_1) = 0,4$, $P(x_2) = 0,3$ und $P(x_3) = 0,3$. Bild 19 zeigt den Kanal und die Übergangswahrscheinlichkeiten bei der Übertragung dieser Buchstaben.

- Bestimmen Sie die Entropie der Quelle.
- Bestimmen Sie die mittlere Transinformation zwischen Eingang X und Ausgang Y des Kanals.

Bemerkung: Zur Definition der Information

Es gibt gute Gründe, warum Shannon, der Begründer der Informationstheorie, eine Information als $I(x) = -\log_2 P(x)$ definiert hat.

- Eine Information soll nie negativ sein. Dies ist gegeben, da die Wahrscheinlichkeit $P(x)$ immer kleiner gleich Eins ist und somit die Information Werte von 0 bis ∞ annehmen kann.
- Seltene Ereignisse sollen mehr Information tragen als häufige.
- Die Information von zwei unabhängigen Ereignissen soll gleich der Summe der Einzelinformationen sein. Dies ist ebenfalls beim Logarithmus gegeben: $\log(P(x_1)P(x_2)) = \log P(x_1) + \log P(x_2)$
- Die Wahl des 2er Logarithmusses ist der guten Umsetzbarkeit binärer Signale im Rechner geschuldet.

Bemerkung: Entropie, Transinformation und Kanalkapazität

Die Entropie einer Quelle ist die mittlere Information, die die von ihr erzeugten Zeichen tragen. Selbstverständlich können Sie auch eine Entropie einer Senke betrachten. Die Transinformation ist nun ein Maß dafür, wie viel Information über einen Kanal übertragen werden kann. Ist die Transinformation Null, wird über den Kanal keine Information übertragen. Möchten Sie beispielsweise ein defektes Gerät in einem Elektronikmarkt zurückgeben und versuchen schon seit Stunden den Verkäufer von Ihrem Plan zu überzeugen, so müssen Sie irgendwann letztlich einsehen, dass die Transinformation auf dem Kanal zwischen Ihnen und dem Verkäufer sehr gering, wenn nicht sogar Null ist und ihre Information bezüglich des defekten Gerätes wohl nicht ankommen wird.

Die Kanalkapazität ist das Maximum der mittleren Transinformation und ist ein Maß für die maximal über einen Kanal übertragbare Datenrate. Die Kanalkapazität ist eine theoretische Obergrenze und sagt nichts darüber aus, was man technisch tun muss, um eine solche Datenrate zu erreichen.

Aufgabe 14 [Jon11]

Eine Quelle $X = \{x_n; n = 1, 2, \dots, N\}$ liefert $N \in \mathbb{N}$, $N < \infty$, Buchstaben mit den Auftretenswahrscheinlichkeiten $P(x_n) = p_n$.

Zeigen Sie (vergleiche Abschnitt 2.1), dass die Entropie dieser Quelle maximal ist, wenn alle Buchstaben mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten.

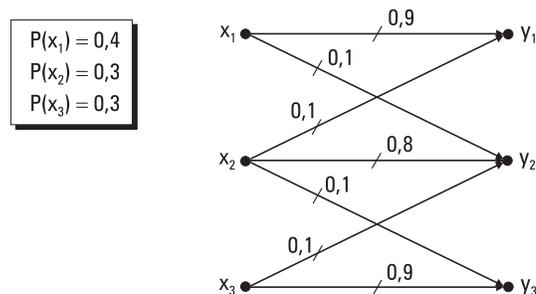


Abbildung 19: Übergangswahrscheinlichkeiten

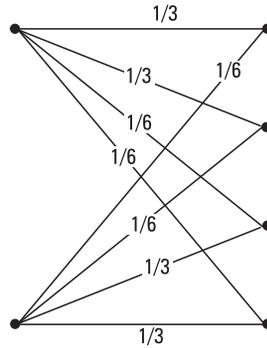


Abbildung 20: Diskreter Kanal

Aufgabe 15 [Jon11]

Zeigen Sie,

- dass die mittlere Transinformation $I(X; Y)$ genau dann verschwindet, wenn X und Y stochastisch unabhängig sind, und
- sonst immer $I(X; Y) > 0$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Gültigkeit der Ungleichung

$$\ln(u) \leq u - 1 \quad \forall u > 0.$$

Aufgabe 16 [Jon11]

Gegeben sei ein zeitdiskreter Kanal mit dem Eingangsalphabet $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, dem Ausgangsalphabet $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ und den Verbundwahrscheinlichkeiten

$$\overline{P_{4,3}} = \begin{bmatrix} P(x_1; y_1) & P(x_1; y_2) & P(x_1; y_3) \\ P(x_2; y_1) & P(x_2; y_2) & P(x_2; y_3) \\ P(x_3; y_1) & P(x_3; y_2) & P(x_3; y_3) \\ P(x_4; y_1) & P(x_4; y_2) & P(x_4; y_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{32} \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie $H(X)$, $H(Y)$, $H(X|Y)$ und $I(X; Y)$.

Aufgabe 17*

Wie müssen die Wahrscheinlichkeiten der Symbole des Eingangsalphabets gewählt werden, damit sich für den in Abbildung 20 skizzierten Fall die maximale mittlere Transinformation ergibt. Geben Sie die Kanalkapazität an.

Bemerkung: (Schwache) Kanalsymmetrie

Diskrete Übertragungskanäle können ganz allgemein durch eine Kanalmatrix

$$\overline{P(Y|X)} = \begin{bmatrix} P(y_1|x_1) & \cdots & P(y_m|x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P(y_1|x_n) & \cdots & P(y_m|x_n) \end{bmatrix}$$

beschrieben werden. Die Matrix gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein bestimmtes Eingangssymbol x_n auf ein bestimmtes Ausgangssymbol y_m abgebildet wird. Ein Kanal ist schwach symmetrisch, wenn alle Zeilen der Kanalmatrix Permutationen voneinander sind. Sind zusätzlich noch alle Spalten Permutationen voneinander, so ist der Kanal stark symmetrisch.

Bei einem symmetrischen Kanal ergibt sich die maximale mittlere Transinformation bei einer Gleichverteilung der Eingangssymbole. Die Umkehrung dieser Aussage, dass bei gleichwahrscheinlichen Eingangssymbolen ein symmetrischer Kanal die mittlere Transinformation maximiert gilt nicht.

Aufgabe 18 [Jon11]

Eine Quelle liefert die Zeichen $X \in \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$ mit folgenden Auftretenswahrscheinlichkeiten:

| | | | | | | | | | |
|--------|------|------|------|------|-----|------|-------|------|-------|
| x | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $P(x)$ | 4/45 | 2/45 | 4/15 | 1/18 | 1/9 | 1/15 | 11/90 | 1/10 | 13/90 |

- Geben Sie die Redundanz der Quelle an.
- Erzeugen Sie einen Huffman-Code für das Alphabet X und berechnen Sie die Redundanz dieses Codes.

Aufgabe 19

Eine Quelle besitzt das Alphabet $\mathcal{A} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$. Die Auftretenswahrscheinlichkeiten können Sie der unten stehenden Tabelle entnehmen.

| | | | | | | | | | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_n | x_0 | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 |
| $P(x_n)$ | 6/90 | 15/90 | 15/90 | 3/90 | 25/90 | 12/90 | 6/90 | 1/90 | 7/90 |

- Erzeugen Sie einen Binärbaum nach dem Huffman-Verfahren. Stellen Sie den resultierenden Binärbaum grafisch dar.
- Welche binäre Codierung ergibt sich mit dem Binärbaum aus Teilaufgabe a) für die Zeichen aus \mathcal{A} ?
- Berechnen Sie die Redundanz des erzeugten Codes.

Aufgabe 20 [F2011]

Eine Quelle X erzeugt die in der folgenden Tabelle aufgeführten Symbole x_n mit den entsprechenden Auftretenswahrscheinlichkeiten $P(x_n)$.

| | | | | | | | | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| x_n | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 |
| $P(x_n)$ | 1/13 | 4/130 | 5/26 | 9/52 | 1/130 | 1/26 | 5/13 | $P(x_8)$ |

- Bestimmen Sie die Auftretenswahrscheinlichkeit $P(x_8)$ des Symbols x_8 .
- Konstruieren Sie nun für diese Quellenstatistik einen Huffman-Code und geben Sie die entsprechenden Codewörter an.
- Wie groß ist die mittlere Codewortlänge des in Aufgabenteil b) gefundenen Codes?
- Sie finden im Keller eine Diskette mit einer Kapazität von $1,44 \cdot 10^6$ Byte. Wie viele Zeichen können im Mittel mit der unter b) gefundenen Codierung auf dieser Diskette gespeichert werden?
- Sie stellen nun fest, dass das Symbol x_8 in Wirklichkeit nie vorkommt und dass die Auftretenswahrscheinlichkeit von x_1 um die Wahrscheinlichkeit $P(x_8)$ erhöht ist. Die Wahrscheinlichkeiten $P(x_2)$ bis $P(x_7)$ bleiben unverändert. Geben Sie unter diesen Bedingungen die Redundanz Ihres Codes an. Ist sie unter den veränderten Umständen kleiner oder größer geworden?

Aufgabe 21 [Jon11]

Bild 21 zeigt eine Mobilstation (MS), die sich mit der Geschwindigkeit v direkt auf die Basisstation (BTS) zu bewegt. Unter dem Winkel θ empfängt die MS zusätzlich zum direkten Pfad einen Mehrwegpfad, der gegenüber dem direkten Pfad um den Faktor A ($0 \leq A \leq 1$) gedämpft ist. Die Laufzeitdifferenz zwischen den beiden Pfaden sei so gering, dass sie keine Rolle spielt.

Berechnen Sie den Pegelverlauf $|r(t)|$ des Empfangssignals $r(t)$ an der MS und skizzieren Sie dessen Verlauf für $\theta = 45^\circ$ und $A = \frac{1}{2}$ über $\frac{vt}{\lambda_0}$, wobei $\lambda_0 = \frac{c}{f_0}$ die Wellenlänge des Signals ist.

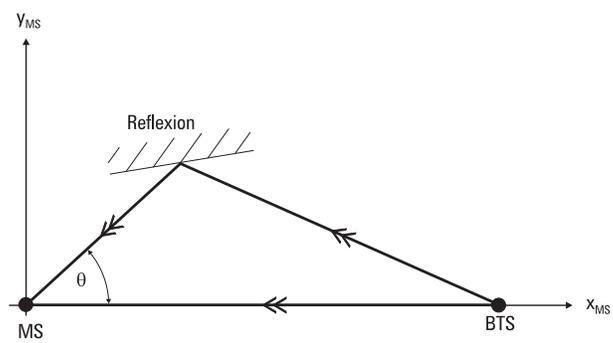


Abbildung 21: Mobilstation (MS)

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 12

a) Dem Anhang A entnehmen wir die Korrespondenz

$$e^{-\pi t^2} \quad \circ \bullet \quad e^{-\pi f^2}.$$

Hieraus folgt mit Hilfe der Substitution $s := f_0 t$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(f_0 t)^2} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{f_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi s^2} e^{-j2\pi \frac{f}{f_0} s} ds,$$

d.h.

$$e^{-\pi(f_0 t)^2} \quad \circ \bullet \quad \frac{1}{f_0} e^{-\pi(\frac{f}{f_0})^2}.$$

Unter Beachtung des Faltungssatzes der Fouriertransformation ergibt sich:

$$\begin{aligned} H(f) &= \frac{1}{f_0} e^{-\pi(\frac{f}{f_0})^2} * \frac{j}{2} [\delta(f + 20f_0) - \delta(f - 20f_0) \\ &\quad - \delta(f + 18f_0) + \delta(f - 18f_0)] \\ &= \frac{j}{2f_0} \left[\exp\left\{-\pi\left(\frac{f}{f_0} + 20\right)^2\right\} - \exp\left\{-\pi\left(\frac{f}{f_0} - 20\right)^2\right\} \right. \\ &\quad \left. - \exp\left\{-\pi\left(\frac{f}{f_0} + 18\right)^2\right\} + \exp\left\{-\pi\left(\frac{f}{f_0} - 18\right)^2\right\} \right] \end{aligned}$$

$|H(f)|$ ist in Bild 22 skizziert.

b) Modulierte Signale haben die Form (1.1-1)

$$s(t) = a(t) \cos[2\pi f_T t + \vartheta(t)].$$

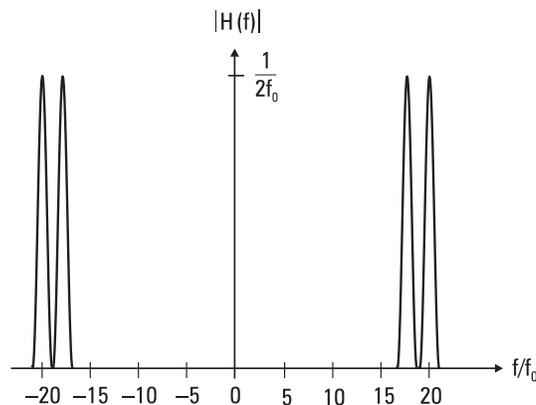


Abbildung 22: Fouriertransformierte

Mit der Identität [B⁺05]

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \left(\frac{x-y}{2} \right) \cos \left(\frac{x+y}{2} \right)$$

schreibt sich die Impulsantwort

$$h(t) = e^{-\pi(f_0 t)^2} \cdot 2 \sin(2\pi f_0 t) \cdot \cos(2\pi \cdot 19 f_0 t). \quad (3)$$

Hierin ist

$$a(t) = 2e^{-\pi(f_0 t)^2} \sin(2\pi f_0 t) \text{ die Amplitude,}$$

$$f_T = 19f_0 \text{ die Trägerfrequenz und}$$

$$\vartheta(t) = 0 \text{ die Phase.}$$

Aus diesen drei Größen berechnet sich mit (1.1-4) die komplexe Einhüllende zu

$$u(t) = a(t)e^{j\vartheta(t)} = 2e^{-\pi(f_0 t)^2} \sin(2\pi f_0 t).$$

c) Es gilt (3) und mit (1.2-3) folgt:

$$\begin{aligned} h(t) &= 2\operatorname{Re}\{c(t)e^{j2\pi f_T t}\} \\ &= 2\operatorname{Re}\{[c_R(t) + jc_I(t)][\cos(2\pi f_T t) + j\sin(2\pi f_T t)]\} \\ &= 2\operatorname{Re}\{c_R(t)\cos(2\pi f_T t) - c_I(t)\sin(2\pi f_T t) \\ &\quad + j[c_R(t)\sin(2\pi f_T t) + c_I(t)\cos(2\pi f_T t)]\} \\ &= 2c_R(t)\cos(2\pi f_T t) - 2c_I(t)\sin(2\pi f_T t) \\ &\stackrel{(3)}{=} 2e^{-\pi(f_0 t)^2} \sin(2\pi f_0 t) \cdot \cos(2\pi \cdot 19 f_0 t) \end{aligned}$$

Man erkennt, dass $c_I(t) = 0$ ist und

$$c(t) = e^{-\pi(f_0 t)^2} \sin(2\pi f_0 t)$$

gilt.

d) Wieder mit dem Faltungssatz der Fouriertransformation und mit den Ergebnissen aus Aufgabenteil a) erhalten wir:

$$C(f) = \frac{j}{2f_0} \left[\exp \left\{ -\pi \left(\frac{f}{f_0} + 1 \right)^2 \right\} - \exp \left\{ -\pi \left(\frac{f}{f_0} - 1 \right)^2 \right\} \right]$$

Bild 23 skizziert $|C(f)|$.

Lösung zu Aufgabe 13

a) Die Entropie der Quelle errechnet sich nach (2.1-2) zu

$$\begin{aligned} H(X) &= - \sum_{n=1}^N P(x_n) \log_2 P(x_n) \\ &= -0,4 \cdot \log_2 0,4 - 2 \cdot 0,3 \log_2 0,3 = 1,57 \text{ bit/Zeichen,} \end{aligned}$$

wobei die Identität $\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$ benutzt wurde.

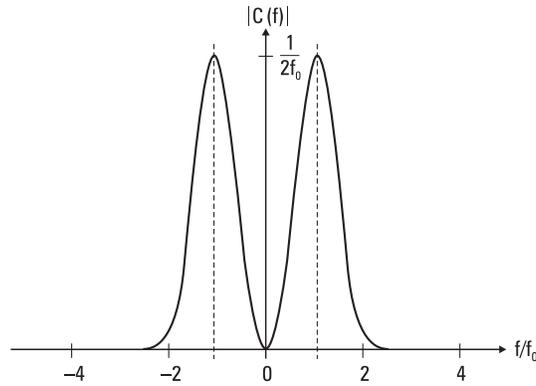


Abbildung 23: Fouriertransformation von $c(t)$

b) Die mittlere Transformation ist nach (2.3-1):

$$I(X; Y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M P(x_n; y_m) \log_2 \frac{P(x_n; y_m)}{P(x_n)P(y_m)}$$

Die $P(x_n)$ sind aus der Aufgabenstellung bekannt, die $P(y_m)$ errechnen sich mit Hilfe von Bild 19 zu:

$$P(y_1) = 0,4 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,1 = 0,39$$

$$P(y_2) = 0,4 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,1 = 0,31$$

$$P(y_3) = 0,3 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,9 = 0,3$$

Ebenfalls mit Hilfe von Bild 19 folgt für die

$$P(x_n; y_m) = P(x_n) P(y_m | x_n):$$

$$P(x_1; y_1) = 0,4 \cdot 0,9 = 0,36$$

$$P(x_1; y_3) = 0$$

$$P(x_2; y_2) = 0,3 \cdot 0,8 = 0,24$$

$$P(x_3; y_1) = 0$$

$$P(x_3; y_3) = 0,3 \cdot 0,9 = 0,27$$

$$P(x_1; y_2) = 0,4 \cdot 0,1 = 0,04$$

$$P(x_2; y_1) = 0,3 \cdot 0,1 = 0,03$$

$$P(x_2; y_3) = 0,3 \cdot 0,1 = 0,03$$

$$P(x_3; y_2) = 0,3 \cdot 0,1 = 0,03$$

Einsetzen in (2.3-1) liefert:

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= 0,36 \cdot \log_2 \frac{0,36}{0,4 \cdot 0,39} + 0,04 \cdot \log_2 \frac{0,04}{0,4 \cdot 0,31} + 0 \\ &+ 0,03 \cdot \log_2 \frac{0,03}{0,3 \cdot 0,39} + 0,24 \cdot \log_2 \frac{0,24}{0,3 \cdot 0,31} \\ &+ 0,03 \cdot \log_2 \frac{0,03}{0,3 \cdot 0,3} + 0 + 0,03 \cdot \log_2 \frac{0,03}{0,3 \cdot 0,31} \\ &+ 0,27 \cdot \log_2 \frac{0,27}{0,3 \cdot 0,3} \\ &= 0,9698 \text{ bit/Zeichen} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 14

Obwohl es für die Lösung der Aufgabe nicht notwendig ist, betrachten wir zunächst den Fall $N = 2$ (siehe hierzu auch Bild 2.1-1). Hier ist $X = \{x_1, x_2\}$ und es gilt $P(x_1) = q$, $P(x_2) = 1 - q$, $0 < q < 1$. Die Entropie ist gemäß Gleichung (2.1-2):

$$H(X) = -q \log_2 q - (1 - q) \log_2 (1 - q)$$

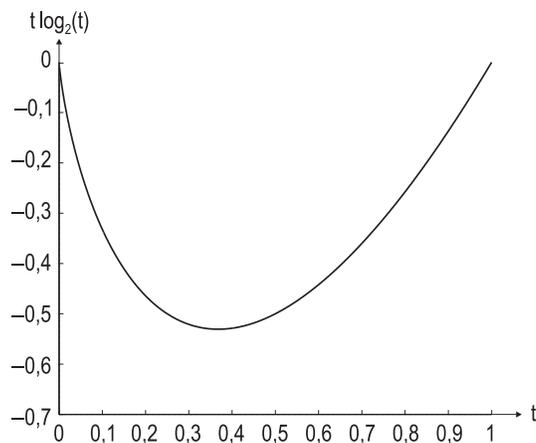


Abbildung 24: $t \log_2(t)$

Um das Maximum zu finden, differenzieren wir H nach q :

$$\frac{dH}{dq} = \log_2\left(\frac{1}{q} - 1\right) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow q_{max} = \frac{1}{2}$$

Dass die Entropie für $q_{max} = \frac{1}{2}$ wirklich maximal wird, folgt aus der zweiten Ableitung von H nach q :

$$\frac{d^2H}{dq^2} = \frac{-1}{q(1-q)\ln(2)} < 0 \text{ für alle } q, 0 < q < 1.$$

Um den allgemeinen Fall $N \in \mathbb{N}$, $N < \infty$, zu beweisen, benötigen wir zunächst die Aussage

- (i) Die Funktion $\varphi(t) = t \log_2(t)$ ist im Intervall $(0,1)$ konvex.

Die Richtigkeit von (i) (siehe auch Bild 24) folgt daraus, dass für alle $t \in (0,1)$ gilt

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = \frac{1}{t \ln(2)} > 0.$$

Für konvexe Funktionen gilt die **Jensensche Ungleichung** [Rén71], die als Hilfsmittel zur Lösung der Aufgabe benötigt wird:

- (ii) Ist $g(t)$ eine im Intervall (a,b) konvexe Funktion, sind t_1, t_2, \dots, t_N beliebige reelle Zahlen aus (a,b) und w_1, w_2, \dots, w_N positive reelle Zahlen mit $\sum_{n=1}^N w_n = 1$, so gilt

$$g\left(\sum_{n=1}^N w_n t_n\right) \leq \sum_{n=1}^N w_n g(t_n).$$

Zum Beweis der Jensenschen Ungleichung betrachten wir in der Ebene die Punkte $(t_n, g(t_n))$, $1 \leq n \leq N$. In diese Punkte legen wir die Gewichte w_n . Der Schwerpunkt dieses Systems liegt in dem kleinsten konvexen Polygon, das alle diese Punkte enthält. Da alle Punkte auf der konvexen Kurve $y = g(t)$ liegen, liegt der Schwerpunkt (\bar{t}, \bar{y}) oberhalb der Kurve, d.h.

$$y(\bar{t}) \leq \bar{y}.$$

Wegen

$$\bar{t} = \sum_{n=1}^N w_n t_n, \quad \bar{y} = \sum_{n=1}^N w_n g(t_n)$$

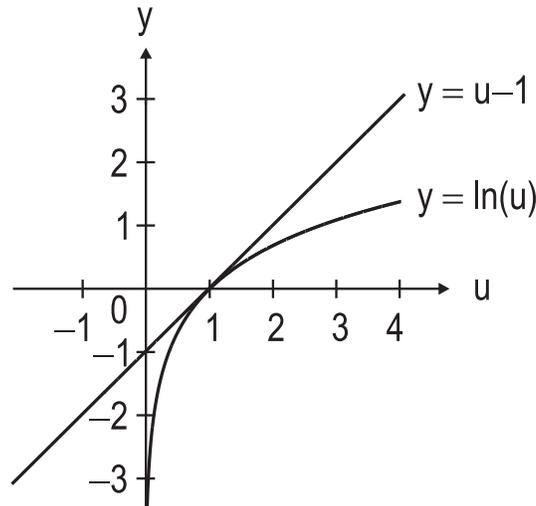


Abbildung 25: $y = \ln(u)$ und $y = u - 1$

folgt die Gültigkeit der Jensenschen Ungleichung, in der das Gleichheitszeichen offenbar nur für $t_1 = t_2 = \dots = t_N$ gilt, wenn $g(t)$ in keinem Teilintervall von (a,b) linear ist.

Die Anwendung der Jensenschen Ungleichung auf die in $(0,1)$ konvexe Funktion $\varphi(t) = t \log_2(t)$ liefert mit $t_n = P(x_n)$, $w_n = 1/N$, $1 \leq n \leq N$, für die Entropie

$$H(X) = - \sum_{n=1}^N P(x_n) \log_2 P(x_n) \leq \log_2 N$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur für $P(x_n) = 1/N$ für $n = 1, 2, \dots, N$.

Lösung zu Aufgabe 15

Der natürliche Logarithmus $y = \ln(u)$ ist eine für alle $u \in \mathbb{R}$, $u > 0$, definierte Funktion. Im Punkt $(1,0)$ berührt er die Gerade $y = u - 1$. Einen anderen gemeinsamen Punkt haben der natürliche Logarithmus und diese Gerade nicht, da für die Ableitung des natürlichen Logarithmus

$$\frac{d \ln(u)}{du} = \frac{1}{u} \quad \forall u > 0$$

gilt und damit für $u > 1$ der natürliche Logarithmus langsamer wächst und für $u < 1$ schneller fällt als die Gerade (vergleiche auch Bild 25). Es folgt $\ln(u) \leq u - 1 \quad \forall u > 0$, wobei die Gleichheit nur für $u = 1$ gilt.

b) Die Multiplikation der Definitionsgleichung (2.3-1) für die mittlere Transinformation mit -1 liefert:

$$-I(X; Y) = \log_2(e) \cdot \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M P(x_n; y_m) \ln \left(\frac{P(x_n) P(y_m)}{P(x_n; y_m)} \right),$$

worin die Identität $\log_2(u) = \log_2(e) \ln(u)$ bereits berücksichtigt wurde. Mit der Ungleichung $\ln(u) < u - 1 \quad \forall u > 0, u \neq 1$, folgt

$$-I(X; Y) < \log_2(e) \cdot \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M P(x_n; y_m) \left[\frac{P(x_n) P(y_m)}{P(x_n; y_m)} - 1 \right]$$

oder

$$I(X; Y) > \log_2(e) \cdot \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M P(x_n; y_m) \left[1 - \frac{P(x_n) P(y_m)}{P(x_n; y_m)} \right]$$

$$= 0$$

a) Aufgrund der Tatsache, dass $\ln(u) = u - 1$ nur für $u = 1$ gilt, folgt, dass $I(X; Y) = 0$ genau dann gilt, wenn

$$P(x_n; y_m) = P(x_n) \cdot P(y_m)$$

für alle $m = 1, 2, \dots, M$ und $n = 1, 2, \dots, N$ ist, die Zufallsvariablen X und Y also unabhängig sind.

Lösung zu Aufgabe 16

Um die in der Aufgabenstellung genannten Größen berechnen zu können, werden neben den dort angegebenen Verbundwahrscheinlichkeiten die Einzelwahrscheinlichkeiten $P(x_i); i = 1, \dots, 4; P(y_j); j = 1, \dots, 3$; und die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(x_i|y_j)$ benötigt. Die Einzelwahrscheinlichkeiten ergeben sich aus den Zeilen- bzw. Spaltensummen zu

$$P(x_i) = \sum_{j=1}^3 P(x_i; y_j)$$

$$P(x_1) = \frac{1}{4}, P(x_2) = \frac{1}{8}, P(x_3) = \frac{1}{8}, P(x_4) = \frac{1}{2}$$

$$P(y_j) = \sum_{i=1}^4 P(x_i; y_j)$$

$$P(y_1) = \frac{5}{16}, P(y_2) = \frac{9}{32}, P(y_3) = \frac{13}{32}$$

Aus $P(x_i|y_j) = \frac{P(x_i; y_j)}{P(y_j)}$ folgt:

$$P(x_1|y_1) = \frac{2}{5}, P(x_1|y_2) = 0, P(x_1|y_3) = \frac{4}{13},$$

$$P(x_2|y_1) = \frac{1}{5}, P(x_2|y_2) = \frac{1}{9}, P(x_2|y_3) = \frac{1}{13},$$

$$P(x_3|y_1) = 0, P(x_3|y_2) = \frac{4}{9}, P(x_3|y_3) = 0,$$

$$P(x_4|y_1) = \frac{2}{5}, P(x_4|y_2) = \frac{4}{9}, P(x_4|y_3) = \frac{8}{13}.$$

Damit können die gesuchten Größen berechnet werden:

$$\begin{aligned} H(X) &= - \sum_{i=1}^4 P(x_i) \log_2 P(x_i) \\ &= \frac{1}{4} \log_2 4 + 2 \cdot \frac{1}{8} \log_2 8 + \frac{1}{2} \log_2 2 \\ &= 1,75 \text{ bit/Zeichen} \end{aligned}$$

Für Rechnungen mit dem Taschenrechner verwenden wir wieder die Identität $\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$:

$$\begin{aligned} H(Y) &= - \sum_{j=1}^3 P(y_j) \log_2 P(y_j) \\ &= \frac{5}{16} \log_2 \frac{16}{5} + \frac{9}{32} \log_2 \frac{32}{9} + \frac{13}{32} \log_2 \frac{32}{13} \\ &= 0,524 + 0,515 + 0,528 \\ &= 1,57 \text{ bit/Zeichen} \end{aligned}$$

Bei der Berechnung der mittleren bedingten Entropie $H(X|Y)$ ist zu beachten, dass wegen $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ ($x > 0$) für $P(x_i|y_j)$ gilt: $P(x_i; y_j) \log_2 P(x_i|y_j) = P(y_j)P(x_i|y_j) \log_2 P(x_i|y_j) = 0$. Somit erhält man:

$$\begin{aligned}
 H(X|Y) &= - \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 P(x_i; y_j) \log_2 P(x_i|y_j) \\
 &= \frac{1}{8} \log_2 \frac{5}{2} + 0 + \frac{1}{8} \log_2 \frac{13}{4} \\
 &+ \frac{1}{16} \log_2 5 + \frac{1}{32} \log_2 9 + \frac{1}{32} \log_2 13 \\
 &+ 0 + \frac{1}{8} \log_2 \frac{9}{4} + 0 \\
 &+ \frac{1}{8} \log_2 \frac{5}{2} + \frac{1}{8} \log_2 \frac{9}{4} + \frac{1}{4} \log_2 \frac{13}{8} \\
 &= 0,165 + 0 + 0,213 \\
 &+ 0,145 + 0,10 + 0,116 \\
 &+ 0 + 0,146 + 0 \\
 &+ 0,165 + 0,146 + 0,175 \\
 &= 1,37 \text{ bit/Kanalnutzung}
 \end{aligned}$$

Die mittlere Transinformation $I(X;Y)$ ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned}
 I(X;Y) &= H(X) - H(X|Y) \\
 &= 1,75 - 1,37 = 0,38 \text{ bit/Kanalnutzung.}
 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 17

In dieser Aufgabe ist die Kanalmatrix

$$\overline{P(Y|X)} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Da der gegebene Kanal (stark) symmetrisch ist, muss, um die mittlere Transinformation zu maximieren, $P(x_1) = P(x_2) = 0.5$ sein.

Die Kanalkapazität ist definiert als das Maximum der mittleren Transinformation (2.4-3) und lässt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
 C &= \max_{P(x_n)} I(X;Y) \\
 &= I(X;Y) \text{ für } P(x_1) = P(x_2) = 0.5 \\
 &= \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^4 P(x_n)P(y_m|x_n) \log_2 \frac{P(y_m|x_n)}{P(y_m)}
 \end{aligned}$$

$P(x_n)$ ist bereits bekannt, $P(y_m|x_n)$ kann aus der Abbildung bzw. der Matrix abgelesen werden, und die Auftretenswahrscheinlichkeiten der Quellsymbole lassen sich mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit berechnen:

$$\begin{aligned}
 P(y_m) &= \sum_{n=1}^2 P(y_m|x_n)P(x_n) \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\
 &= P(y_2) = P(y_3) = P(y_4)
 \end{aligned}$$

Damit kann nun die Kanalkapazität berechnet werden.

$$\begin{aligned}
 C &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \log_2 \frac{1/3}{1/4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \log_2 \frac{1/6}{1/4} \right) \cdot 4 \\
 &= 0.0817 \text{ bit/Buchstabe}
 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 18

a) Mit dem Entscheidungsgehalt H_0 und der Entropie $H(x)$ der Quelle ist ihre Redundanz

$$R_Q = H_0 - H(X).$$

Das Alphabet umfasst 9 Buchstaben, damit ist

$$H_0 = \log_2 9 = 3,170 \text{ bit/Zeichen.}$$

Für die Entropie $H(x)$ der Quelle ergibt sich somit

$$\begin{aligned} H(X) &= - \sum_{n=1}^9 P(x_n) \log_2 P(x_n) \\ &= 0,3104 + 0,1996 + 0,5085 + 0,2317 + 0,3522 \\ &\quad + 0,2605 + 0,3706 + 0,3322 + 0,4032 \\ &= 2,969 \text{ bit/Zeichen} \end{aligned}$$

und damit für die Redundanz

$$R_Q = 0,201 \text{ bit/Zeichen.}$$

b) Anders geschrieben lassen sich die Auftretenswahrscheinlichkeiten der Buchstaben aus X wie folgt darstellen:

| | | | | | | | | | |
|--------|---|---|----|---|----|---|----|---|----|
| x | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $P(x)$ | 8 | 4 | 24 | 5 | 10 | 6 | 11 | 9 | 13 |

Um die Wahrscheinlichkeiten zu erhalten, müssen die den Buchstaben zugeordneten Zahlen durch 90 geteilt werden.

Die Anwendung des Huffman-Verfahrens liefert in diesem Fall z.B. das in Tabelle 1 gezeigte Schema.

| | | | | | | | | | |
|------|------|-----|------|-----|------|-----|------|------|-----|
| C | I | G | E | H | A | F | D | B | |
| 24 | 13 | 11 | 10 | 9 | 8 | 6 | 5 | 4 | 9 |
| C | I | G | E | H | D | B | A | F | |
| 24 | 13 | 11 | 10 | 9 | 0 | 1 | 8 | 6 | 14 |
| C | A | F | I | G | E | H | D | B | |
| 24 | 0 | 1 | 13 | 11 | 10 | 1 | 00 | 01 | 18 |
| C | H | D | B | A | F | I | G | E | |
| 24 | 1 | 00 | 01 | 0 | 1 | | 0 | 1 | |
| | | 18 | | 14 | | 13 | 11 | 10 | 21 |
| C | G | E | H | D | B | A | F | I | |
| 24 | 0 | 1 | 1 | 00 | 01 | 00 | 01 | 1 | |
| | | 21 | | 18 | | 14 | | 13 | 27 |
| A | F | I | C | G | E | H | D | B | |
| 00 | 01 | 1 | 24 | 00 | 01 | 11 | 100 | 101 | 39 |
| | | 27 | | 21 | | 18 | | | |
| G | E | H | D | B | A | F | I | C | |
| 00 | 01 | 11 | 100 | 101 | 000 | 001 | 01 | 1 | |
| | | 39 | | | 27 | | | 24 | 51 |
| A | F | I | C | G | E | H | D | B | |
| 0000 | 0001 | 001 | 01 | 100 | 101 | 111 | 1100 | 1101 | |
| | | 51 | | | | 39 | | | 90 |
| A | B | C | D | E | F | G | H | I | |
| 0000 | 1101 | 01 | 1100 | 101 | 0001 | 100 | 111 | 001 | 269 |

Tabelle 1: Huffman-Verfahren

Die mittlere Codewortlänge ist also $L = \frac{269}{90} = 2,989$ bit/Zeichen, woraus für die Redundanz des Codes folgt

$$R_c = L - H(X) = 2,989 - 2,969 = 0,020 \text{ bit/Zeichen.}$$

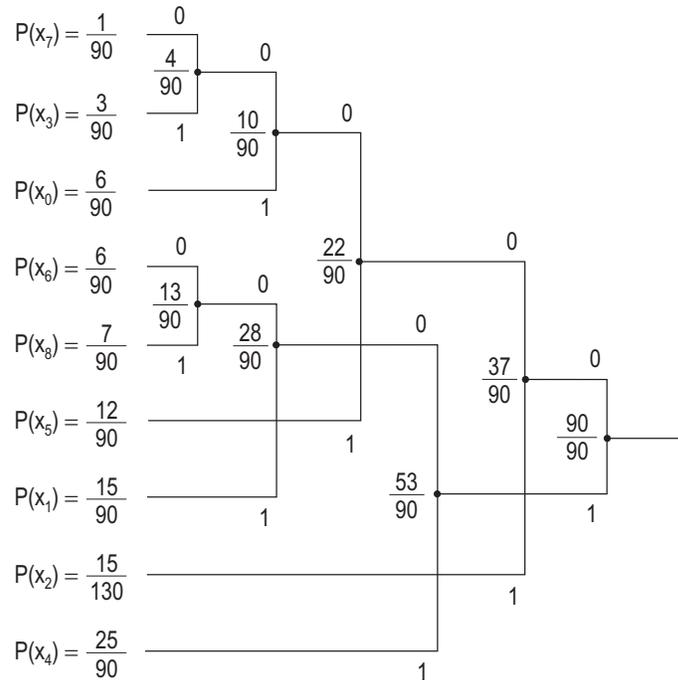


Abbildung 26: Binärbaum nach dem Huffman-Verfahren

Lösung zu Aufgabe 19

- a) Abbildung 26 zeigt einen möglichen Baum.
 b) Die Codewörter können aus dem Baum abgelesen werden:

| | x_0 | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Codewort | 0001 | 101 | 01 | 00001 | 11 | 001 | 1000 | 00000 | 1001 |
| $L(x_n)$ | 4 | 3 | 2 | 5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 4 |

Der Codebaum ist nicht eindeutig, da die Zuordnung zwischen 0 und 1 willkürlich ist. Gleiches gilt für die Auswahl von gleichwahrscheinlichen Symbolen.

- c) Die Redundanz des Codes ist (4.1-4):

$$R_C = L - H(x).$$

Die mittlere Codewortlänge ist

$$L = \sum_{n=0}^8 P(x_n) \cdot L(x_n)$$

2,856 bit / Buchstabe.

Mit der Entropie der Quelle

$$H(X) = - \sum_{n=0}^8 P(x_n) \log_2 P(x_n)$$

$$= 2,806 \text{ bit / Buchstabe}$$

ergibt sich eine Redundanz von

$$R_C = 0,05 \text{ bit / Buchstabe.}$$

Die Effizienz des Codes ist definiert als $\eta = H(X)/L$ und ist immer kleiner oder gleich eins. Bei dieser Codierung ist $\eta = 0,9825$.

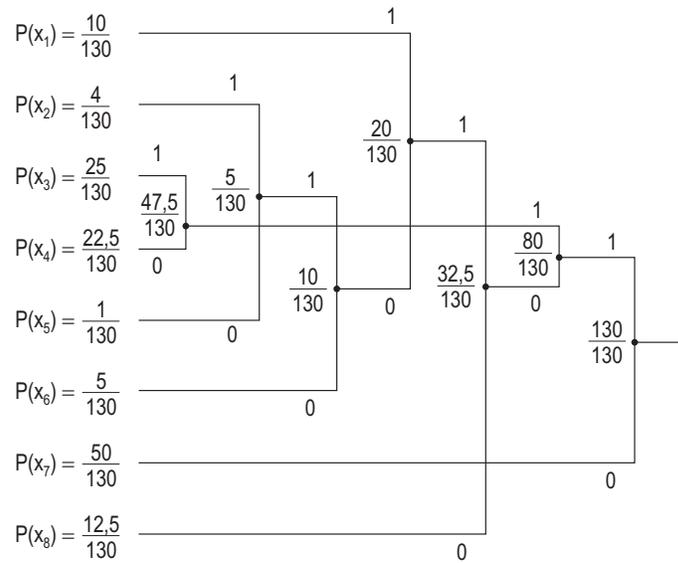


Abbildung 27: Binärbaum nach dem Huffman-Verfahren

Lösung zu Aufgabe 20

a) Da die Summe über alle Auftretenswahrscheinlichkeiten 1 sein muss, folgt für $P(x_8)$ unmittelbar

$$P(x_8) = 1 - \sum_{n=1}^7 P(x_n) = \frac{5}{52}$$

b) Abbildung 27 zeigt einen möglichen Baum. Die Codewörter können aus dem Baum abgelesen werden:

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 |
|----------|-------|--------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|
| Codewort | 1011 | 101011 | 111 | 110 | 101010 | 10100 | 0 | 100 |
| $L(x_n)$ | 4 | 6 | 3 | 3 | 6 | 5 | 1 | 3 |

c) Die mittlere Codewortlänge ist

$$\begin{aligned} L &= \sum_{n=1}^8 L(x_n)P(x_n) \\ &= \frac{1}{130}(4 \cdot 10 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 25 + 3 \cdot 22,5 + 6 + 5 \cdot 5 + 50 + 3 \cdot 12,5) \\ &= 2,5 \text{ bit / Zeichen} \end{aligned}$$

d) Die Anzahl an Symbolen, die im Mittel auf der Diskette gespeichert werden können, ist

$$N = \frac{1,44 \cdot 10^6 \text{ Byte} \cdot 8 \frac{\text{bit}}{\text{Byte}}}{2,5 \frac{\text{bit}}{\text{Zeichen}}} = 4608000 \text{ Zeichen.}$$

e) Nun ist $P(x_8) = 0$ und $P(x_1) = 1/13 + 5/52 = 9/52$. Die neue mittlere Codewortlänge berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= \frac{1}{130}(4 \cdot 22,5 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 25 + 3 \cdot 22,5 + 6 + 5 \cdot 5 + 50) \\ &= 2,596 \text{ bit / Zeichen.} \end{aligned}$$

Die neue Entropie ist

$$\begin{aligned} \tilde{H}(X) &= - \sum_{n=1}^7 P(x_n) \log_2 P(x_n) \\ &= - \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{9}{52} \ln \frac{9}{52} + \frac{4}{130} \ln \frac{4}{130} + \frac{5}{26} \ln \frac{5}{26} + \frac{9}{52} \ln \frac{9}{52} + \frac{1}{130} \ln \frac{1}{130} + \frac{1}{26} \ln \frac{1}{26} + \frac{5}{13} \ln \frac{5}{13} \right) \\ &= 2,2529 \end{aligned}$$

Hieraus kann nun die Redundanz errechnet werden:

$$R_C = \tilde{L} - \tilde{H}(X) = 0,343 \text{ bit / Zeichen}$$

Die Redundanz des Codes muss größer geworden sein, da das Codewort für das Symbol x_8 zwar vorhanden ist, dies aber gar nicht verwendet wird.

Lösung zu Aufgabe 21

Das Empfangssignal ist die Überlagerung zweier Wellen

$$r(t) = e^{j2\pi(f_0 + \frac{v}{c}f_0)t} + Ae^{j2\pi(f_0 + \frac{v}{c}f_0 \cos \theta)t},$$

von denen die erste den direkten und die zweite den reflektierten Pfad darstellt. Durch Ausklammern folgt

$$r(t) = [e^{j2\pi \frac{v}{c}f_0 t} + Ae^{j2\pi \frac{v}{c}f_0 t \cos \theta}] \cdot e^{j2\pi f_0 t}$$

und daraus

$$\begin{aligned} |r(t)|^2 &= r(t)r^*(t) \\ &= 1 + A^2 + Ae^{j2\pi \frac{v}{c}f_0 t(1-\cos \theta)} + Ae^{-j2\pi \frac{v}{c}f_0 t(1-\cos \theta)} \\ &= 1 + A^2 + 2A \cos \left\{ 2\pi \frac{v}{c}f_0 t(1-\cos \theta) \right\} \end{aligned}$$

oder

$$|r(t)| = \sqrt{1 + A^2 + 2A \cos \left\{ 2\pi \frac{v}{c}f_0 t(1-\cos \theta) \right\}}.$$

Für $\theta = 45^\circ$ und $A = \frac{1}{2}$ heißt das mit $\lambda_0 = \frac{c}{f_0}$:

$$|r(t)| = \sqrt{1,25 + \cos \left\{ 2\pi \frac{vt}{\lambda_0} \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \right\}}$$

oder mit der Abkürzung $x := \frac{vt}{\lambda_0}$

$$|r(t)| = \sqrt{1,25 + \cos \left\{ 2\pi \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)x \right\}}$$

Man erkennt sofort, dass $|r(t)|$ in x mit $1 / (1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}) = 3,414$ periodisch ist und berechnet die Wertetafel (Tabelle 2).

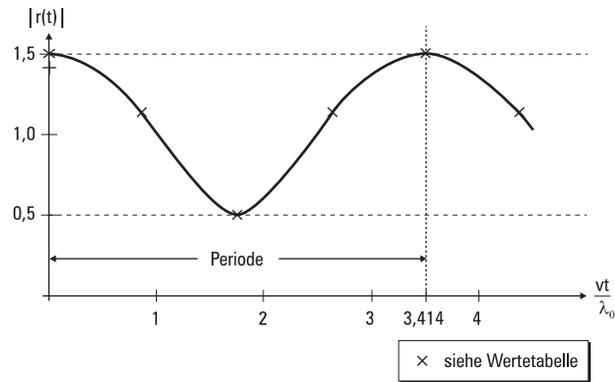


Abbildung 28: Verlauf von $|r(t)|$ über $\frac{vt}{\lambda_0}$

| $2\pi\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)$ | x | r(t) |
|---|--|----------------------------|
| 0 | 0 | $\sqrt{2,25} = 1,5$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{1}{4\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)} \approx 0,85$ | $\sqrt{1,25} \approx 1,12$ |
| π | $\frac{1}{2\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)} \approx 1,7$ | $\sqrt{0,25} = 0,5$ |
| $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{3}{3\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)} \approx 2,55$ | $\sqrt{1,25} \approx 1,12$ |
| 2π | $\frac{1}{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}} \approx 3,4$ | $\sqrt{2,25} = 1,5$ |

Tabelle 2: Wertetabelle

Bild 28 skizziert den Verlauf von $|r(t)|$ über $\frac{vt}{\lambda_0}$.

3. Übung:

Blockcodierung, Faltungscodierung

Stand 20. April 2015

Bemerkung: Quellencodierung, Fehlerkorrektur, Kryptographie. Wann macht man was? Möchte man ein komplettes System zur Nachrichtenübertragung aufbauen, wird man alle drei Module benötigen. Die Kryptographie wird in dieser Vorlesung nicht behandelt und dient dazu, den Datenstrom zu verschlüsseln und ihn gegen Änderung und Mitlesen durch Dritte zu schützen.

Die Anordnung der Module ist festgelegt, ein Ändern würde keinen Sinn ergeben. Zuerst müssen die zu übertragenden Informationen bestimmten Datenwörtern zugeordnet werden. Dies macht die *Quellencodierung*. Sind die Informationswörter möglichst redundanzfrei festen Datenwörtern zugeordnet, so werden diese verschlüsselt. Die Verschlüsselung fügt idealer Weise keine Redundanz hinzu, d.h. die Menge der zu übertragenden Daten hat sich nicht geändert. Da Verschlüsselungsalgorithmen relativ empfindlich auf Bitfehler reagieren, ist eine Fehlererkennung bzw. Fehlerkorrektur nötig. Diese fügt den verschlüsselten Daten Redundanz hinzu, mit der später Fehler erkannt oder sogar korrigiert werden können.

Bemerkung: Lineare, systematische und zyklische Blockcodes

Ein Blockcode bildet einen Block von Informationsbits (Infowörtern) immer auf dieselbe Folge von Codebits (Codewörtern) ab.

1. Ein *linearer* Blockcode ist ein Code, bei dem die Codebits aus einer linearen Verknüpfung der Infobits erzeugt werden. Ist dies gegeben, kann die Encodierung als Vektormultiplikation zwischen Infowort und Generatormatrix dargestellt werden. Der Code muss hierbei nicht zwangsläufig systematisch sein. Eine Folge der Linearität ist, dass die Summe von mindestens zwei Codewörtern in GF_2 wieder ein gültiges Codewort ergibt.
2. Möchte man nun die *minimale Hammingdistanz* bestimmen, so genügt es lediglich, die Hammingdistanz zwischen jeweils einem Codewort und dem Nullwort (also dem Codewort das aus nur Nullen besteht) zu bestimmen. Es ist also nicht nötig, alle möglichen Kombinationen von Codewörtern miteinander zu vergleichen.
3. Ein *systematischer* Blockcode ist dadurch gekennzeichnet, dass das Codewort aus dem Infowort gefolgt von einem Paritycheckwort besteht.
4. Bei einem *zyklischen* Blockcode ergibt jede zyklische Verschiebung der Codebits (also z.B. das letzte Bit am Ende des Wortes wegnehmen und vorne wieder anhängen) wieder ein gültiges Codewort. Der große Vorteil hierbei ist, dass dieser Code durch ein Generatorpolynom beschreibbar und technisch einfach mit einem rückgekoppelten Schieberegister zu realisieren ist. Genau diese Eigenschaft macht zyklische Blockcodes so interessant.

Aufgabe 22* [Jon11]

Durch die Generatormatrix

$$\overline{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ist ein linearer Blockcode gegeben.

- a) Bestimmen Sie den minimalen Hammingabstand d_{\min} , die Korrekturfähigkeit t und die Paritycheckmatrix \overline{H} des Codes.
- b) Es wird der Vektor $\vec{r} = (011110)^T$ empfangen. Welches ist das am wahrscheinlichsten gesendete Codewort?

Der Code wird zur Übertragung über einen symmetrischen Binärkanal mit der Bitfehlerwahrscheinlichkeit $P = 10^{-3}$ verwendet.

- c) Bestimmen Sie die Wortfehlerwahrscheinlichkeit für uncodierte und für codierte Übertragung.
- d) Schätzen Sie die nach der Decodierung noch vorhandene Bitfehlerwahrscheinlichkeit P_B nach unten und nach oben ab.

Hinweis: Die Wortfehlerwahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei der Übertragung eines Codeworts mindestens ein Fehler auftritt.

Aufgabe 23* [Jon11]

- a) Zeigen Sie, dass in $\text{GF}(2)$ die Gleichung

$$x^7 - 1 = (x + 1)(x^3 + x^2 + 1)(x^3 + x + 1)$$

gilt und dass die beiden kubischen Polynome auf der rechten Seite dieser Gleichung irreduzibel in $\text{GF}(2)$ sind, d.h. in $\text{GF}(2)$ keine Nullstellen besitzen.

- b) Weisen Sie nach, dass

$$g(x) = x^4 + x^2 + x + 1$$

das Generatorpolynom eines zyklischen $(7,3)$ -Blockcodes ist.

- c) Skizzieren Sie den zu $g(x)$ gehörenden Encoder.

Aufgabe 24* [F2012]

Gegeben ist die Generatormatrix eines linearen (n,k) -Blockcodes:

$$\overline{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- a) Geben Sie n und k an.
- b) Ist der Code systematisch? Begründung!
- c) Wie viele Bitfehler kann der Code korrigieren? Begründung!
- d) Geben Sie die systematische Matrix \overline{G}_{sys} zu \overline{G} an.
- e) Kann der Code von \overline{G}_{sys} durch ein rückgekoppeltes Schieberegister erzeugt werden? Wenn nein, begründen Sie dies, wenn ja, geben Sie das entsprechende Schieberegister an.

Aufgabe 25* [Jon11]

Bemerkung: Fahrplan zur Viterbi-Decodierung

1. Erstellen eines Trellis durch Ablesen aus dem Zustandsdiagramm.
2. Ordentliche Beschriftung der Übergänge z.B. nach der Notation $d_1 d_2 \dots d_n | c_1 c_2 \dots c_n$ wobei $d_1 d_2 \dots d_n$ die Eingangsbits darstellen, die zu der entsprechenden Zustandsänderung führen. $c_1 c_2 \dots c_n$ sind die dabei resultierenden Codebits.

3. Für jeden möglichen Schritt wird die Hammingdistanz bzw. die Euklidische Distanz zwischen den Empfangssymbolen und den möglichen Sendesymbolen gebildet.
4. Enden mehrere Pfade in einem Knoten, wird derjenige gewählt, der die geringere Distanz hat („Survivor“)
5. Sind alle Survivor bestimmt, wird der Gesamtpfad mit der geringsten Distanz zurückverfolgt und die entsprechenden Eingangsbits herausgeschrieben.

Gegeben sei der in Bild 29 gezeigte Faltungscoder mit der Coderate $\frac{1}{2}$ und der Einflusslänge $L = 3$.

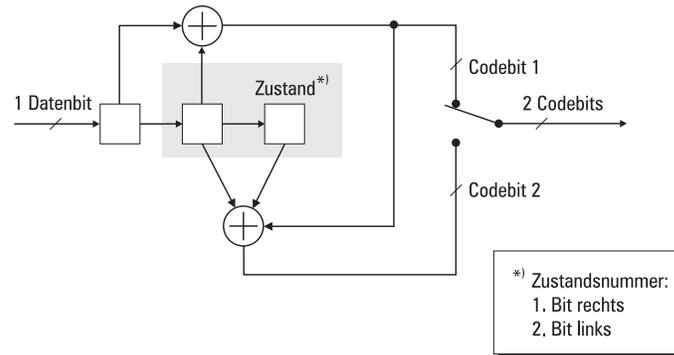


Abbildung 29: Faltungscoder

- a) Zeichnen Sie das Zustandsdiagramm des Encoders.
- b) Sie empfangen die Codebitfolge 0 0 1 0 0 1 1 1, wobei ein symmetrischer Binärkanal zugrunde gelegt sei. Bestimmen Sie unter Verwendung des Viterbi-Algorithmus die am wahrscheinlichsten gesendete Codebitfolge. Der Anfangszustand des Encoders sei 0 0.

Aufgabe 26 [Jon11]

Gegeben sei der in Bild 30 dargestellte Faltungscoder, der pro Takt jeweils 2 Bits verarbeitet (Coderate $R = \frac{2}{3}$).

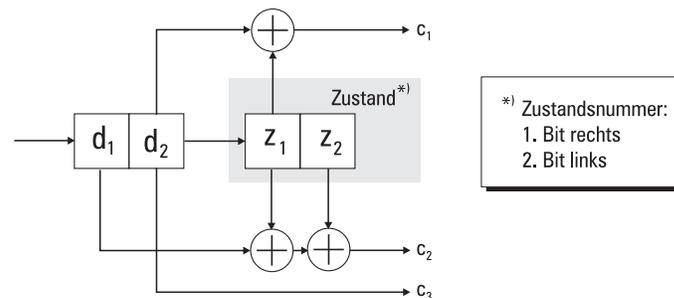


Abbildung 30: Faltungscoder

- a) Zeichnen Sie das Zustandsdiagramm mit allen Zuständen und Übergängen. Beschriften Sie alle Übergänge gemäß der Konvention $(d_1 d_2 | c_1 c_2 c_3)$.
- b) Decodieren Sie den Codebitblock 0 0 0 | 1 1 1 | 0 0 1 mit dem Viterbi-Algorithmus. Zeichnen Sie den Trellis und beschriften Sie die Übergänge mit dem Hammingabstand d als Metrikelement. Der Anfangszustand sei 1 0, der Endzustand 0 1. Wie lauten die am wahrscheinlichsten gesendeten Datenbits?

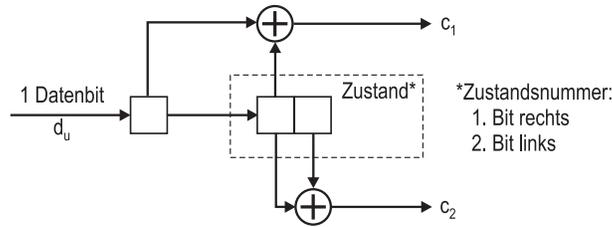


Abbildung 31: Faltungscoder

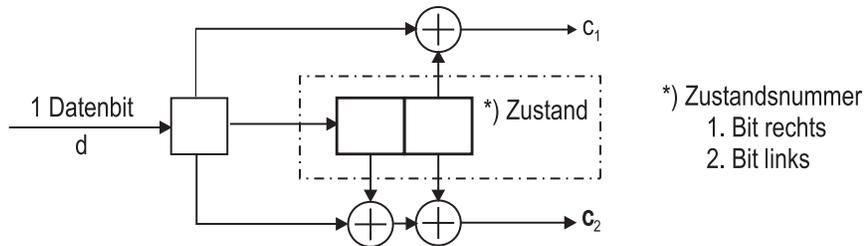


Abbildung 32: Faltungscoder

Aufgabe 27 [F2011]

Gegeben ist der Faltungscoder aus Abbildung 31.

- Zeichnen Sie das Zustandsdiagramm. Kennzeichnen Sie die Übergänge in der Notation $d_k|c_1c_2$.
- Sie übertragen eine Datenfolge d_1, d_2, \dots, d_N . Welche Bitfolge müssen Sie an die Datenfolge anhängen, damit sich der Encoder am Ende der gesamten Übertragung garantiert im Zustand 11 befindet?
- Sie möchten nun die Datenfolge d_1, d_2 encodieren. Am Anfang befindet sich der Encoder im Zustand 00 und am Ende der Übertragung terminieren Sie ihn durch eine 00 Folge. Geben Sie die Codebitfolge für alle möglichen Kombinationen von $d_1, d_2 \in \{0,1\}$ an. Schreiben Sie die Codewörter in einer Tabelle nach folgendem Schema auf:

| Taktschritt | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------------|-----------|----------|--------------|---|------------|----------|----------|----------|
| | Datenwort | | Terminierung | | Codewörter | | | |
| | d_1 | d_2 | 0 | 0 | c_1c_2 | c_1c_2 | c_1c_2 | c_1c_2 |
| | \vdots | \vdots | 0 | 0 | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |

- Können Sie die Encodierung aus Aufgabenteil c) als (n,k) -Blockcode interpretieren? Begründung! Wenn ja, ist dieser linear? Begründung! Geben Sie n und k sowie die Coderate r an.

Aufgabe 28* [F2012]

Gegeben ist der in Abbildung 32 dargestellte Faltungscoder.

- Zeichnen Sie das zum Faltungscoder gehörende Zustandsdiagramm. Kennzeichnen Sie die Übergänge nach der Notation $d|c_1c_2$.
- Codieren Sie die Eingangsfolge $\{1010\}$. Der Anfangszustand sei 00. In welchem Endzustand befindet sich der Decoder?
- Sie empfangen die gestörte Empfangsfolge $\{(0,2; 0,9) (0,78; 0,1) (0,1; 0,1) (0,66; 0,83)\}$. Decodieren Sie mit Hilfe des Viterbi-Algorithmus. Verwenden Sie als Metrik den Euklidischen Abstand. Der Anfangszustand ist 11.

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 22

- a) Ein linearer Blockcode ist dadurch charakterisiert, dass jedes Codewort als Linearkombination anderer Codewörter geschrieben werden kann, woraus für den minimalen Hammingabstand zweier Codewörter folgt:

$$d_{\min}(\vec{c}_i, \vec{c}_k) = d_{\min}(\vec{c}_k, \vec{0})$$

Aus der folgenden Tabelle sind die Codewörter des durch \overline{G} generierten Codes sowie ihre Hammingabstände zum Codewort $\vec{0}$ abzulesen:

| \vec{d}^T | $\vec{c}^T = \vec{d}^T \overline{G}$ | $d(c_k, 0)$ |
|-------------|--------------------------------------|-------------|
| 000 | 000 000 | 0 |
| 001 | 001 011 | 3 |
| 010 | 010 110 | 3 |
| 011 | 011 101 | 4 |
| 100 | 100 101 | 3 |
| 101 | 101 110 | 4 |
| 110 | 110 011 | 4 |
| 111 | 111 000 | 3 |

$$d_{\min} = 3$$

Für die Korrekturfähigkeit gilt die Ungleichung (5.2-4)

$$d_{\min} \geq 2t + 1 \Leftrightarrow t \leq \left\lfloor \frac{1}{2}(d_{\min} - 1) \right\rfloor,$$

woraus hier $t = 1$ folgt. Es ist also maximal 1 bit korrigierbar.

Mit der Gleichung (5.2-2), $\overline{G} = [\overline{T}_k \overline{P}]$, und der Tatsache, dass wir es hier mit einem (6,3)-Code zu tun haben, folgt für die Paritycheckmatrix nach Gleichung (5.2-5) $\overline{H} = [\overline{P}^T \overline{T}_{n-k}]$

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- b) Die Syndromdecodierung (5.2-7) liefert mit

$$\vec{s}^T = \vec{r}^T \overline{H}^T = (011110) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (011)$$

die dritte Spalte der Paritycheckmatrix \overline{H} . Im empfangenen Vektor $\vec{r} = (011110)^T$ ist also die dritte Komponente falsch. Das am wahrscheinlichsten gesendete Codewort ist $\vec{c} = (010110)^T$.

- c) Bei uncodierter Übertragung werden pro Wort 3 bit übertragen. Für die Wortfehlerwahrscheinlichkeit folgt:

$$\begin{aligned} P\{\text{Wort falsch}\} &= P\{\text{mindestens 1 Bit falsch}\} \\ &= \sum_{i=1}^3 \binom{3}{i} p^i (1-p)^{3-i} = 1 - P\{\text{alle 3 Bits richtig}\} \\ &= 1 - (1-p)^3 \approx 2,997 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Bei codierter Übertragung werden pro Wort 6 bit übertragen, die Korrekturfähigkeit des Codes ist $t = 1$. Ein Wortfehler tritt auf, wenn mindestens 2 Bits falsch sind. Es folgt:

$$\begin{aligned} P\{\text{Wort falsch}\} &= \sum_{i=2}^6 \binom{6}{i} p^i (1-p)^{6-i} \\ &= 1 - P\{\text{alle 6 Bits richtig}\} - P\{\text{genau 5 Bits richtig}\} \\ &= 1 - (1-p)^6 - 6p(1-p)^5 = 1,496 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

- d) Nach der Decodierung ist die Wortlänge 3, da die Paritycheckbits keine Information tragen.

(*) Nach der Decodierung ist das Wort falsch, wenn mindestens 1 Bit falsch ist:

$$P_B = P\{1 \text{ Bit falsch}\} \leq P\{\text{Wort falsch}\}$$

(**) Nach oben kann die Wortfehlerwahrscheinlichkeit abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned} P\{\text{Wort falsch}\} &= \sum_{i=1}^3 \binom{3}{i} P_B^i (1-P_B)^{3-i} \\ &= 1 - (1-P_B)^3 = 3P_B + P_B^3 - 3P_B^2 < 3P_B, \end{aligned}$$

da $0 < P_B < 1$ gilt.

Insgesamt folgt so aus (*) und (**):

$$\frac{1}{3} P\{\text{Wort falsch}\} < P_B \leq P\{\text{Wort falsch}\}$$

Lösung zu Aufgabe 23

- a) Für $a, b \in \text{GF}(2)$ gilt $a + b = a - b$. Damit wird

$$\begin{aligned} &(x+1)(x^3+x^2+1)(x^3+x+1) \\ &= (x+1)(x^6+x^5+x^3+x^4+x^3+x+x^3+x^2+1) \\ &= x^7+x^6+x^4+x^5+x^4+x^2+x^4+x^3+x \\ &\quad + x^6+x^5+x^3+x^4+x^3+x+x^3+x^2+1 \\ &= x^7+1 = x^7-1 \end{aligned}$$

Dass $g_1(x) = x^3 + x^2 + 1$ und $g_2(x) = x^3 + x + 1$ irreduzibel in $\text{GF}(2)$ sind, zeigt man durch Einsetzen von $x = 0$ und $x = 1$. Es gilt in beiden Fällen $g_1(x) = g_2(x) = 1$.

- b) Das Polynom $(n-k)$ -ten Grades $g(x)$ ist Generatorpolynom eines (n,k) -Blockcodes, wenn $g(x)$ Teiler von $x^n + 1$ ist.

Wie die Rechnung unter a) zeigt, ist

$$g(x) = x^4 + x^2 + x + 1$$

ein Teiler von $x^7 + 1$ und damit Generatorpolynom eines zyklischen $(7,3)$ -Blockcodes.

- c) Der zum unter b) gefundenen Code gehörende Encoder ist in Bild 33 skizziert.

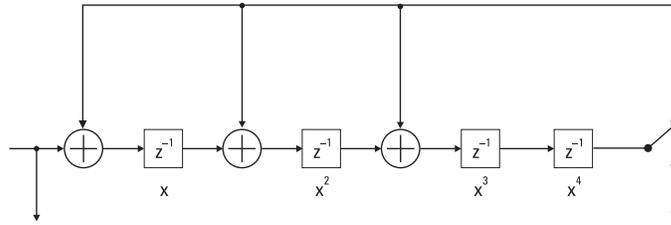


Abbildung 33: Blockencoder

Lösung zu Aufgabe 24

- n ist die Anzahl der Codebits, hier also 6 und k entspricht der Anzahl Infobits, hier $k = 3$.
- Da der erste Teil von $\overline{\mathbf{G}}$ keine Einheitsmatrix ist wird kein systematischer Code erzeugt.
- Zuerst müssen alle Codewörter durch $\vec{c} = \vec{d} \overline{\mathbf{G}}$ ermittelt werden. Da der Code linear ist, kann die minimale Hammingdistanz durch die Distanz eines Codewortes zum Nullwort ermittelt werden. Die Codewörter und zugehörigen Hammingdistanzen sind in der folgenden Tabelle zu finden.

| \vec{d}^T | \vec{c}^T | d_{min} |
|-------------|-------------|-----------|
| 000 | 000000 | - |
| 001 | 001100 | 2 |
| 010 | 011110 | 4 |
| 011 | 010010 | 2 |
| 100 | 111111 | 6 |
| 101 | 110011 | 4 |
| 110 | 100001 | 2 |
| 111 | 101101 | 4 |

$$d_{min} = 2, t = 0.$$

- Das Systematisieren der Matrix funktioniert, durch zeilenweise Addition, derart, dass im linken Teil der Matrix eine Einheitsmatrix entsteht. Die Addition von Zeile 2 zu Zeile 3 ergibt

$$\overline{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Addiert man zusätzlich noch Zeile 1 zu Zeile 2 erhält man die systematische Matrix

$$\overline{\mathbf{G}}_{sys} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Nein, $\overline{\mathbf{G}}_{sys}$ erzeugt keinen zyklischen Code. Dies kann aus der Matrix abgelesen werden, da die zyklische Verschiebung eines Codewortes kein gültiges Codewort ist. Alternativ kann gezeigt werden, dass $(x^6 + 1) : (x^3 + x^2)$ nicht ohne Rest teilbar ist.

Lösung zu Aufgabe 25

- Die Zustandsnummer ergibt sich als Binärzahl aus dem von rechts nach links gelesenen Inhalt der Zustandszellen (Bild 29). Die Codebits sind in Bild 34 in ihrer "natürlichen" Reihenfolge (1. Codebit links, 2. Codebit rechts) angegeben.
- Der Trellis zur Viterbi-Decodierung der empfangenen Codebitfolge und die am wahrscheinlichsten gesendete Codebitfolge sind in Bild 35 dargestellt.

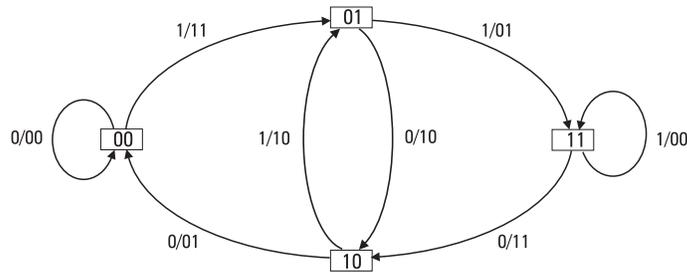


Abbildung 34: Zustandsdiagramm

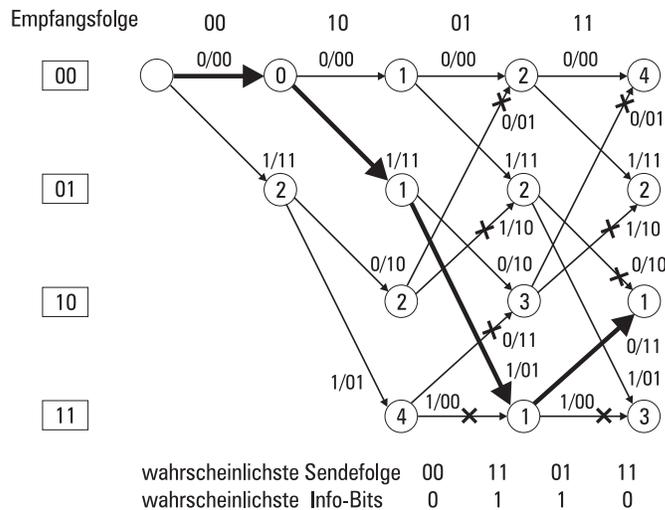


Abbildung 35: Faltungscoder

Lösung zu Aufgabe 26

- Das Zustandsdiagramm zeigt Bild 36.
- Aus Bild 37, das den Trellis zur Viterbi-Decodierung zeigt, folgt, dass die am wahrscheinlichsten gesendeten Datenbits 1 0 | 0 1 | 1 0 sind.

Lösung zu Aufgabe 27

- Siehe Abbildung 38.
- Damit sich der Encoder nach einer beliebigen Datenfolge garantiert im Zustand 11 befindet muss die Folge {1,1} an die Sendefolge angehängt werden.
- Siehe folgende Tabelle.

| Takt | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------|-----------|-------|--------------|---|------------|-----------|-----------|-----------|
| | Datenwort | | Terminierung | | Codewörter | | | |
| | d_1 | d_2 | 0 | 0 | $c_1 c_2$ | $c_1 c_2$ | $c_1 c_2$ | $c_1 c_2$ |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 00 | 00 | 00 | 00 |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | 00 | 10 | 11 | 01 |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 10 | 11 | 01 | 00 |
| | 1 | 1 | 0 | 0 | 10 | 01 | 10 | 01 |

- Ein terminierter Faltungscoder kann als Blockcode interpretiert werden, da die komplette Eingangsfolge immer auf die gleichen Codebits abgebildet wird. Bei diesem Code hier ist die Summe aus zwei Codewörtern wieder ein gültiges Codewort, d.h. dieser Blockcode ist auch linear.

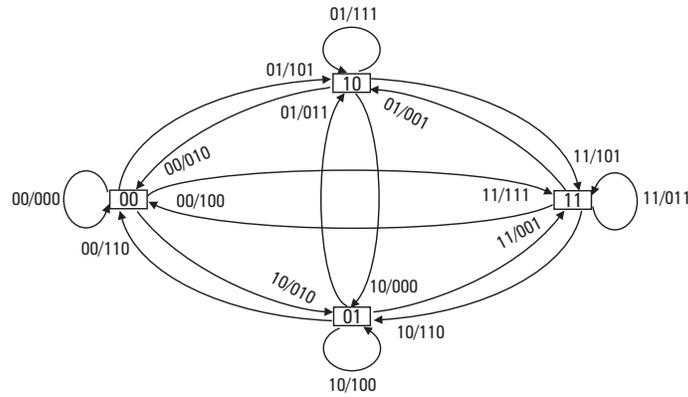


Abbildung 36: Zustandsdiagramm

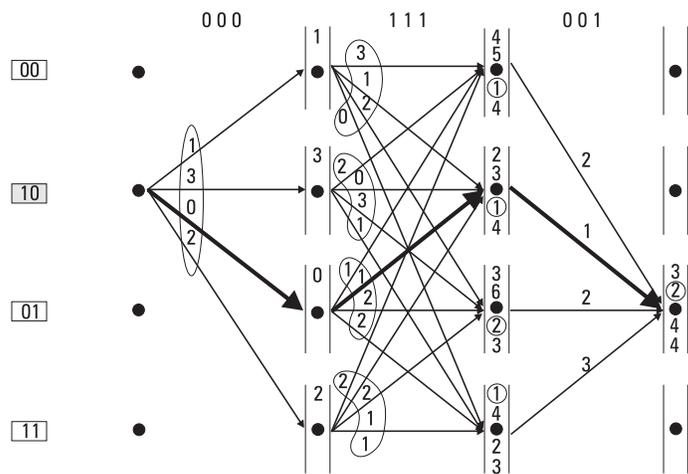


Abbildung 37: Trellis zur Viterbi-Decodierung

- e) Zwei Infobits ($k = 2$) werden auf acht Codebits ($n = 8$) abgebildet. Die Coderate (ohne Terminierung) ist folglich $R = k/n = 1/4$.

Lösung zu Aufgabe 28

- Das Zustandsdiagramm ist in Abbildung 39 dargestellt.
- Hieraus ergibt sich die zu $\vec{d} = [1010]^T$ gehörende Codebitfolge $\vec{c} = [11010001]^T$. Der Endzustand ist 10.
- Die Decodierung mittels des Viterbi-Algorithmuses und Euklidischem Abstand als Metrik ist in Abbildung 40 gezeigt.

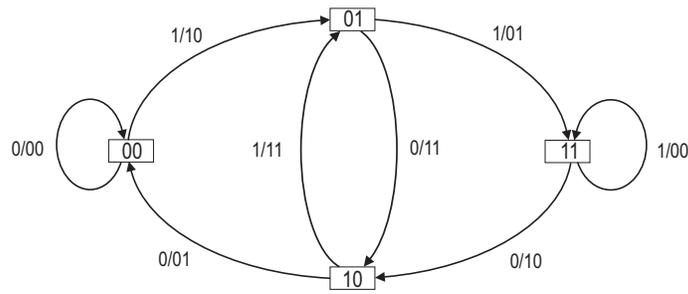


Abbildung 38: Zustandsdiagramm

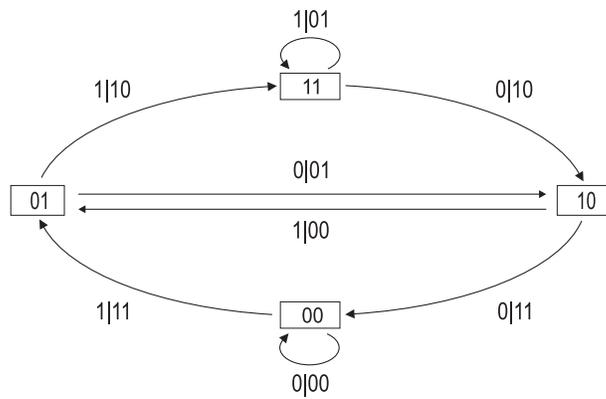


Abbildung 39: Zustandsdiagramm

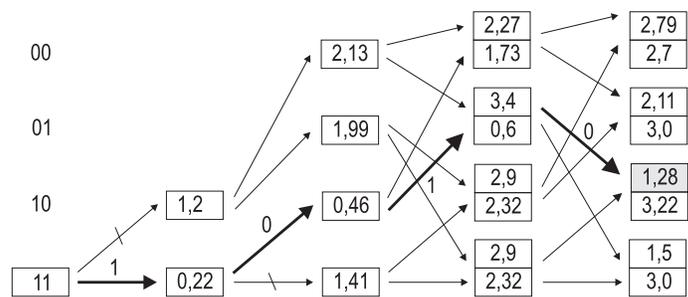


Abbildung 40: Viterbi Decodierung mit Euklidischem Abstand als Metrik

4. Übung: Modulationsverfahren, OFDM

Stand 20. April 2015

Aufgabe 29* [Jon11]

Ein Sender überträgt das Bandpasssignal

$$s(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos\{2\pi f_T t + X(nT)\}$$

mit

$$X(nT) \in \{\vartheta_m = \frac{2\pi m}{M}; m = 0, 1, \dots, M-1\}.$$

- Berechnen Sie die komplexe Einhüllende $u(t)$.
- Zeichnen Sie die Signalraumdiagramme für $M = 2$ und $M = 4$.
- Berechnen Sie für $M = 2$ und $M = 4$ den Abstand d zweier benachbarter Signalvektoren. Skizzieren Sie in den Signalraumdiagrammen aus b) die optimalen Entscheidungsgrenzen bei gleichwahrscheinlichen Symbolen $X(nT)$ und additivem weißen Gauß'schen Rauschen.

Aufgabe 30* [Jon11]

Wir vergleichen ein QPSK- und ein 16-PSK-Signal. Beide werden über einen AWGN-Kanal übertragen und besitzen dieselbe Symbolrate. Die erhöhte Übertragungskapazität des 16-PSK-Signals wird zur Kanalcodierung verwendet. Bild 41 zeigt die Signalraumdiagramme.

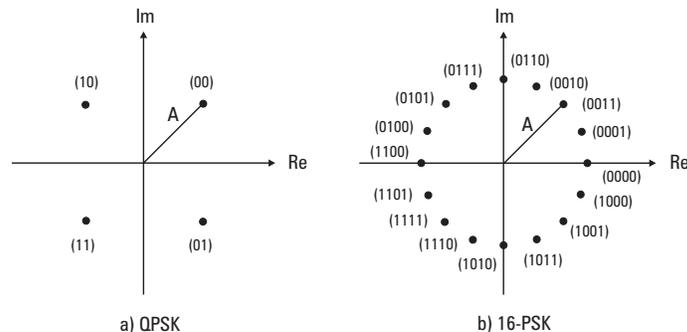


Abbildung 41: Signalraumdiagramme

- Um welchen Faktor L unterscheidet sich das SNR_{bit} zwischen einem QPSK- und einem 16-PSK-Signal, wenn als Störung komplexes AWGN angenommen wird? Geben Sie L auch in dB an!
- Welche Coderate R ergibt sich im Fall der 16-PSK-Modulation?

- c) Der asymptotische Codierungsgewinn ist $G = 10 \log(R \cdot d_{\min})$ dB. Wie groß muss die Codewortlänge n eines Blockcodes, der einen maximalen kleinsten Hammingabstand d_{\min} aufweist, mindestens werden, damit G den Modulationsverlust L ausgleicht? (Es gilt $d_{\min} \leq n - k + 1$.)

Es wird (natürlich) von gleichverteilten Symbolen ausgegangen.

Bemerkung: Vom Bit zum Sendesignal

Sollen digitale Informationen über ein physikalisches Medium (z.B. Telefonkabel, Lichtwellenleiter oder Freiraumausbreitung) übertragen werden, durchlaufen sie mehrere Verarbeitungsschritte. Zuerst werden die Daten für die Übertragung vorbereitet, d.h. es wird ggf. eine Quellencodierung, Kanalcodierung und eventuell auch eine Verschlüsselung durchgeführt. In einem nächsten Schritt, der Modulation werden mehrere Bits zu Informationssymbolen zusammengefaßt. Diese Informationssymbole sind im Allgemeinen komplex und können bei linearen Modulationsverfahren im Signalraumdiagramm (manchmal auch IQ-Diagramm genannt) dargestellt werden. Zu diesem Zeitpunkt hat man zeitdiskrete Informationssymbole. Die Aufgabe des Impulsformers ist es, aus den diskreten Symbolen ein zeitkontinuierliches Signal zu bilden. Eine Möglichkeit (jedoch mit ungünstigen spektralen Eigenschaften) ist die rechteckige Impulsform. Diese schaltet hart zwischen den Informationssymbolen um und hält zwischen den Abtastzeitpunkten den entsprechenden Pegel. Eine andere, häufig genutzte Impulsform ist das Raised-Cosine Filter, welches die Übergänge zwischen den Symbolen glatter macht. Als letzter Schritt findet eine Mischung in den gewünschten Frequenzbereich statt.

Die Abbildung 42 zeigt schematisch den soeben beschriebenen Verlauf. Im oberen Teil sind exemplarisch einige Bits gezeigt. Diese werden den Informationssymbolen $\{-1, +1\}$ zugeordnet. Dies entspricht einer BPSK, also einer zweistufigen Phasenumtastung. Das mittlere Bild zeigt den zeitlichen Verlauf der Informationssymbole. Im Signalraumdiagramm hat eine BPSK einen Punkt bei $(-1, 0j)$ und bei $(+1, 0j)$. Im unteren Bild sind nun zwei verschiedene Möglichkeiten der Impulsformung schematisch dargestellt.

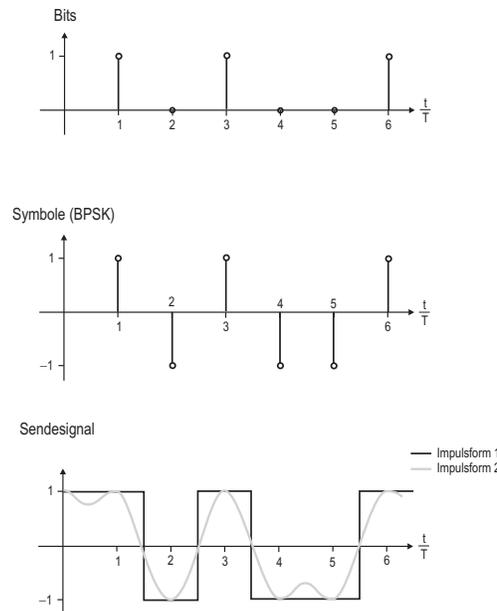


Abbildung 42: Schematische Darstellung vom Bit zum Sendesignal

Bemerkung: Simulation von PSK-Signalen

Im Arbeitsbereich zu dieser Vorlesung finden Sie unter dem Punkt Vorlesungunterlagen ein Matlab/Simulink-Modell (PSK_Modulation.mdl), mit dem Sie verschiedene PSK-Modulationsverfahren simulieren und untersuchen können. Nach dem Öffnen des Modells sehen Sie den oben beschriebenen Verlauf (siehe Abbildung 43). Durch Klicken auf die Kästen „Phase modulation“ und „Pulse Shaping“ können Sie die Modulationsart (siehe Abbildung 44) und

die Pulsform (siehe Abbildung 45) einstellen. Hinter dem Kasten „Scopes“ (siehe Abbildung 46) verbirgt sich die Auswahl der verschiedenen Anzeigen.

Betrachten Sie das Spektrum, so können Sie den unterschiedlichen Bandbreitebedarf der verschiedenen Pulsformung feststellen. Im Fenster „Trajectory“ ist der zeitliche Verlauf des Sendesignals im Signalraumdiagramm zu sehen. Die übliche Darstellung von linearen Modulationsarten im Signalraumdiagramm durch Punkte beschreibt die möglichen Zustände genau zu den Abtastzeitpunkten des Symboltaktes. Hier ist nun zusätzlich zu sehen, wie der Wechsel zwischen den Informationssymbolen stattfindet (\rightarrow Impulsformung). In Abbildung 47 sind exemplarisch das Signalraumdiagramm sowie das Spektrum einer $\pi/4$ -DQPSK mit einer Raised-Cosine Impulsformung bei einem Roll-Off-Faktor von 0.5 zu sehen.

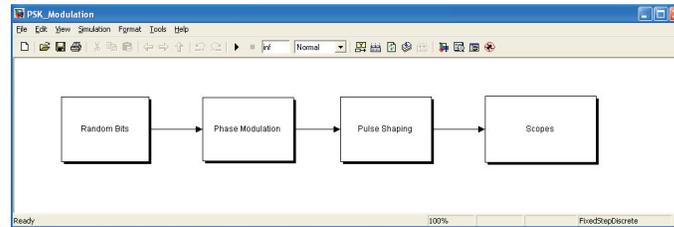


Abbildung 43: Simulation von PSK-Signalen

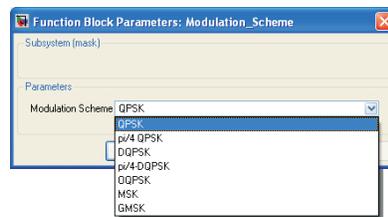


Abbildung 44: Auswahl der Modulationsart

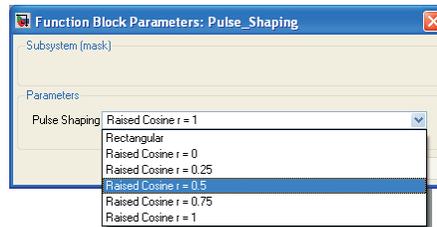


Abbildung 45: Auswahl der Impulsformung

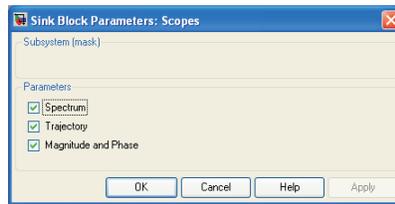


Abbildung 46: Auswahl der Anzeigen

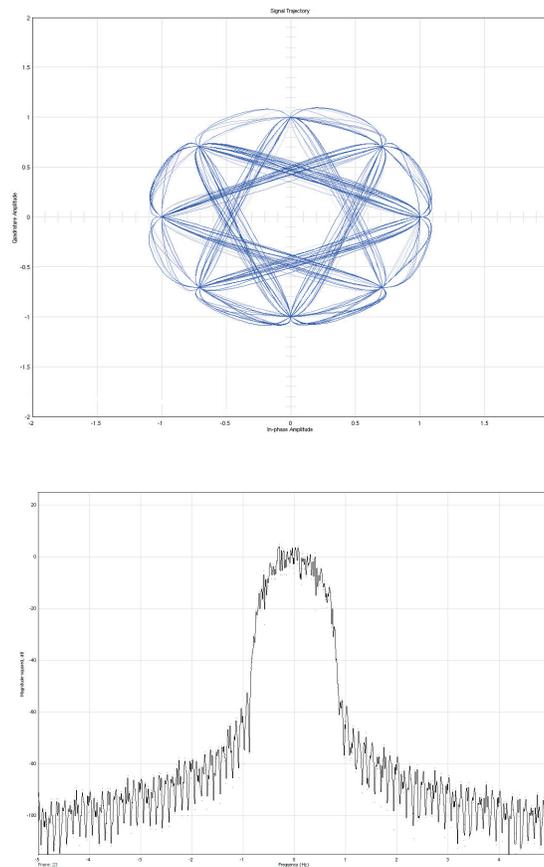


Abbildung 47: Signalraumdiagramm mit Trajektorie sowie Spektrum einer $\pi/4$ -DQPSK

Aufgabe 31* [F2012]

- a) Welche besonderen Eigenschaften hat eine $\pi/4$ -DQPSK Modulation im Vergleich zu einer QPSK Modulation und wann sind diese von Nutzen?
- b) Skizzieren Sie die Trajektorien für eine OQPSK-Übertragung für den Fall rechteckiger Impulsformung und für den Fall einer sinusförmigen Pulsform.
- c) Gegeben sind eine 16-PSK und eine 16-QAM Modulation. Berechnen Sie für beide Verfahren den minimalen Abstand zwischen zwei Symbolpunkten. Beide Alphabete seien so normiert, dass die Varianz bei gleichverteilten Symbolen eins ist.
- d) Welches Verfahren würden Sie im Falle von AWGN bevorzugen? Begründung!

Aufgabe 32* [Jon11]

Ein OFDM-System mit 48 Unterträgern, rechteckiger Impulsformung und BPSK als Unterträgermodulation soll 2 Mbit/s übertragen.

- a) Geben Sie die Dauer T_N eines OFDM-Nutzsymbols, den Unterträgerabstand Δf und die Gesamtbandbreite des Systems B_s an!
- b) Um wieviele BPSK-Symbole muss das OFDM-Nutzsymbol verlängert werden, damit bei einer Dauer der Kanalimpulsantwort von $\tau_{max} = 1,6 \mu\text{s}$ keine Intersymbolinterferenz (ISI) auftritt?
- c) Wie groß muss in diesem Fall die Kanalkohärenzzeit τ_k mindestens sein, damit der Kanal als zeitinvariant gelten kann?

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 29

Bei dem Sendesignal $s(t)$ handelt es sich um ein MPSK-Signal.

a) Wegen $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ ergibt sich

$$\begin{aligned} s(t) &= \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(2\pi f_T t + X(nT)) \\ &= \underbrace{\sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(X(nT))}_{s_I(t)} \cos(2\pi f_T t) - \underbrace{\sqrt{\frac{2E}{T}} \sin(X(nT))}_{s_Q(t)} \sin(2\pi f_T t). \end{aligned}$$

Für die komplexe Einhüllende von $s(t)$ gilt nach Gleichung (1.1-4) $u(t) = s_I(t) + js_Q(t)$, daraus folgt

$$\begin{aligned} u(t) &= \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(X(nT)) + j \sqrt{\frac{2E}{T}} \sin(X(nT)) \\ &= \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{jX(nT)}. \end{aligned}$$

b) Die Signalraumdiagramme für $M = 2$ und $M = 4$ zeigt Bild 48.

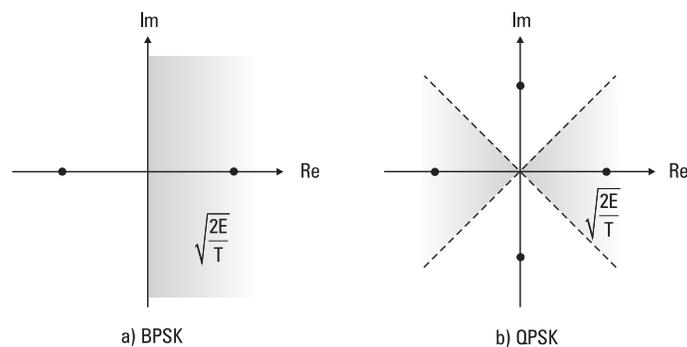


Abbildung 48: Signalraumdiagramme

c) Der Abstand zweier benachbarter Punkte ist für BPSK (Bild 48a))

$$d_2 = 2 \cdot \sqrt{\frac{2E}{T}}$$

und für QPSK (Bild 48b))

$$d_4 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{2E}{T}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{E}{T}}.$$

Die optimalen Entscheidungsgrenzen bei gleichwahrscheinlichen Symbolen und AWGN sind in Bild 48 eingezeichnet.

Lösung zu Aufgabe 30

- a) Hier geht es darum, sauber zwischen der Bitrate und der Symbolrate zu unterscheiden. Nach der Definition (B-2) im Anhang B ist

$$\text{SNR}_{bit} = \frac{E_b}{N_0}.$$

Ein QPSK-Signal überträgt zwei Bit pro Symbol und hat daher die Bitenergie (Bild 41a)

$$E_b = \frac{1}{2}E_s = \frac{1}{4} \int_0^T |u(t)|^2 dt = \frac{1}{4}A^2T.$$

Hieraus folgt

$$\text{SNR}_{bit}(\text{QPSK}) = \frac{A^2T}{4N_0}.$$

Ein 16-PSK-Signal überträgt 4 Bit pro Symbol, sodass hier $4E_b = E_s = \frac{1}{2}A^2T$ gilt (Bild 41b) und

$$\text{SNR}_{bit}(\text{16-PSK}) = \frac{A^2}{8N_0}$$

folgt. Insgesamt erhalten wir

$$L = \frac{\text{SNR}_{bit}(\text{16-PSK})}{\text{SNR}_{bit}(\text{QPSK})} = \frac{1}{2} \hat{=} -3 \text{ dB}.$$

- b) Da ein QPSK-Signal 2 bit/Symbol und ein 16-PSK-Signal 4 bit/Symbol überträgt, können mit 16-PSK bei sonst gleichen Verhältnissen für ein Informationsbit zwei Codebits übertragen werden. Die gesuchte Coderate ist also $R = \frac{1}{2}$.
- c) Durch den Codierungsgewinn soll der Modulationsverlust ausgeglichen werden, d.h.

$$G = 10 \log(R \cdot d_{\min}) = 10 \log\left(\frac{1}{2} \cdot d_{\min}\right) \geq L = 3 \text{ dB},$$

woraus folgt $d_{\min} = 4$. Mit

$$d_{\min} \leq n - k + 1 \Leftrightarrow n \geq d_{\min} + k - 1$$

und $R = \frac{k}{n} = \frac{1}{2}$ ergibt sich

$$n \geq 4 + \frac{n}{2} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}n \geq 3 \Leftrightarrow n \geq 6.$$

Die Codewortlänge n muss größer als 6 Bit gewählt werden.

Lösung zu Aufgabe 31

- a) Eine $\pi/4$ -DQPSK hat keine „Nulldurchgänge“ und dadurch geringere Amplitudenschwankungen. D.h. der lineare Bereich der eingesetzten Verstärker kann kleiner sein, was diese deutlich günstiger macht. Des Weiteren wird eine differentielle Codierung verwendet, wodurch die absolute Trägerphase nicht bekannt sein muss. Differentielle Codierung wird noch im Detail in Übung 5 behandelt.
- b) Lösung siehe Abbildung 49. Eine MSK Modulation kann auch als OQPSK Modulation mit sinusförmiger Pulsformung interpretiert werden.
- c) Als erstes müssen die Signalraumdiagramme normiert werden. Bei einer 16-PSK liegen alle Symbolpunkte s auf dem Einheitskreis, d.h. $\sigma_s^2 = E\{s s^*\} - E\{s\}E\{s^*\} = 1$. Eine Normierung ist hier also nicht nötig. Nun wird eine 16-QAM, mit folgenden Symbolpunkten s betrachtet:

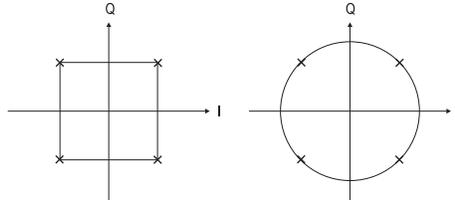


Abbildung 49: Trajektorien für eine OQPSK-Übertragung für den Fall rechteckiger Impulsformung (links) und für den Fall einer sinusförmigen Pulsformung (rechts).

| | | | |
|-----------|-----------|----------|----------|
| $-3 + 3j$ | $-1 + 3j$ | $1 + 3j$ | $3 + 3j$ |
| $-3 + j$ | $-1 + j$ | $1 + j$ | $3 + j$ |
| $-3 - j$ | $-1 - j$ | $1 - j$ | $3 - j$ |
| $-3 - 3j$ | $-1 - 3j$ | $1 - 3j$ | $3 - 3j$ |

Die Varianz der Symbolpunkte ist $\sigma_s^2 = 10$. Hieraus ergibt sich, dass eine auf die Varianz Eins normierte 16-QAM die Symbolpunkte $\bar{s} = s/\sqrt{10}$ nutzt. Die Abstände sind in Abbildung 50 berechnet und dargestellt.

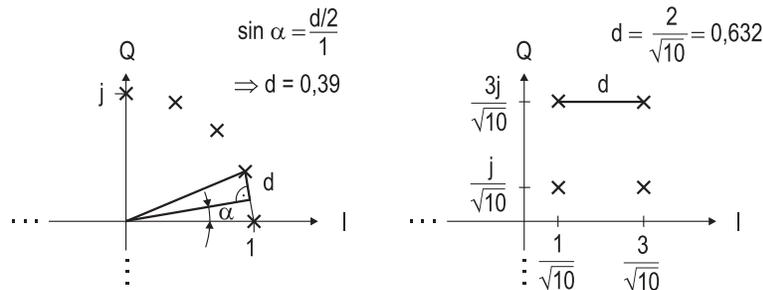


Abbildung 50: Symbolraumdiagramme einer 16-QAM und einer 16-PSK mit entsprechenden Abständen

- d) Wegen des größeren Abstandes bei 16-QAM ist mit einer geringeren Fehlerwahrscheinlichkeit zu rechnen.

Lösung zu Aufgabe 32

Bei einer Datenrate $R_d = 2$ Mbit/s ist die Dauer eines BPSK-Symbols $T_d = 1/R_d = \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} \text{ s} = 0,5 \mu\text{s}$.

- a) Die Zahl der Unterträger ist $N = 48$, woraus mit (7.7-1) folgt

$$T_N = NT_d = 24 \mu\text{s}.$$

Aus (7.7-2) ergibt sich

$$\Delta f = \frac{1}{T_N} = \frac{10^6}{24} \text{ Hz} = 41,67 \text{ kHz}.$$

Die Gesamtbandbreite errechnet sich daraus zu

$$B_s = N\Delta f = 2 \text{ MHz}.$$

Dieses Ergebnis ist insofern kritisch zu sehen, als in realen Systemen immer Schutzbänder zu berücksichtigen sind.

- b) Die Länge des Schutzintervalls berechnet sich aus (7.7-7) zu

$$L_G = \left\lceil \frac{\tau_{max} N}{T_N} \right\rceil = \left\lceil \frac{1,6 \cdot 48}{24} \right\rceil = \lceil 3,2 \rceil = 4.$$

Mit $L_G = 4$ Datensymbole folgt für die Dauer T_G des Schutzintervalls:

$$T_G = 4 \cdot 0,5 \mu s = 2 \mu s.$$

- c) Damit der Kanal als zeitinvariant gelten kann, darf er sich über die Dauer eines OFDM-Symbols hinweg nicht signifikant ändern. Diese Zeit ist nach (7.7-6)

$$T_S = T_N + T_G = 26 \mu s,$$

also muss $\tau_K \geq 26 \mu s$ gelten.

5. Übung: Entscheidungstheorie, Demodulation, Realisierungsgrenzen, MIMO

Stand 20. April 2015

Aufgabe 33* [Jon11]

Über einen diskreten Kanal werden Bits $x_k \in \{-1; 1\}$ übertragen. An seinem Ausgang liegt das Empfangssignal $r = x_k + n$ vor. Die Dichten von Sendesignal x_k und Störung n sind durch

$$f_X(x_k) = \frac{1}{3}\delta(x_k - 1) + \frac{2}{3}\delta(x_k + 1) \quad \text{und} \\ f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2}$$

gegeben.

- Auf welchen gesendeten Wert x_0 wird mittels des ML-Kriteriums (8.2-3) geschlossen, wenn $r_0 = 0,15$ empfangen wird?
- Auf welchen Wert x_0 wird unter identischen Bedingungen nach dem MAP-Kriterium (8.2-1) geschlossen?

Aufgabe 34* [Jon11]

Über einen zeitdiskreten Kanal werden stochastisch unabhängig voneinander Binärwerte $d_k \in \{-1; 1\}$, $k \in \mathbb{Z}$, übertragen. Das Sendesignal d_k wird durch einen mittelwertfreien AWGN-Prozess n_k mit der Varianz $\sigma^2 = 0,25$ gestört. Sendesignal und Störprozess sind unkorreliert.

- Wie groß ist die Bitfehlerwahrscheinlichkeit im Empfänger, wenn ein Schwellwertdetektor mit $\hat{d}_k = \text{sign}(r_k) = \text{sign}(d_k + n_k)$ verwendet wird? Welchen Wert hat das Signal-zu-Rausch Verhältnis (SNR) am Entscheider?

Das Übertragungssystem wird nun in einer Umgebung betrachtet, in der ein zusätzlicher gedämpfter Ausbreitungspfad auftritt, der das gesendete Signal um eine Bitdauer verzögert und dieses dem zeitlich korrekt empfangenen Signal additiv überlagert. Der zusätzliche Ausbreitungspfad wird um den Faktor $a = 0,5$ gedämpft. Die AWGN-Störung bleibt unverändert.

- Geben Sie die Dichte der resultierenden Störung an, wenn der zusätzliche Ausbreitungspfad als Störung aufgefasst wird.
- Wie groß sind die Bitfehlerwahrscheinlichkeit und das Signal-zu-Rausch-Verhältnis am Entscheider?

Aufgabe 35* [Jon11]

Mit dem (analogen) Signal $s(t)$ werden bei rechteckiger Pulsformung Binärdaten $d_n \in \{-1; 1\}$ übertragen, indem $s(t)$ mit $m_s(t) = \cos(2\pi f_c t)$ auf die Trägerfrequenz f_c gemischt wird.

- a) Welches Problem entsteht, wenn das Signal im Empfänger bei als ideal vorausgesetzter Synchronisation bezüglich des Symboltakts mit $m_E(t) = 2 \cos(2\pi f_c t + \varphi_0)$ heruntergemischt und nach anschließender Tiefpassfilterung demoduliert wird? Die Trägerphase φ_0 sei unbekannt. Diskutieren Sie vor dem allgemeinen Fall zunächst die Fälle $\varphi_0 = \pi$ und $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$.

Eine Möglichkeit, trotz unbekannter Trägerphase demodulieren zu können, besteht in der Anwendung eines differentiellen Modulationsverfahrens. So wird z.B. bei differentieller BPSK anstatt d_n das Symbol $\tilde{d}_n = d_n \cdot \tilde{d}_{n-1}$ gesendet und im Empfänger vor der Entscheidung über das gesendete Bit das Empfangssymbol \tilde{r}_n gemäß $r_n = \tilde{r}_n \cdot \tilde{r}_{n-1}$ verarbeitet.

- b) Führen Sie anhand der Symbolfolge

$$\{d_n\}_{n=0}^8 = \{1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, 1\}$$

die differentielle Modulation und Demodulation durch, wenn $\tilde{d}_{-1} = 1$ gilt.

Mit den zu übertragenden Daten $d_n \in \{-1, 1\}$ und dem rechteckigen Impuls $g(t)$ schreibt sich das Sendesignal in Tiefpasslage als

$$s(t) = \sum_n d_n g(t - nT).$$

Das auf die Trägerfrequenz gemischte Signal ist dann

$$\tilde{s}(t) = s(t) \cos(2\pi f_c t).$$

Aufgabe 36* [F2011]

- a) Gegeben sind die Modulationsverfahren 2-FSK und 4-FSK. Beide verwenden den gleichen Symboltakt und besitzen das gleiche E_b/N_0 . Vergleichen Sie die Bitfehlerrate, die Bandbreite und die Datenrate der beiden Verfahren.
- b) Vergleichen Sie auf dieselbe Weise wie in Aufgabenteil a) die Verfahren BPSK, QPSK und 8-PSK miteinander.
- c) Gegeben sind die folgenden Signalraumdiagramme: Um welche Modulationsarten handelt es sich?

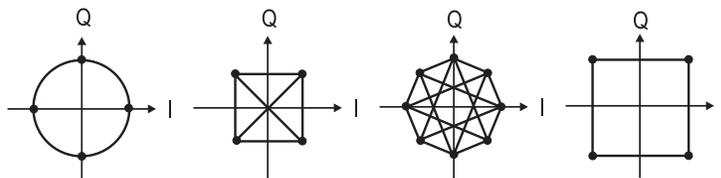


Abbildung 51: Symbolraumdiagramme

- d) Erläutern Sie den Begriff Bandbreiteneffizienz.
- e) Welche Bandbreiteneffizienzen besitzen 256-QAM und BPSK?

Aufgabe 37 [H2010]

- a) Wie viele Symbole pro Sekunde können typischerweise bei digitaler Übertragung über einen 1 Hz breiten Kanal übertragen werden und wie viele maximal. Wie nennt man diese obere Grenze?
- b) Ihnen wird ein digitales Kommunikationssystem zum Kauf angeboten, das bei einer Bandbreite von 200 kHz und einem Signal zu Rauschverhältnis von $\text{SNR} = 8$ dB Daten mit einer Datenrate von 600 kbit/s fehlerfrei übertragen kann. Halten Sie dies für plausibel? Begründung!
- c) Welche digitalen Modulationsarten kennen Sie, bei denen keine Phasensprünge um π auftreten. Welche Vorteile haben diese?

Aufgabe 38* [H2010]

- a) Ein Sender habe 6 Sendeantennen. Die Sendesymbole seien durch $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, \dots$ gegeben. Gehen Sie davon aus, dass bereits ein Zustand erreicht ist, in dem pro Zeitschlitz jede Antenne ein Symbol sendet. Dieser Zustand soll als Zeitschlitz 0 festgelegt werden. Geben Sie die Sendevektoren für D-BLAST als auch für V-BLAST im dritten Zeitschlitz an.

Gegeben sei das folgende 8-PSK Signalraumdiagramm, bei dem alle Signalpunkte auf dem Einheitskreis liegen.

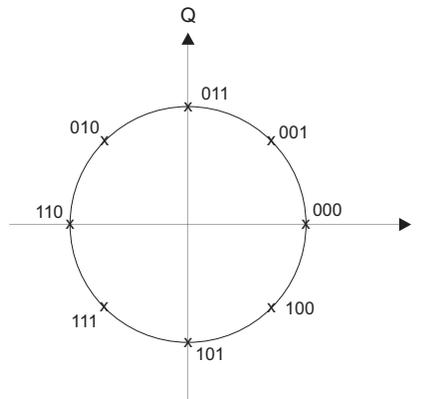


Abbildung 52: Signalraumdiagramm 8-PSK

Die Bitfolge (010 110 100 101) soll mit Hilfe des gegebenen Signalraumdiagramms moduliert und anschließend unter Verwendung des Alamouti-Verfahrens übertragen werden.

- b) Ordnen Sie den Bitfolgen die bei der Modulation entstehenden komplexen Signale zu.
 c) Geben Sie für die ersten vier Zeitschlitz die jeweils von Antenne 1 bzw. Antenne 2 gesendeten Signale an.
 d) Kann durch Verwendung des Alamouti-Codes die Übertragungsrate vergrößert werden?
 e) Nun sei ein 8-PSK Space-Time Trellis Code gegeben, dessen Signalraumdiagramm und Trellis in Abbildung 53 dargestellt sind. Codieren Sie die Datenfolge 2, 3, 1, 7, 1, 5. Dabei soll der Anfangszustand 0 sein.

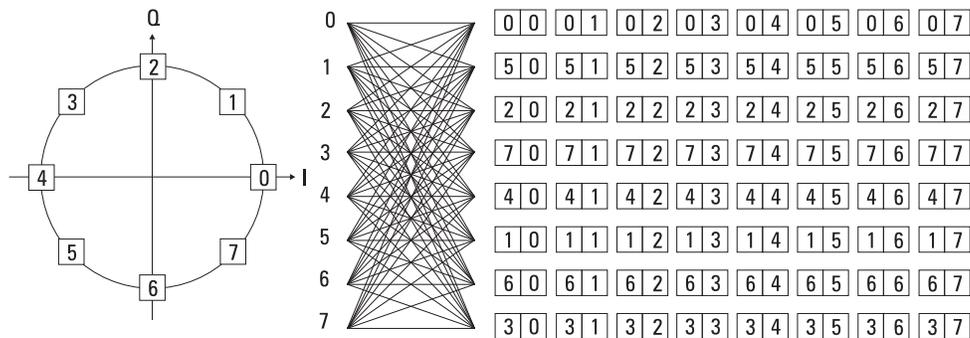


Abbildung 53: Signalraumdiagramm und Trellis

Lösung zu Aufgabe 33

- a) Für die Anwendung des ML-Kriteriums wird von der Gleichverteilung der Sendesignale ausgegangen. Hier gilt also

$$f_X(x_k) = \frac{1}{2}\delta(x_k - 1) + \frac{1}{2}\delta(x_k + 1),$$

woraus folgt

$$f_{R|X}(r|x_k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(r-x_k)^2}, \quad x_k \in \{-1; 1\}.$$

Gesucht ist diejenige der beiden Dichten $f_{R|X}(r|x_k)$, die bei $r = 0,15$ den größeren Wert besitzt. Einsetzen liefert:

$$f_{R|X}(0,15|1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-0,85^2} \approx 0,274$$

$$f_{R|X}(0,15|-1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-1,15^2} \approx 0,15$$

Mit dem ML-Kriterium wird also auf $x_0 = 1$ geschlossen. Die Entscheidungsfindung nach dem ML-Kriterium ist in Bild 54 skizziert.

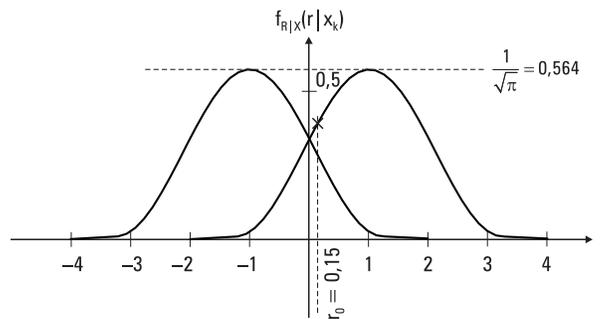


Abbildung 54: Entscheidungsfindung nach ML-Kriterium

- b) Für die Anwendung des MAP-Kriteriums müssen nun die a priori Wahrscheinlichkeiten berücksichtigt werden. Hier gilt nun

$$f_X(x_k) = \frac{1}{3}\delta(x_k - 1) + \frac{2}{3}\delta(x_k + 1),$$

d.h. die bedingten Dichten der Empfangsgröße r sind vor der Maximumbildung zu gewichten. Es ergibt sich:

$$\frac{1}{3}f_{R|X}(r|1) = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-0,85^2} \approx 0,091$$

$$\frac{2}{3}f_{R|X}(r|-1) = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-1,15^2} \approx 0,1$$

Nach dem MAP-Kriterium wird daher auf $x_0 = -1$ geschlossen (vergleiche auch Bild 55).

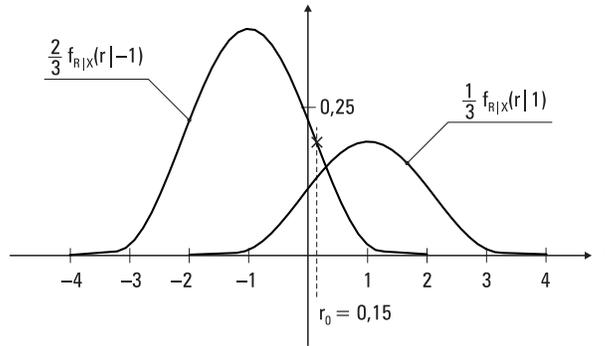


Abbildung 55: Entscheidungsfindung nach MAP-Kriterium

Lösung zu Aufgabe 34

a) Es gilt $r_k = d_k + n_k$ mit $d_k \in \{-1; 1\}$ und $P(d_k) = 0,5$. n_k besitzt die Dichte

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} \quad \text{mit } \sigma^2 = 0,25.$$

Aus Symmetriegründen (siehe auch Bild 56) gilt für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P_b &= P\{r > 0 \mid d_k = -1\}P\{d_k = -1\} \\ &\quad + P\{r < 0 \mid d_k = 1\}P\{d_k = 1\} \\ &= P\{r > 0 \mid d_k = -1\} = \frac{1}{0,5 \cdot \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(r+1)^2}{0,5}} dr. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $\rho = \frac{r+1}{0,5}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} P_b &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_2^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho = 1 - \Phi(2) \\ &= 1 - 0,9772 = 2,28 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SNR} &= \frac{\text{mittlere Signalleistung}}{\text{mittlere Rauschleistung}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}E\{|D_k|^2\}}{\frac{1}{2}E\{|N_k|^2\}} = \frac{1}{\sigma^2} = 4 \quad (\hat{=} 6 \text{ dB}). \end{aligned}$$

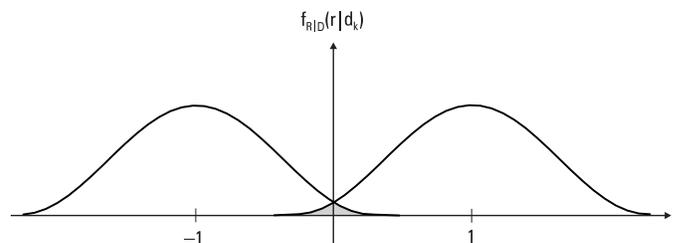


Abbildung 56: Bitfehlerwahrscheinlichkeit

b) Bild 57 zeigt das Empfangsmodell, aus dem folgt

$$r_k = d_k + 0,5d_{k-1} + n_k,$$

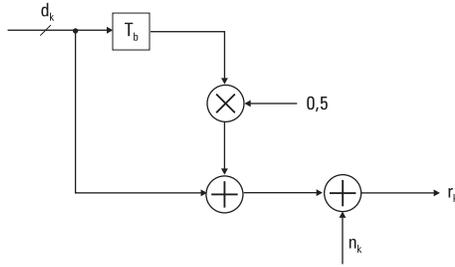


Abbildung 57: Empfangsmodell

wobei hier $s_k = 0,5d_{k-1} + n_k$ als Störung angesehen wird. Wir suchen also zunächst die Dichte von s . Nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung ergibt sich

$$\begin{aligned} f(s) &= \left[\frac{1}{2} \delta(s - 0,5) + \frac{1}{2} \delta(s + 0,5) \right] * \frac{1}{0,5 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{0,5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{(s-0,5)^2}{0,5}} + e^{-\frac{(s+0,5)^2}{0,5}} \right]. \end{aligned}$$

c) Wieder aus Symmetriegründen ergibt sich hier für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P_b &= P\{r > 0 | d_k = -1\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \left[e^{-\frac{(r+0,5)^2}{0,5}} + e^{-\frac{(r+1,5)^2}{0,5}} \right] dr. \end{aligned}$$

Im ersten Summanden in der eckigen Klammer wird $\rho = \frac{r+0,5}{0,5}$ und im zweiten $\nu = \frac{r+1,5}{0,5}$ gesetzt und es folgt:

$$\begin{aligned} P_b &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_3^{\infty} e^{-\frac{\nu^2}{2}} d\nu \\ &= \frac{1}{2} (1 - \Phi(1)) + \frac{1}{2} (1 - \Phi(3)) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \Phi(1) - \frac{1}{2} \Phi(3) = 1 - \frac{1}{2} \cdot 0,8413 - \frac{1}{2} \cdot 0,9987 \\ &= 0,08 \end{aligned}$$

Für die Berechnung des SNR wird hier zunächst die mittlere Leistung von s_k benötigt, die sich wegen der Unkorreliertheit von Sendesignal d_k und Rauschprozess n_k zu

$$\begin{aligned} E\{s_k^2\} &= E\{(0,5d_{k-1} + n_k)^2\} \\ &= E\{0,5^2 d_{k-1}^2\} + 2E\{0,5d_{k-1}n_k\} + E\{n_k^2\} \\ &= 0,25 + 0 + 0,25 = 0,5 \end{aligned}$$

berechnet. Es folgt

$$\text{SNR} = \frac{\frac{1}{2} E\{d_k^2\}}{\frac{1}{2} E\{s_k^2\}} = \frac{1}{0,5} = 2 \quad (\hat{=} 3 \text{ dB}).$$

Lösung zu Aufgabe 35

a) Wir gehen davon aus, dass das Signal bei der Übertragung nicht gestört wird. Damit ergibt sich am Empfänger die in Bild 58 dargestellte Situation und es gilt

$$\begin{aligned} r(t) &= \tilde{s}(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_c t + \varphi_0) \\ &= 2s(t) \cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_0) \\ &= s(t) [\cos \varphi_0 + \cos(4\pi f_c t + \varphi_0)]. \end{aligned}$$

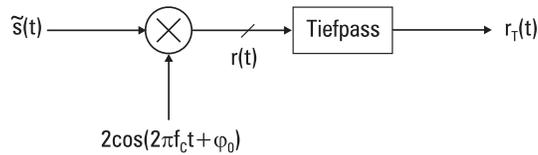


Abbildung 58: Empfänger ohne Störung

Für den Fall $\varphi_0 = \pi$ ergibt sich

$$r(t) = s(t)[-1 + \cos(4\pi f_c t + \varphi_0)]$$

und nach der Tiefpassfilterung

$$r_T(t) = -s(t).$$

Das heißt $s(t)$ erscheint vor dem Entscheider invertiert. Alle Symbole werden falsch empfangen. Für $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ folgt entsprechend

$$r_T(t) = 0.$$

Das heißt am Entscheider kommt kein Signal an. Im allgemeinen Fall ist

$$r_T(t) = s(t) \cos \varphi_0, \quad \varphi_0 \in [0, 2\pi).$$

Der Faktor $\cos \varphi_0$ dämpft das empfangene Signal. Für $\varphi_0 \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ tritt zusätzlich Bitinversion auf.

b) Modulation $\tilde{d}_n = d_n \cdot \tilde{d}_{n-1}$

| n | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---------------|----|---|---|---|---|----|----|---|---|---|
| d_n | - | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 |
| \tilde{d}_n | ① | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Demodulation $r_n = \tilde{r}_n \cdot \tilde{r}_{n-1}$, $\varphi_0 = 0$

| n | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---------------|----|---|---|---|---|----|----|---|---|---|
| \tilde{r}_n | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| r_n | - | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 |

Demodulation $r_n = \tilde{r}_n \cdot \tilde{r}_{n-1}$, $\varphi_0 = \pi$

Die empfangenen Symbole sind invertiert.

| | | | | | | | | | | |
|---------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| n | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| \tilde{r}_n | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| r_n | - | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 |

Demodulation $r_n = \tilde{r}_n \cdot \tilde{r}_{n-1}$, $\varphi_0 \in [0, \frac{\pi}{2})$,

1 Symbolfehler, keine Bitinversion

Ein Übertragungsfehler führt zu zwei Bitfehlern.

| | | | | | | | | | | |
|---------------|----|---|---|---|----|----|----|---|---|---|
| n | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| \tilde{r}_n | 1 | 1 | 1 | 1 | ⊖ | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| r_n | - | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 |

Lösung zu Aufgabe 36

- a) Zur Lösung wird auf Abbildung 10.1-1 (links) verwiesen. Man erkennt, dass bei festem E_b/N_0 4-FSK ($k = 4$) eine geringere Bitfehlerrate als 2-FSK ($k = 2$) besitzt. 4-FSK hat aber eine höhere Bandbreite, da doppelt so viele orthogonale Frequenzen benutzt werden müssen. Auch die Datenrate von 4-FSK (2 bit pro Symbol) ist um den Faktor 2 größer, verglichen mit 2-FSK (1 bit pro Symbol).
- b) Betrachtet man nun Abbildung 10.2-1 (rechts) erkennt man, dass, wieder bezogen auf ein festes E_b/N_0 , 8-PSK die höchste Bitfehlerrate ($k = 3$) besitzt, gefolgt von QPSK ($k = 2$) und BPSK ($k = 1$). QPSK und BPSK haben die gleiche Bitfehlerrate. Die nötige Bandbreite ist bei allen drei Verfahren gleich, die Datenrate ist, verglichen mit BPSK bei QPSK um den Faktor zwei und bei 8-PSK um den Faktor 3 größer. Es ist häufig sinnvoll, anstelle von BPSK QPSK zu verwenden, da diese bei gleichem SNR dieselbe Bitfehlerwahrscheinlichkeit haben aber doppelt so viele Bits pro Symbol übertragen werden können. Diese Bits können z.B. für eine zusätzliche Kanalcodierung verwendet werden.
- c) 1. *MSK* oder *GMSK*: Beide Verfahren besitzen eine exakt konstante Einhüllende.
 2. *QPSK* bzw. *QAM*: 4 verschiedene Symbole, direkter Übergang von jedem zu jedem Symbol möglich.
 3. $\pi/4$ -*DQPSK*: 8 mögliche Punkte im Konstellationsdiagramm. Anordnung durch zwei um $\pi/4$ gegeneinander gedrehte QPSK Diagramme, die entweder im geraden oder in ungeraden Taktschritten genutzt werden. Daher keine Nulldurchgänge.
 4. *OQSKP*: 4 verschiedene Symbole. Bei Symbolübergängen zeitlich getrennte Änderung von I- und Q-Anteil. Daher ebenfalls keine Nulldurchgänge.
- d) Die Bandbreiteneffizienz gibt an, wieviele Bits, bezogen auf eine Einheitsbandbreite, durch ein bestimmtes Modulationsverfahren bei idealer Impulsformung übertragen werden können.
- e) Bei 256-QAM können 8 Bits, bei BPSK nur 1 Bit übertragen werden.

Lösung zu Aufgabe 37

- a) Typischer Weise kann man 1 Symbol pro Sekunde und Hertz übertragen. Die obere Grenze liegt bei 2 Symbolen pro Sekunde und Hertz und wird Nyquist Grenze genannt. Hierbei wird immer von reellen Signalen ausgegangen.
- b) Für einen Kanal mit einem SNR von 8dB beträgt die Kanalkapazität nach Formel (10.3-1):

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right)$$

Bei dem gegebenen SNR von $8\text{dB} \hat{=} 10^{8/10} = 6,3$ ergibt sich eine Kanalkapazität von

$$C = 200\text{kHz} \cdot \log_2(1 + 6,3)\text{bit} = 573,96\text{kbit/s}$$

Handelt es sich um ein SISO System, so ist die genannte Datenrate unter keinen Umständen fehlerfrei zu erreichen. Bei einem MIMO System steigt die Kanalkapazität proportional mit der Anzahl der Antennen, d.h. hier ist unter Umständen die genannte Übertragungsrate möglich.

- c) Bei OQPSK, $\pi/4$ -DQPSK, MSK und GMSK treten keine Phasensprünge um π auf. Der Vorteil hierbei ist, dass es zu keinen kompletten Einbrüchen der Sendeamplitude kommt und dass die verwendeten Verstärker in einem kleineren Bereich linear sein müssen.

Lösung zu Aufgabe 38

- a) Bei V-BLAST sendet jede Antenne einen unabhängigen Datenstrom.

| Antenne | Zeitschlitz | | | |
|---------|-------------|----------|----------|----------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | s_1 | s_7 | s_{13} | s_{19} |
| 2 | s_2 | s_8 | s_{14} | s_{20} |
| 3 | s_3 | s_9 | s_{15} | s_{21} |
| 4 | s_4 | s_{10} | s_{16} | s_{22} |
| 5 | s_5 | s_{11} | s_{17} | s_{23} |
| 6 | s_6 | s_{12} | s_{18} | s_{24} |

Daraus folgt für V-BLAST $\vec{s}_{V\text{-BLAST}} = (s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{24})$. D-BLAST überträgt von allen Antennen den gleichen, zeitversetzten Datenstrom, also

| Antenne | Zeitschlitz | | | | | | | | |
|---------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | s_1 | s_2 | s_3 | s_4 | s_5 | s_6 | s_7 | s_8 | s_9 |
| 2 | - | s_1 | s_2 | s_3 | s_4 | s_5 | s_6 | s_7 | s_8 |
| 3 | - | - | s_1 | s_2 | s_3 | s_4 | s_5 | s_6 | s_7 |
| 4 | - | - | - | s_1 | s_2 | s_3 | s_4 | s_5 | s_6 |
| 5 | - | - | - | - | s_1 | s_2 | s_3 | s_4 | s_5 |
| 6 | - | - | - | - | - | s_1 | s_2 | s_3 | s_4 |

Es ergibt sich also: $\vec{s}_{D\text{-BLAST}} = (s_9, s_8, s_7, s_6, s_5, s_4)$.

- b) Aus Abbildung 52 kann man die Sendesymbole ablesen: $\{-0,7 + 0,7j; -1 + 0j; 0,7 - 0,7j; 0 - j\}$.
 c) Durch Anwendung des Alamouti-Schemas kann folgende Zeit-Raum Zuordnung gefunden werden.

| Antenne | Zeitschlitz | | | |
|---------|-------------|----------|-------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | s_1 | $-s_2^*$ | s_3 | $-s_4^*$ |
| 2 | s_2 | s_1^* | s_4 | s_3^* |

Bemerkung: In der Darstellung im Buch auf S. 139 (4. Auflage) ist ein Fehler unterlaufen. Korrekt entsprechen die Spalten den M Sendeantennen und die Zeilen den n Zeitschritten. Sollten Sie mit der fehlerhaften Darstellung gearbeitet haben, kommen Sie auf folgendes Schema:

| Antenne | Zeitschlitz | | | |
|---------|-------------|---------|----------|---------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | s_1 | s_2 | s_3 | s_4 |
| 2 | $-s_2^*$ | s_1^* | $-s_4^*$ | s_3^* |

Des Weiteren ist Formel (11.5-4) fehlerhaft. Korrekt lautet das decodierte Empfangssymbol zum 2. Taktschritt:

$$y_2 = h^*(2)r_1 - h(1)r_2^* = (|h(1)|^2 + |h(2)|^2) s_2 + h^*(2)w_1 + h(1)w_2^*$$

- d) Die Symbolrate wird durch Anwendung des Alamoutiverfahrens nicht erhöht, da innerhalb von zwei Zeitschlitzten auch nur zwei unterschiedliche Symbole übertragen werden. Da sich jedoch die Übertragungsqualität verbessert, kann ggf. durch die Verwendung von höherwertigen Modulationsverfahren eine höhere Datenrate übertragen werden.
 e) Die STTC Encodierung ist in Abbildung 59 dargestellt.

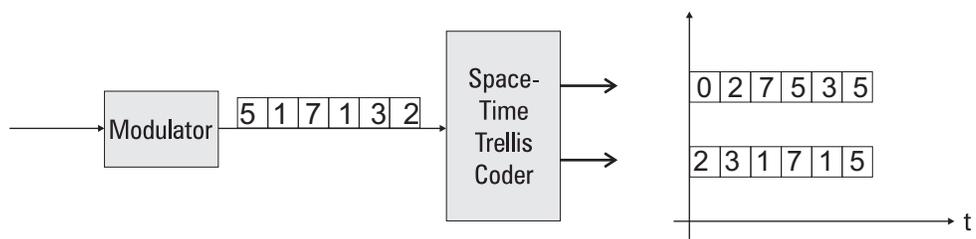


Abbildung 59: STTC Encodierung

6. Übung: Matched Filter, Modulationsverfahren, CDMA

Stand 20. April 2015

Aufgabe 39* [H2010]

Berechnen Sie die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit P_F der in Abbildung 60 dargestellten 8-QAM bei additivem Gauß'schen Rauschen. Gehen Sie dabei davon aus, dass die Rauschkomponenten in I bzw. in Q unabhängig voneinander sind und jeweils die mittlere Leistung $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$ besitzen. Geben Sie die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit als Funktion von P und N_0 an.

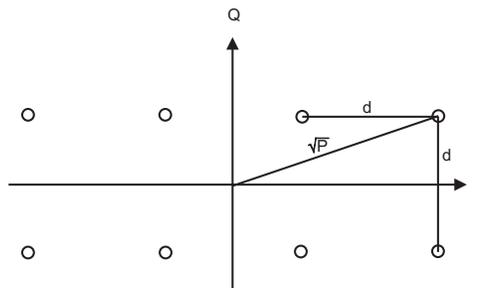


Abbildung 60: Signalraumdiagramm 8-QAM

Aufgabe 40 [F2011]

- Was wird durch Matched-Filter-Empfang maximiert?
- Gegeben ist die in Abbildung 61 dargestellte Impulsantwort $h(t)$ eines Sendefilters.

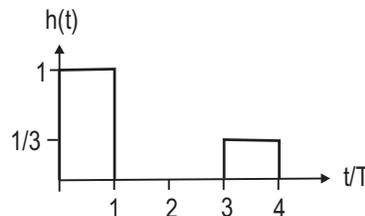


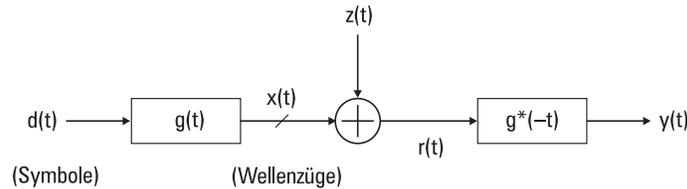
Abbildung 61: Impulsantwort eines Sendefilters

Skizzieren Sie sowohl die Impulsantwort des zum durch $h(t)$ charakterisierten Filters gehörenden Matched-Filters $g(t)$ als auch $h(t) * g(t)$.

- Unter welchen Umständen ist der Ausgang des Matched-Filters mit dem eines Korrelators identisch?

Aufgabe 41

Gegeben sei das folgende Übertragungssystem:



Das Signal $d(t)$ beschreibt die zu übertragende Information in Form der Symbole d_n , $n = -\infty \dots \infty$. Für BPSK Modulation können die Symbole d_n beispielsweise die Werte $+1$ und -1 annehmen. Es gilt

$$d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \delta(t - nT_S),$$

wobei T_S die Symboldauer ist. Die Symbole d_n sind Realisierungen der stochastischen Zufallsvariablen D_N . Für diese Zufallsvariablen soll gelten $E\{D_n\} = 0$, $E\{|D_n|^2\} = 1$ und $E\{D_i D_j\} = 0$ für $i \neq j$. Das pulsformende Filter sei $g(t)$, welches die diskrete Symbolfolge in einen Wellenzug umformt. Bei ideal bandbegrenzender Pulsformung gilt

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{B}} \frac{\sin \pi B t}{\pi t}, \quad B = 1/T_S.$$

Die Variable $z(t)$ bezeichnet eine Realisierung eines komplexen weißen Gauß'schen Prozesses $Z(t)$ mit der Leistungsdichte $\Phi_{ZZ}(f) = N_0$. Berechnen Sie das Signal-zu-Rausch Verhältnis am Ausgang des Matched Filters $g^*(-t)$:

$$\text{SNR}|_{t=kT_S} = \frac{E\{(X(t) * g^*(-t))^2\}}{E\{(Z(t) * g^*(-t))^2\}} \Big|_{t=kT_S}$$

Aufgabe 42* [H2010]

- Geben Sie für ein UMTS-System mit 8 Nutzern die teilnehmerspezifischen Spreizcodes an.
- Nennen Sie die wesentlichen Eigenschaften von OVSF-Folgen.
- Eine Basisstation sendet die Infofolge (1,1) an einen Nutzer mit der Spreizfolge (1,1,1,1) und die Infofolge (-1,1) an einen Nutzer mit der Spreizfolge (1, -1,1, -1). Geben Sie die Empfangsfolge an.
- Nutzer 1 befindet sich in unmittelbarer Nähe zur Basisstation, während Nutzer 2 so weit von dieser entfernt ist, dass die Signallaufzeit in etwa einer Chipdauer entspricht. Warum kann die Basisstation die Daten nicht richtig entspreizen, und was kann man dagegen tun?
- Gegeben ist das in Abbildung 62 dargestellte CDMA-OFDM-System. Die Spreizfolge $c(m)$ hat die Länge 8, das OFDM-System nutzt 24 Träger. Findet die Spreizung im Frequenz- oder im Zeitbereich statt?

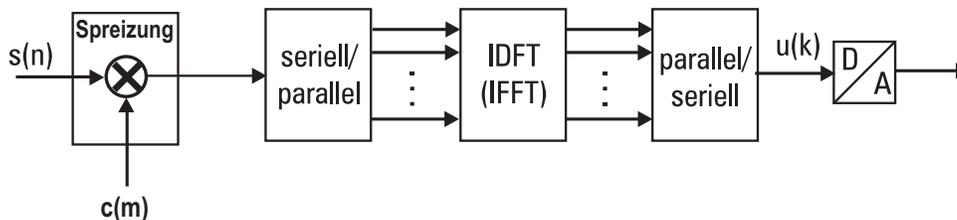


Abbildung 62: CDMA-OFDM-System

- Das System unterstützt eine Datenrate von 500 kbit/s und verwendet als Modulation BPSK. Geben Sie die Dauer T_N eines OFDM-Symbols und die Gesamtbandbreite an.

Lösung zu Aufgabe 39

Die Wahrscheinlichkeit P_F für einen Symbolfehler ist

$$P_F = 1 - P\{\text{kein Fehler}\}.$$

Auch bei dieser Aufgabe kann man sich die Anordnung der Symbolpunkte zu Nutze machen. Da die Verhältnisse in allen vier Quadranten gleich sind, genügt es, einen zu betrachten und dieses Ergebnis mit 4 zu multiplizieren. Die Wahrscheinlichkeit P_0 , dass keine Fehler auftreten, wird wie folgt berechnet:

$$P_0 = 4 \left[\frac{1}{8} \int_0^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(r-\frac{d}{2})^2}{2\sigma^2}} dr \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(r-\frac{d}{2})^2}{2\sigma^2}} dr \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \int_d^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(r-\frac{3d}{2})^2}{2\sigma^2}} dr \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(r-\frac{d}{2})^2}{2\sigma^2}} dr \right]$$

Substitution:

| | | Grenzen : |
|---------------------------------------|-------------------------------|--|
| $\rho = \frac{r-\frac{d}{2}}{\sigma}$ | $d\rho = dr \frac{1}{\sigma}$ | $0 \rightarrow \frac{-d}{2\sigma}$ $d \rightarrow \frac{d}{2\sigma}$ $\infty \rightarrow \infty$ |
| $\nu = \frac{r-\frac{3d}{2}}{\sigma}$ | $d\nu = dr \frac{1}{\sigma}$ | $d \rightarrow \frac{-d}{2\sigma}$ $\infty \rightarrow \infty$ |

$$P_0 = \frac{1}{2} \int_{\frac{-d}{2\sigma}}^{\frac{d}{2\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho \int_{\frac{-d}{2\sigma}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho + \frac{1}{2} \int_{\frac{-d}{2\sigma}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\nu^2}{2}} d\nu \int_{\frac{-d}{2\sigma}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho \\ = \frac{1}{2} \left[\left(\Phi\left(\frac{d}{2\sigma}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right) \right) \left(1 - \left(1 - \Phi\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right)\right) \right. \\ \left. + \left(1 - \left(1 - \Phi\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right)\right) \left(1 - \left(1 - \Phi\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right)\right) \right] \\ = \frac{1}{2} \left[3\Phi\left(\frac{d}{2\sigma}\right)^2 - \Phi\left(\frac{d}{2\sigma}\right) \right]$$

Daraus folgt für die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit

$$P_F = 1 - \frac{3}{2}\Phi\left(\frac{d}{2\sigma}\right)^2 + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$$

Um die Wahrscheinlichkeit P_F in Abhängigkeit von \sqrt{P} auszudrücken, muss d durch \sqrt{P} ausgedrückt werden:

$$P = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{3d}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{P} = \frac{d}{2}\sqrt{10}$$

$$d = \frac{2\sqrt{P}}{\sqrt{10}}$$

Mit $\sigma = \sqrt{\frac{N_0}{2}}$ folgt für die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit $P_F = 1 - \frac{3}{2}\Phi\left(\sqrt{\frac{P}{5N_0}}\right)^2 + \frac{1}{2}\Phi\left(\sqrt{\frac{P}{5N_0}}\right)$.

Lösung zu Aufgabe 40

- a) Das Matched-Filter ist ein auf das Sendefilter angepasstes Empfangsfilter, das das SNR maximiert.
- b) Das Matched-Filter $g(t)$ zu einem Sendefilter $h(t)$ ist $g(t) = h^*(-t)$. Da $h(t)$ kausal sein soll (also nur Werte für $t > 0$ haben soll), muss es noch um die Impulsantwortlänge verzögert werden. Die Skizzen zu $g(t)$ als auch zu $g(t) * h(t)$ sind in Abbildung 63 zu sehen.

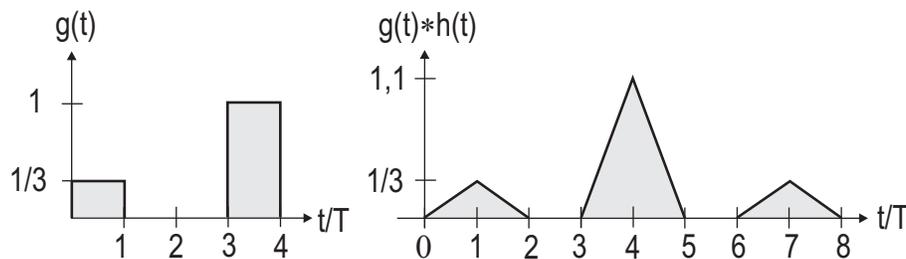


Abbildung 63: Impulsantworten von $g(t)$ als auch von $g(t) * h(t)$

- c) Der Ausgang des Matched-Filters stimmt mit dem eines Korrelators für $t = T$ überein.

Lösung zu Aufgabe 41

Abbildung 64 zeigt das physikalische Signalmodell.

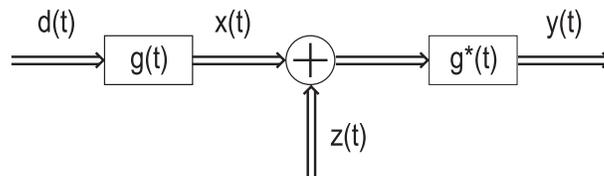


Abbildung 64: Signalmodell mit Matched-Filter Empfang

Die Datenfolge $d(k)$ wird durch das Sendefilter $g(t)$ impulsgeformt, dann über einen AWGN Kanal, der das Rauschen $z(t)$ hinzufügt, übertragen, im Empfänger mit dem Matched-Filter $g^*(-t)$ gefiltert und abgetastet. $z(t)$ ist grundsätzlich bandunbegrenzt. Durch die Filterung im Empfänger entsteht jedoch eine Bandbegrenzung. $g(t)$ entspricht, wie man durch Transformation in den Frequenzbereich leicht sehen kann, einem idealen gedämpften Tiefpass.

Das Empfangssignal $y(t)$ kann als additive Überlagerung von einer Nutzsinal Komponente $y_S(t)$ und einer Rauschkomponente $y_N(t)$ geschrieben werden:

$$y(t) = y_S(t) + y_N(t)$$

mit

$$\begin{aligned}
y_S(t) &= x(t) * g^*(-t) \\
&= x(t) * g(t) \quad , \text{ da } g(t) \text{ achsensymmetrisch und rein reell ist} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n g(t - nT_S) * g(t) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \mathcal{F}^{-1} \{ G(f) e^{-j2\pi f n T_S} G(f) \} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \mathcal{F}^{-1} \{ G(f)^2 e^{-j2\pi f n T_S} \} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{B} \text{rect}_B(f) e^{-j2\pi f n T_S} \right\} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \frac{1}{B} B \frac{\sin(\pi B(t - nT_S))}{\pi B(t - nT_S)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \frac{\sin(\pi B(t - nT_S))}{\pi B(t - nT_S)}
\end{aligned}$$

und $y_N(t) = z(t) * g^*(-t)$. Die mittlere Empfangsleistung der zu den Zeitpunkten $t = kT_S$ abgetasteten Nutzsingalkomponente ist

$$\begin{aligned}
\bar{P}_S &= \text{E} \{ |y_S(t)|^2 \} \Big|_{t=kT_S} \\
&= \text{E} \{ y_S(t) y_S^*(t) \} \Big|_{t=kT_S} \\
&= \text{E} \left\{ \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \frac{\sin(\pi B(t - nT_S))}{\pi B(t - nT_S)} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m \frac{\sin(\pi B(t - mT_S))}{\pi B(t - mT_S)} \right)^* \right\} \Big|_{t=kT_S} \\
&= \text{E} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_n d_m^* \underbrace{\frac{\sin(\pi B((k - n)T_S))}{\pi B(k - n)T_S} \frac{\sin(\pi B(k - m)T_S)}{\pi B((k - m)T_S)}}_{=0 \quad \forall (k-n) \neq (k-m)} \right\} \\
&= \text{E} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n d_n^* \underbrace{\left(\frac{\sin(\pi B(k - n)T_S)}{\pi B(k - n)T_S} \right)}_{=1 \text{ f\"ur } k=n, \text{ sonst } 0} \right\} \\
&= \text{E} \{ d_n d_n^* \} \\
&= \text{E} \{ |d_n|^2 \} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Die mittlere Rauschleistung am Entscheider kann äquivalent zu vorhergehenden Übungen berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\bar{P}_N &= \text{E} \{ z_{N,g}(t) z_{N,g}^*(t) \} \\
&= \varphi_{z_{N,g} z_{N,g}}(\tau = 0) \\
&= \mathcal{F}^{-1} \{ |G(f)|^2 \Phi_{z_N z_N}(f) \} \\
&= \frac{1}{B} B \frac{\sin(\pi B \tau)}{\pi B \tau} \Big|_{\tau=0} \cdot N_0 \\
&= N_0
\end{aligned}$$

Es folgt also $\text{SNR} = \bar{P}_S / \bar{P}_N = 1 / N_0$

Lösung zu Aufgabe 42

Bemerkung: Hadamard-Matrizen

Orthogonale Codes, wie sie z.B. für CDMA Systeme zur Nutzertrennung benutzt werden können, können einfach durch Hadamard-Matrizen erzeugt werden. Die Hadamard-Matrix $\overline{H_{2N}}$ wird rekursiv aus der Matrix $\overline{H_{N-1}}$ nach folgender Vorschrift erzeugt:

$$\overline{H_{2N}} = \begin{pmatrix} \overline{H_{N-1}} & \overline{H_{N-1}} \\ \overline{H_{N-1}} & (-1)\overline{H_{N-1}} \end{pmatrix}$$

wobei $\overline{H_0} = 1$ ist. Die einzelnen Zeilen sind zueinander jeweils orthogonal. Gleiches gilt für die Spalten. Die OVSF Folgen, wie sie bei UMTS genutzt werden, entsprechen diesen Codes, jedoch in einer anderen Sortierung.

a) Die Codes können mit Hilfe der Hadamard-Matrizen berechnet werden:

$$\begin{aligned} \overline{H_1} &= (1) \\ \overline{H_2} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \overline{H_4} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \overline{H_8} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die gesuchten Codes können unmittelbar aus den Zeilen oder Spalten von $\overline{H_8}$ abgelesen werden.

- b) OVSF Folgen sind jeweils zueinander orthogonal, ermöglichen also eine Nutzertrennung durch Codes und haben zusätzlich unterschiedliche Spreizfaktoren, d.h. verschiedene Nutzer können verschieden lange Spreizfolgen zugewiesen bekommen und so unterschiedliche Datenraten erhalten.
- c) Die Sendefolge s_1 für Nutzer 1 ergibt sich aus der Multiplikation der Datenfolge mit der Codesequenz. Für den Nutzer 2 ist das Vorgehen äquivalent. Beide Signale werden dann überlagert (addiert) und gesendet.

$$\begin{aligned} s_1 &= (1,1,1,1,1,1,1,1) \\ s_2 &= (-1,1,-1,1,1,-1,1,-1) \\ r &= s_1 + s_2 \\ &= (0,2,0,2,2,0,2,0) \end{aligned}$$

- d) Sind die Sender nicht synchronisiert und werden Walsh-Folgen verwendet, geht die Orthogonalität verloren. Schlimmstenfalls lassen sich die Nutzer nicht mehr trennen. Abhilfe schafft hier eine gute Synchronisation.
- e) Da die Spreizung vor dem IFFT-Block stattfindet, wird im Frequenzbereich gespreizt.
- f) Es wird eine Datenrate von 500 kbit/s mit einer BPSK Modulation moduliert, d.h. die resultierende Symbolrate ist 500 kBd/s, da BPSK ein Bit/Symbol moduliert. Die Spreizung mit einem Spreading Factor von 8 führt zu einer Chiprate von 4 MChip/s, was einer Symboldauer von $T_D = 250$ ns entspricht. Die OFDM Nutzsymboldauer ergibt sich unmittelbar zu $T_N = NT_D = 6\mu\text{s}$. Die Bandbreite ist 4MHz.

Literaturverzeichnis

- [B⁺05] BRONSTEIN, I. et al.: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Zürich etc., 6., vollständig überarbeitete, ergänzte Auflage, 2005.
- [Jon11] JONDRAL, F.: *Nachrichtensysteme*. J. Schlembach Fachverlag, Wilburgstetten, 4. Auflage Auflage, 2011.
- [JW02] JONDRAL, F. und A. WIESLER: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und stochastische Prozesse*. B. G. Teubner, Stuttgart, 2. Auflage, 2002.
- [Kam04] KAMMEYER, K.-D.: *Nachrichtenübertragung*. B. G. Teubner, Stuttgart, 3. Auflage, 2004.
- [Nag11] NAGEL, S.: *Portable Waveform Development for Software Defined Radios*. Forschungsberichte aus dem Institut für Nachrichtentechnik des Karlsruher Instituts für Technologie, Band 26, Karlsruhe, 2011.
- [Pro01] PROAKIS, J.G.: *Digital Communications*. McGraw–Hill, New York etc., 4. Auflage, 2001.
- [Rén71] RÉNY, A.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1971.
- [Skl01] SKLAR, B.: *Digital Communications*. Prentice–Hall PTR, Upper Saddle River (NJ), 2. Auflage, 2001.