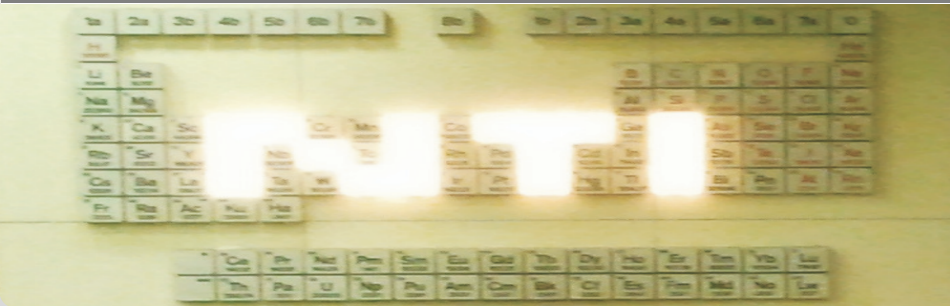


Übungen zu Nachrichtentechnik 1

Übung 1: Informationstheorie, Quellencodierung, Äquivalentes Basisband

Marcus Müller | 25. April 2018

INSTITUT FÜR NACHRICHTENTECHNIK (CEL)

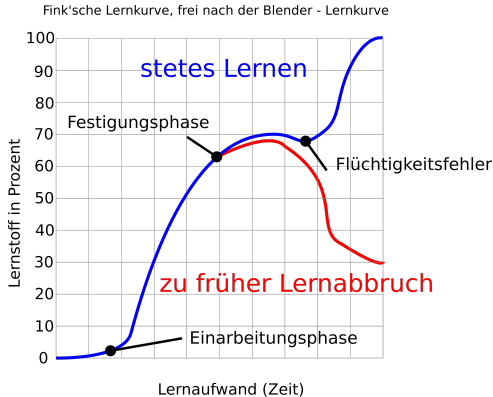


- Übungsleiter:
Marcus Müller (mueller@kit.edu)
- Sprechstunde:
nach Vereinbarung
- Übungstermine 2018:
25.04., 09.05., 23.05., 06.06., 20.06., 04.07.

- Übungsaufgaben-, Lösungen und Zusatzmaterialien:
 - im ILIAS NT1
 - mit * markierte Aufgaben des Übungsskripts werden voraussichtlich vorgerechnet
 - weitere Aufgaben dienen der selbständigen Intensivierung des Stoffes und der Klausurvorbereitung
 - Passwort 2018: NT18=100%

- Diskussionsforum:
im ILIAS NT1 → Fragen und Anmerkungen zu Übung, Klausur;
Errata

- Datum: 03.09.2017, 11:00 - 14:00 Uhr
Anmeldeschluss beachten: Online bis Montag, 27.08., per Schein
Sekretariat vor 11:30!
- Hilfsmittel:
 - ein beidseitig und **eigenhändig** beschriebenes DIN A4 Blatt (keine Kopie!)
 - ein nicht-programmierbarer Taschenrechner
- Klausuranhang:
 - notwendige Formeln (z.B. Fourierkorrespondenzen, Tabelle der Standardnormalverteilung, trigonometrische Formeln) werden an die Aufgabenblätter angehängt sein
 - Anhang im ILIAS zum Download
- Vorbereitung:
 - ① Übungsaufgaben
 - ② Zu einem gewissen Teil: alte Klausuren



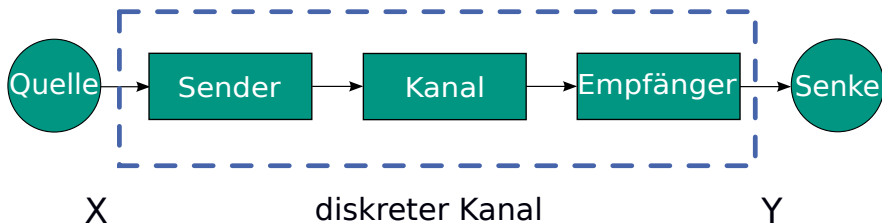
1

¹Von Blender-Lernkurve.svg: Hexenflaumderivative work: Hexenflaum - Diese Datei wurde von diesem Werk abgeleitet Blender-Lernkurve.svg., CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=23044179>

- Gelerntes anwenden
 - Aufgaben rechnen
 - Gelerntes im Rechner umsetzen
- Gehirn weder unter- noch überfordern: stetig und in Häppchen lernen
- Wechsel aus Lernen und Lernpause
- Genug schlafen! Nach dem Lernen und vor dem Abruf des Erlernten
- Wiederholung festigt den Lernstoff

Ihr Weg zu uns...



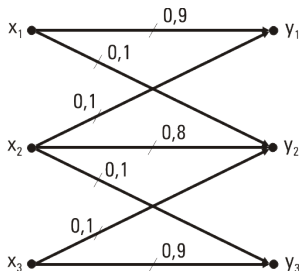


INFORMATIONSTHEORIE

Aufgabe 1 [Jon11]

Eine Quelle erzeugt die Buchstaben x_1, x_2, x_3 mit den Wahrscheinlichkeiten $P(x_1) = 0,4$, $P(x_2) = 0,3$ und $P(x_3) = 0,3$. Das folgende Bild zeigt den Kanal und die Übergangswahrscheinlichkeiten bei der Übertragung dieser Buchstaben.

$P(x_1) = 0,4$
$P(x_2) = 0,3$
$P(x_3) = 0,3$



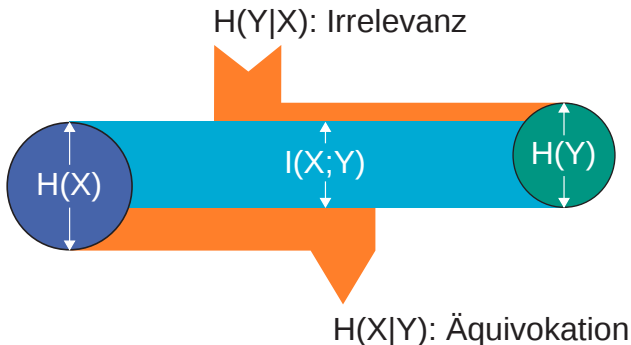
- Bestimmen Sie die Entropie der Quelle.
- Bestimmen Sie die mittlere Transinformation zwischen Eingang X und Ausgang Y des Kanals.

Gegeben sei ein zeitdiskreter Kanal mit dem Eingangsalphabet $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, dem Ausgangsalphabet $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, y_3\}$ und den Verbundwahrscheinlichkeiten

$$\mathbf{P}_{4,3} = \begin{bmatrix} P(x_1; y_1) & P(x_1; y_2) & P(x_1; y_3) \\ P(x_2; y_1) & P(x_2; y_2) & P(x_2; y_3) \\ P(x_3; y_1) & P(x_3; y_2) & P(x_3; y_3) \\ P(x_4; y_1) & P(x_4; y_2) & P(x_4; y_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{32} \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie $H(X)$, $H(Y)$, $H(X|Y)$ und $I(X; Y)$.

Zusammenhänge der Informationsbegriffe



Zusammenhänge der Informationsbegriffe (ctd)

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= H(X) - H(X|Y) \\ &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= \sum_{m=1}^M P(x_m; y_n) I(x_m; y_n) \in [0; \infty) \end{aligned}$$

$$I(x_m; y_n) = \log_2 \left(\frac{P(x_m|y_n)}{P(x_m)} \right) = \log_2 \left(\frac{P(x_m; y_n)}{P(x_m)P(y_n)} \right) \in \mathbb{R}$$

$$P(x_m|y_n) = \frac{P(x_m; y_n)}{P(y_n)} \geq 0$$

$$P(x_n) = \sum_{m=1}^M P(x_n; y_m)$$

$$P(y_m) = \sum_{n=1}^N P(x_n; y_m)$$

Auftretenswahrscheinlichkeiten der Symbole am Empfänger (Senke):

$$P(y_m) = \sum_{n=1}^N P(x_n; y_m)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} P(y_1) &= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{5}{16} \\ P(y_2) &= \frac{1}{32} + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{9}{32} \\ P(y_3) &= \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{4} = \frac{13}{32} \end{aligned}$$

$$I(x_2; y_1) = \log_2 \left(\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{8} \cdot \frac{5}{16}} \right) = 0,68$$

$$I(x_2; y_2) = \log_2 \left(\frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{8} \cdot \frac{9}{32}} \right) = -0,17$$

$$I(x_2; y_3) = \log_2 \left(\frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{8} \cdot \frac{13}{32}} \right) = -0,70$$

$$I(x_3; y_1) = \log_2(0) = -\infty$$

$$I(x_3; y_2) = \log_2 \left(\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8} \cdot \frac{9}{32}} \right) = 1,83$$

$$I(x_3; y_3) = \log_2(0) = -\infty$$

$$I(x_4; y_1) = \log_2 \left(\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{16}} \right) = -0,32$$

$$I(x_4; y_2) = \log_2 \left(\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{32}} \right) = -0,17$$

$$I(x_4; y_3) = \log_2 \left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{13}{32}} \right) = 0,30$$

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= \frac{1}{8} \cdot 0,68 + 0 + \frac{1}{8} \cdot 0,30 + \frac{1}{16} \cdot 0,68 \\ &\quad + \frac{1}{32} \cdot (-0,17) + \frac{1}{32} \cdot (-0,70) + \frac{1}{8} \cdot 1,83 \\ &\quad + \frac{1}{8} \cdot (-0,32) + \frac{1}{8} \cdot (-0,17) + \frac{1}{4} \cdot 0,30 = 0,38 \end{aligned}$$

$$H(X) = - \sum_{m=1}^M P(x_m) \log_2 (P(x_m)) = \dots = 1,75 \text{ bit/Zeichen}$$

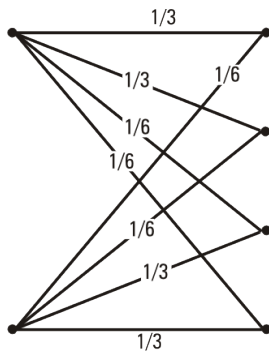
$$H(Y) = - \sum_{n=1}^N P(y_n) \log_2 (P(y_n)) = \dots = 1,57 \text{ bit/Zeichen}$$

$$\Rightarrow H(X|Y) = H(X) - I(X; Y) = 1,75 - 0,38 = 1,37 \text{ bit}$$

$$H(Y|X) = H(Y) - I(X; Y) = 1,57 - 0,38 = 1,19 \text{ bit}$$

Aufgabe 5

Wie müssen die Wahrscheinlichkeiten der Symbole des Eingangsalphabets gewählt werden, damit sich für den in der folgenden Abbildung skizzierten Fall die maximale mittlere Transinformation ergibt? Geben Sie die Kanalkapazität an.



Diskreter gedächtnisloser Kanal

Beschreibung: Eingang X , Ausgang Y , **Kanalmatrix**:

$$\mathbf{P}(Y|X) = \begin{bmatrix} P(y_1|x_1) & \cdots & P(y_M|x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P(y_1|x_N) & \cdots & P(y_M|x_N) \end{bmatrix}$$

Die Matrix enthält die Übergangswahrscheinlichkeiten dafür, dass ein bestimmtes Eingangssymbol x_n auf ein bestimmtes Ausgangssymbol y_m abgebildet wird.

Kanalkapazität: "Wie viele Bits gehen (pro Nutzung) max. über den Kanal?"

$$C = \max_{P(x_n)} I(X; Y) \quad \text{mit} \quad P(x_n) \geq 0 \quad , \quad \sum_{n=1}^N P(x_n) = 1$$

- Unabhängig von der Quellenstatistik!
- Kanal symmetrisch $\Rightarrow \max_{P(x_n)} I(X; Y)$ ergibt sich für $P(x_n) = \frac{1}{N} \forall n$
 - **Schwache Kanalsymmetrie:** Alle Zeilen der Kanalmatrix $\mathbf{P}(Y|X)$ sind Permutationen voneinander.
 - **Starke Kanalsymmetrie:** Wenn gleiches zusätzlich $\forall$ Spalten gilt.

QUELLENCODIERUNG

- **Mittlere Codewort-Länge:** $L = \sum_{n=1}^N P(x_n)L(x_n)$
- **Präfixeigenschaft (kommafrei):** Kein CW ist Beginn eines anderen CW.
- **Codierungstheorem:** Für eine Quelle X existiert ein Binärcode mit:
 $H(X) \leq L \leq H(X) + 1$
- **Entscheidungsgehalt einer Quelle mit N Zeichen:** $H_0 = \log_2 N$
- **Redundanz der Quelle:** $R_Q = H_0 - H(X)$
- **Redundanz des Codes:** $R_C = L - H(X)$
- **Huffman-Code:** Iterative bottom-up Methode zur Konstruktion kommafreier Codes mit minimaler mittlerer CW-Länge L :
 - Die beiden Zeichen mit der kleinsten Auftretenswahrscheinlichkeit durch ein Bit unterscheiden und zu einem neuen Zeichen zusammenfassen
 - Neue Auftretenswahrscheinlichkeit berechnen

Definition: **Präfixeigenschaft (kommafrei):**

Kein Codewort ist der Beginn eines anderen Codeworts.

⇒ Alle zu übertragenden Codewörter können nahtlos hintereinander gesendet werden, ohne dass zwischen ihnen ein spezielles Trennwort (Komma) stehen muss. ⇒ Geringere zu übertragende Datenmenge.

Tabelle: Beispiele Präfixeigenschaft

X	A	B	C	Präfixeigenschaft
Code I	0	10	110	?
Code II	0	1	01	?

Definition: **Präfixeigenschaft (kommafrei):**

Kein Codewort ist der Beginn eines anderen Codeworts.

⇒ Alle zu übertragenden Codewörter können nahtlos hintereinander gesendet werden, ohne dass zwischen ihnen ein spezielles Trennwort (Komma) stehen muss. ⇒ Geringere zu übertragende Datenmenge.

Tabelle: Beispiele Präfixeigenschaft

<i>X</i>	A	B	C	Präfixeigenschaft
Code I	0	10	110	erfüllt!
Code II	0	1	01	nicht erfüllt!

Einschub: Aufgabe 8 [F2011]

Eine Quelle X erzeugt die in der folgenden Tabelle aufgeführten Symbole x_n mit den entsprechenden Auftretenswahrscheinlichkeiten $P(x_n)$.

x_n	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$P(x_n)$	$1/13$	$4/130$	$5/26$	$9/52$	$1/130$	$1/26$	$5/13$	$P(x_8)$

- Bestimmen Sie die Auftretenswahrscheinlichkeit $P(x_8)$ des Symbols x_8 .
- Konstruieren Sie nun für diese Quellenstatistik einen Huffman-Code und geben Sie die entsprechenden Codewörter an.
- Wie groß ist die mittlere Codewortlänge des in Aufgabenteil b) gefundenen Codes?

$$P(x_8) = 1 - \sum_{n=1}^7 P(x_n) = \frac{25}{260}$$

Ordnen der Symbole nach ihren Auftretenswahrscheinlichkeiten:

x_n	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$P(x_n)$	$\frac{20}{260}$	$\frac{8}{260}$	$\frac{50}{260}$	$\frac{45}{260}$	$\frac{2}{260}$	$\frac{10}{260}$	$\frac{100}{260}$	$\frac{25}{260}$
Ordnung	5.	7.	2.	3.	8.	6.	1.	4.

Lösung Aufgabe 8 b), c)

Codewörter, die sich durch einen möglichen Codebaum ergeben
(Huffman ist nicht eindeutig!):

x_n	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
CW	1110	111110	100	101	111111	11110	0	110
$L(x_n)$	4	6	3	3	6	5	1	3
$P(x_n)$	$\frac{20}{260}$	$\frac{8}{260}$	$\frac{50}{260}$	$\frac{45}{260}$	$\frac{2}{260}$	$\frac{10}{260}$	$\frac{100}{260}$	$\frac{25}{260}$
Ordnung	5.	7.	2.	3.	8.	6.	1.	4.

$$\bar{L} = \sum_{n=1}^8 P(x_n) L(x_n) \approx 2,5$$

Tiefpasssignal

$f_T = 0 \text{ Hz} \Rightarrow$ gesamte spektrale Leistung um 0 Hz konzentriert.

Bandpasssignal

$f_T \gg B \Rightarrow$ gesamte spektrale Leistung innerhalb
 $\left[-f_T - \frac{B}{2}; -f_T + \frac{B}{2}\right] \cup \left[f_T - \frac{B}{2}; f_T + \frac{B}{2}\right]$

Praxis:

- Funkübertragung findet immer im Bandpassbereich statt
- Übertragung auf Kabeln in beiden Bereichen möglich
- Digitale Verarbeitung im Rechner: Tiefpassbereich (komplexes Basisband)

Tiefpasssignal

$f_T = 0 \text{ Hz} \Rightarrow$ gesamte spektrale Leistung um 0 Hz konzentriert.

Bandpasssignal

$f_T \gg B \Rightarrow$ gesamte spektrale Leistung innerhalb
 $\left[-f_T - \frac{B}{2}; -f_T + \frac{B}{2}\right] \cup \left[f_T - \frac{B}{2}; f_T + \frac{B}{2}\right]$

Praxis:

- Funkübertragung findet immer im Bandpassbereich statt
- Übertragung auf Kabeln in beiden Bereichen möglich
- Digitale Verarbeitung im Rechner: Tiefpassbereich (komplexes Basisband)

Tiefpasssignal

$f_T = 0 \text{ Hz} \Rightarrow$ gesamte spektrale Leistung um 0 Hz konzentriert.

Bandpasssignal

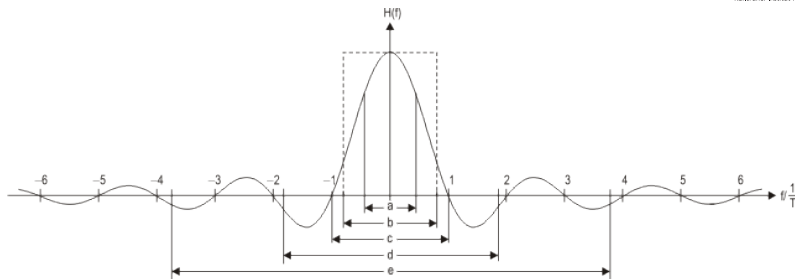
$f_T \gg B \Rightarrow$ gesamte spektrale Leistung innerhalb
 $\left[-f_T - \frac{B}{2}; -f_T + \frac{B}{2}\right] \cup \left[f_T - \frac{B}{2}; f_T + \frac{B}{2}\right]$

Praxis:

- Funkübertragung findet immer im Bandpassbereich statt
- Übertragung auf Kabeln in beiden Bereichen möglich
- Digitale Verarbeitung im Rechner: Tiefpassbereich (komplexes Basisband)

Tabelle: Übertragungsverfahren und ihre Eigenschaften

Verfahren	B	f_T	$\frac{f_T}{B}$	BP / TP
GSM 900	200 kHz	900 MHz	4500	BP
LTE 2600	1-20 MHz	2,6 GHz	130 - 2600	BP
IEEE 802.11a/ac	20 - 160 MHz	5 GHz	31 - 250	BP
DCF77	440 Hz	77,5 kHz	176	BP
ISDN	128 kHz	64 kHz	0,5	TP
ADSL	972 kHz	614 kHz	0,63	TP



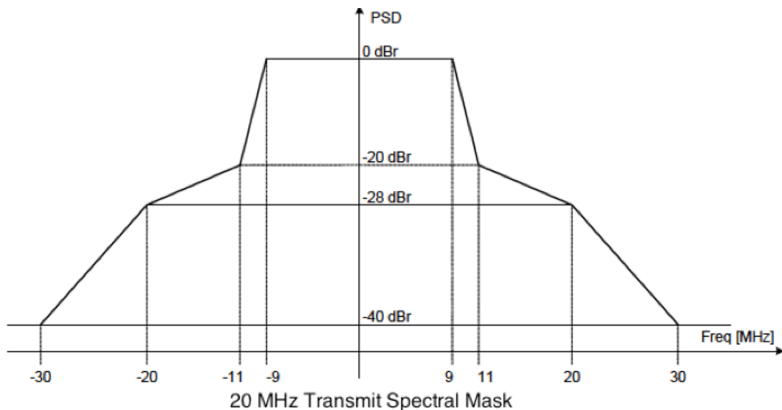
- a) Die Bandbreite ab der die spektrale Leistungsdichte² um die Hälfte (3 dB) gefallen ist.
- b) Die Bandbreite, die weißes bandbegrenztes Rauschen gleicher Leistung hätte.
- c) Die Abstände der ersten Nullstellen von $|H(f)|$.
- d) Die Bandbreite innerhalb derer sich z.B. 99% der spektralen Leistung befinden.
- e) Bandbreite innerhalb derer die Amplitude des Spektrums um z.B. 35 dB gesunken ist.

→ In Klausur geforderte Definition angegeben, meist c).

²Aus Darstellungsgründen ist $H(f)$ dargestellt. Die Leistungsdichte wäre $|H(f)|^2$.

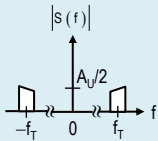
Bandbreiten in der Praxis: Frequenzmasken

Bsp.: IEEE 802.11a 20 MHz Maske



Bandpassdarstellung - Basisbanddarstellung

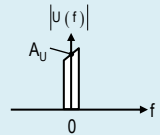
Sende-Signal



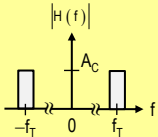
$S(f)$

$$S(f) = \frac{1}{2} (U(f - f_T) + U^*(-f - f_T))$$

$U(f)$



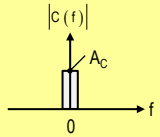
Kanal (System):



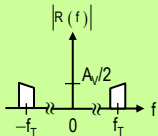
$H(f)$

$$H(f) = C(f - f_T) + C^*(-f - f_T)$$

$C(f)$



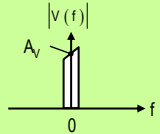
Empfangs-Signal



$R(f)$

$$R(f) = \frac{1}{2} (V(f - f_T) + V^*(-f - f_T))$$

$V(f)$



=

$S(f)$

·

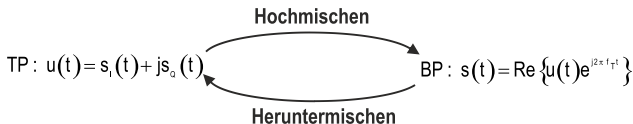
$H(f)$

=

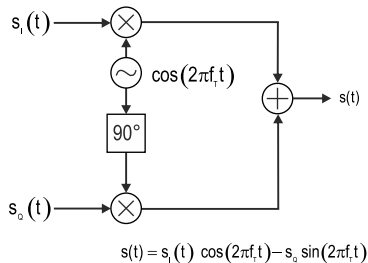
$U(f)$

·

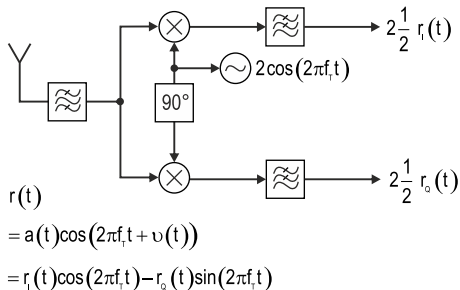
$C(f)$



Hochmischen

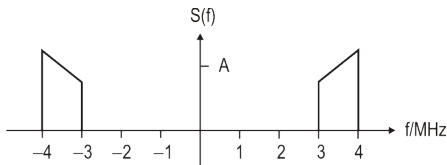


Heruntermischen

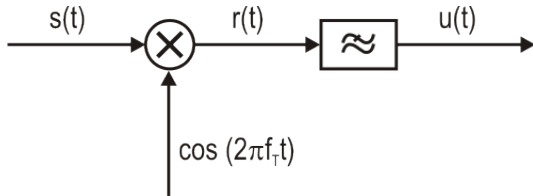


Aufgabe 9 [F2011]

Gegeben ist das Spektrum $S(f)$ des Signals $s(t)$:



Das Signal $s(t)$ wird nun mittels der dargestellten Mischerstufe gemischt.

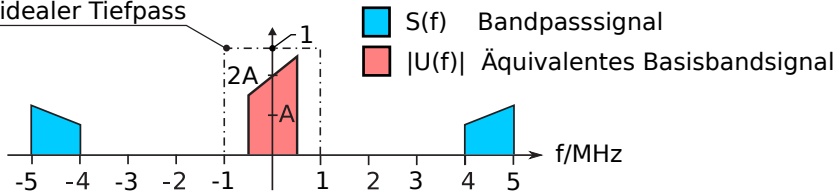


Die Trägerfrequenz ist $f_T = 2$ MHz, der Tiefpass kann als ideal angenommen werden und hat eine Grenzfrequenz von $f_G = 3$ MHz.

- a) Skizzieren Sie die Spektren der Signale $r(t)$ und $u(t)$ im Bereich von $-6\text{MHz} < f < 6\text{MHz}$. Achten Sie auf korrekte Beschriftung der Achsen.
- b) Warum ist $u(t)$ kein Tiefpasssignal?
- c) Sind die Signale $s(t)$ und $u(t)$ komplex oder reell? Begründung!
- d) Mit welchem Signal müssen Sie $s(t)$ multiplizieren, damit $u(t)$ das äquivalente Tiefpasssignal zu $s(t)$ ist?
- e) Skizzieren Sie das Spektrum des zu $s(t)$ äquivalenten Tiefpasssignals.

- a) Anwendung der entsprechenden Eigenschaften und Korrespondenzen der Fouriertransformation ergibt:

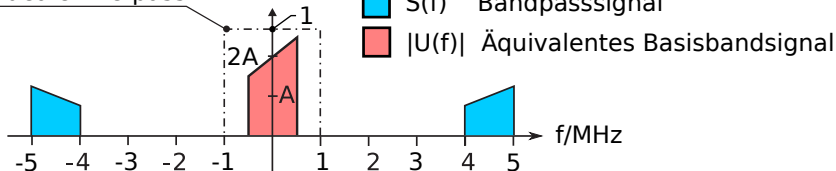
idealer Tiefpass



- b) $u(t)$ ist kein Tiefpasssignal, da sein Spektrum nicht um $f = 0$ konzentriert ist.
- c) $s(t)$ und $u(t)$ sind beides reelle Bandpasssignale, da sie symmetrische Spektren besitzen.

- a) Anwendung der entsprechenden Eigenschaften und Korrespondenzen der Fouriertransformation ergibt:

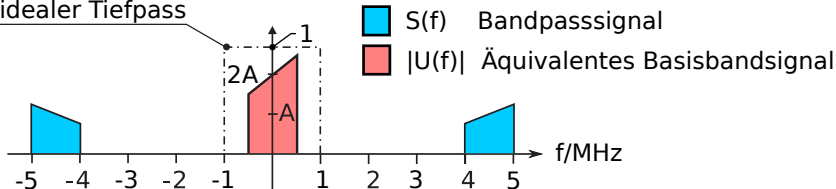
idealer Tiefpass



- b) $u(t)$ ist kein Tiefpasssignal, da sein Spektrum nicht um $f = 0$ konzentriert ist.
- c) $s(t)$ und $u(t)$ sind beides reelle Bandpasssignale, da sie symmetrische Spektren besitzen.

- a) Anwendung der entsprechenden Eigenschaften und Korrespondenzen der Fouriertransformation ergibt:

idealer Tiefpass

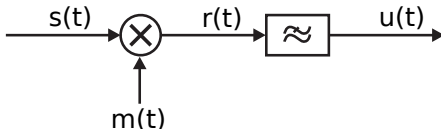


- b) $u(t)$ ist kein Tiefpasssignal, da sein Spektrum nicht um $f = 0$ konzentriert ist.
- c) $s(t)$ und $u(t)$ sind beides reelle Bandpasssignale, da sie symmetrische Spektren besitzen.

d) Äquivalentes Tiefpasssignal ist $\tilde{U}(f)$ wobei gilt:

$$S(f) = \frac{1}{2}[\tilde{U}(f - f_T) + \tilde{U}^*(-f - f_T)]$$

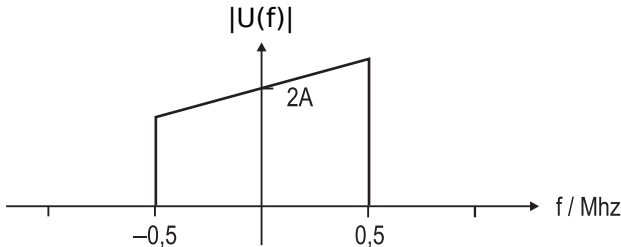
Es ist mit einem Quadraturmischer zu mischen (= komplexes Heruntermischen), da $S(f)$ asymmetrische Seitenbänder besitzt und daher das äquivalente Tiefpasssignal komplex sein wird.



Daher lautet das Mischersignal: $m(t) = 2e^{-j2\pi t \cdot 3.5 \text{ MHz}}$

Lösung zu Aufgabe 9 (ctd.)

- e) Das zu $s(t)$ äquivalente Tiefpasssignal besitzt folgendes Amplituden-Spektrum:



Anm.:

- Per Definition ist die Leistung des äquivalenten Basisbandsignals doppelt so groß wie die des zugehörigen Bandpasssignals.
- Es ist der Betrag dargestellt, da das Spektrum komplexwertig ist. Überlegen Sie sich, wie Real- und Imaginärteil des Spektrums aussehen (könnten)! [Klausur 2016F, A. 8]

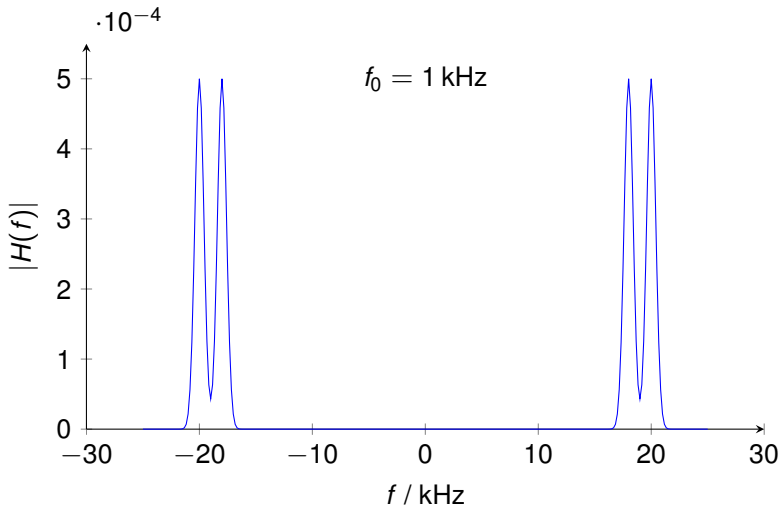
Aufgabe 10 [Jon11]

Gegeben sei die Impulsantwort eines Bandpasssystems:

$$h(t) = e^{-\pi(f_0 t)^2} [\sin(40\pi f_0 t) - \sin(36\pi f_0 t)]$$

- a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $H(f)$ von $h(t)$ und skizzieren Sie $|H(f)|$.
- b) Bestimmen Sie die komplexe Einhüllende, die Trägerfrequenz und die Phase der Impulsantwort $h(t)$, wenn diese als modulierte Signal interpretiert wird.
- c) Berechnen Sie die Impulsantwort $c(t)$ des zu $h(t)$ äquivalenten Tiefpasssystems.
- d) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $C(f)$ von $c(t)$ und skizzieren Sie $|C(f)|$.

Skizze Aufgabe 10 a)



Informationstheorie, Bandpass-/Basisbanddarstellung

- Information, Entropie
- mittlere Transinformation
- Kanalsymmetrie, Kanalkapazität
- Zusammenhang Bandpasssignal (bzw. -system) und äquivalentes Basisbandsignal (bzw. -system) in Zeit- und Frequenzbereich
- Quadraturmischer identifizieren und im Blockschaltbild zeichnen