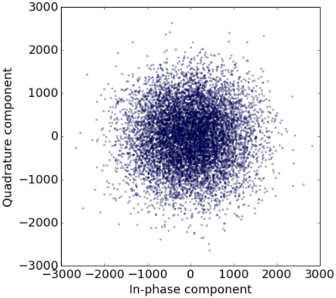
Karlsruher Institut für Technologie

Übungen zu Nachrichtentechnik 1

Übung 2: Stochastische Prozesse, Signale und Systeme, Mobilfunkkanal

Marcus Müller | 9. Mai 2018

INSTITUT FÜR NACHRICHTENTECHNIK (CEL)



Stochastische Prozesse (Wdh. WT)

Das Wichtigste in Kürze:

- Ein stochastischer Prozess $X\{t, \xi\}$ ist eine Familie von Zufallsvariablen
- t ist üblicherweise die Zeit
- ξ stellt eine Realisierung dar
- **Ergodisch:** alle Eigenschaften des Prozesses lassen sich aus einer Realisierung ablesen
- Ergodizität kann nur schwer nachgewiesen werden und wird im Folgenden immer als gegeben vorausgesetzt, d.h. es werden nur Prozesse $X(t)$ betrachtet
- Betrachtet man einen stochastischen Prozess zu einem festen Zeitpunkt t_0, so erhält man eine Zufallsvariable
- Stochastische Prozesse können durch ihre Verteilungsfunktion $F_X(x, t)$ oder ihre Dichte $f_X(x, t)$ beschrieben werden.

Stochastische Prozesse (Wdh. WT): Erwartungswert und Kreuzkorrelation

- Der Erwartungswert ist definiert als:

$$\mathrm{E}\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x,t) dx \tag{1}$$

- Wie aus (1) leicht nachgewiesen werden kann gilt für den Erwartungswert:

$$\mathrm{E}\{cX(t) + d\} = c\mathrm{E}\{X(t)\} + d$$

- Die Kreuzkorrelationsfunktion beschreibt eine Beziehung zwischen zwei stochastischen Prozessen. Sie kann als eine Art Ähnlichkeitsmaß interpretiert werden:

$$\varphi_{XY}(t_1, t_2) = \mathrm{E}\{X(t_1)Y(t_2)^*\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{t_1} y_{t_2}^* f_{XY}(x_{t_1}, y_{t_2}) dx_{t_1} dy_{t_2}$$

  Für $X(t) = Y(t)$ ergibt sich die Autokorrelationsfunktion.

Stochastische Prozesse (Wdh. WT): Unabhängigkeit und Unkorreliertheit

- Sind zwei stochastische Prozesse **unabhängig**, so ist

$$f_{XY}(x_{t_1}, y_{t_2}) = f_X(x_{t_1}) \cdot f_Y(y_{t_2})$$

und

$$\varphi_{XY}(t_1, t_2) = \mathrm{E}\{X(t_1)\}\mathrm{E}\{Y^*(t_2)\}.$$

- Letzteres wird als **Unkorreliertheit** bezeichnet.
- Aus der Unabhängigkeit folgt immer die Unkorreliertheit. Umgekehrt gilt dies im Allgemeinen nicht. Bei normalverteilten Zufallsvariablen kann jedoch von Unkorreliertheit auf Unabhängigkeit geschlossen werden.

Stochastische Prozesse (Wdh. WT): Leistungsdichtespektrum, Stationarität

- Als Leistungsdichtespektrum wird die Fouriertransformierte der Autokorrelationsfunktion bezeichnet:

$$\Phi_{XX}(f) = \mathcal{F}\{\varphi_{XX}(\tau)\}$$

- **(Schwache) Stationärität:** Ein stochastisches Signal $X(t)$ ist schwach stationär, wenn folgende *beide* Bedingungen erfüllt sind:
  1. Sein Erwartungswert $E\{X(t)\}$ ist konstant für alle t.
  2. Seine AKF $\varphi_{XX}(t_1, t_2)$ hängt nur von der Zeitdifferenz $\tau = t_2 - t_1$ ab.

Aufgabe 11 [Jon11]

Für die Bewertung von Übertragungsverfahren ist der Kanal, der nur weißes Gauß'sches Rauschen zum Signal addiert, besonders wichtig. Nach seiner englischen Bezeichnung wird dieser Kanal auch *Additive White Gaussian Noise (AWGN)*-Kanal genannt.

a) Welche Amplitudenverteilung hat das Störsignal im AWGN-Kanal?

b) Geben Sie die Autokorrelationsfunktion (AKF) und das Leistungsdichtespektrum (LDS) des Störsignals an.

Anmerkung: Additive White Gaussian Noise (engl.) = additives weißes Gauß'sches Rauschen

Aufgabe 12 [Jon11]

Ein reeller weißer Gaußprozess $X(t)$ wird mit einem idealen Tiefpass der Breite $B = \frac{1}{T}$ gefiltert:

a) Wie lautet die AKF des Tiefpass-Ausgangsprozesses $Y(t)$?

b) $Y(t)$ wird zu den Zeitpunkten $t = kT_A$ abgetastet: Wie muss T_A gewählt werden, damit die Abtastwerte mit dem zeitlichen Abstand T_A unkorreliert sind?

AWGN Demo

- Im Laufe des Semesters werden verschiedene Demos zur Veranschaulichung einzelner Sachverhalte gezeigt
- Diese finden Sie dann (spätestens nach der jeweiligen Übung) auch im ILIAS bzw. einen Link, wo sie die Demo herunterladen können
- Die Demos sind zum Teil in *python* und zum Teil in *MATLAB* geschrieben.
- Einige Demos gibt es nur als binary mit GUI, bei anderen erhalten Sie den Quellcode und sind dazu aufgerufen damit zu experimentieren
- Die Demos sind alle unter Windows und Linux lauffähig
- Installationsanleitungen finden Sie ebenfalls im ILIAS
- Bei Fragen: Melden Sie sich!

Aufgabe 14 [F2012]

Gegeben ist der folgende stochastische Prozess:

$$Z(t) = X \sin(2\pi f_T t + Y).$$

X und Y sind stochastisch unabhängig und beschreiben jeweils eine Gleichverteilung im Intervall $[-\pi, \pi)$.

a) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion von $Z(t)$.

b) Ist $Z(t)$ stationär? Begründung!

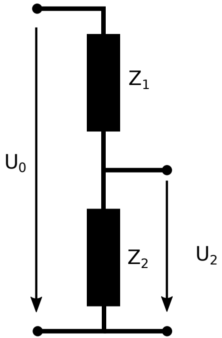
Wdh. Lineare Elektrische Netze

Bestimmung der Übertragungsfunktion von Filterschaltungen:

- Impedanzen (bei Signal mit $\omega = 2\pi f$):
  - Kapazität: $Z_\mathrm{C} = \frac{1}{j\omega C}$
  - Induktivität: $Z_\mathrm{L} = j\omega L$
  - Widerstand: $Z_\mathrm{R} = R$
- Spannungsteiler: Die über einer Impedanz abfallende Spannung ist proportional zu dieser Impedanz.

Bsp.:

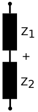
$$\frac{U_2}{U_0} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$



Wdh. Lineare Elektrische Netze

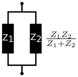
Ersatzschaltungen:

- Reihenschaltung



$$Z_{\text{Ers. Reihe}} = \sum_{n=1}^{N} Z_n$$

- Parallelschaltung



$$Z_{\text{Ers. Parallel}} = \frac{1}{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{Z_n}}$$

Aufgabe 18 [H2011]

In der folgenden Abbildung finden Sie das Ersatzschaltbild einer Ferritstabantenne, die unter anderem zum Empfang von Langwellensignalen genutzt wird.

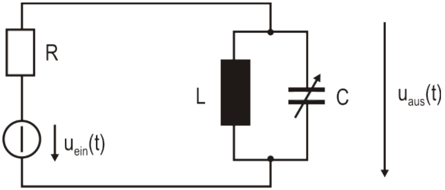


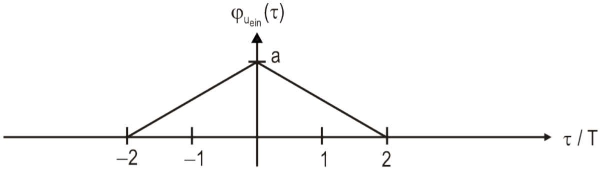
Abbildung: Ersatzschaltbild einer Ferritstabantenne

a) Berechnen Sie den Frequenzgang $H(f) = \frac{U_{\mathrm{aus}}(f)}{U_{\mathrm{ein}}(f)}$ sowie dessen Betrag $|H(f)|$.

Aufgabe 18 [H2011]

b) Die Spule hat eine Induktivität von $7\,\mathrm{mH}$. Welche Kapazität müssen Sie einstellen, um einen Radiosender mit der Trägerfrequenz $f_T = 150\,\mathrm{kHz}$ zu empfangen.
Hinweis: *Die Resonanzfrequenz ist die Frequenz, bei der die Übertragungsfunktion rein reell ist.*

c) Sie wissen durch Messungen, dass die Autokorrelationsfunktion des Eingangssignals $u_{\mathrm{ein}}(t)$ den in der folgenden Abbildung dargestellten Verlauf hat. Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum des Ausgangssignals $u_{\mathrm{aus}}(t)$.



Lösung zu Aufgabe 18 a)

Der Frequenzgang ergibt sich zu:

$$H(j\omega) = \frac{\frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}}{\frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC} + R}$$

gemeinsamer Hauptnenner

$$= \frac{\frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}}{\frac{j\omega L + R(1-\omega^2 LC)}{1-\omega^2 LC}}$$

kürzen & konj. Komplex erweitern

$$= \frac{j\omega L(R(1-\omega^2 LC) - j\omega L)}{[R(1-\omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2}$$

Real- u. Imaginärteil trennen

$$= \frac{(\omega L)^2 + j\omega LR(1-\omega^2 LC)}{[R(1-\omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2}$$

Lösung zu Aufgabe 18 a)

Der Frequenzgang ergibt sich zu:

$$H(j\omega) = \frac{\frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}}{\frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC} + R}$$ gemeinsamer Hauptnenner

$$= \frac{\frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}}{\frac{j\omega L + R(1-\omega^2 LC)}{1-\omega^2 LC}}$$ kürzen & konj. Komplex erweitern

$$= \frac{j\omega L(R(1-\omega^2 LC) - j\omega L)}{[R(1-\omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2}$$ Real- u. Imaginärteil trennen

$$= \frac{(\omega L)^2 + j\omega LR(1-\omega^2 LC)}{[R(1-\omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2}$$

Lösung zu Aufgabe 18 a)

Der Frequenzgang ergibt sich zu:

$$H(j\omega) = \frac{\frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}}{\frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC} + R} \qquad \text{gemeinsamer Hauptnenner}$$

$$= \frac{\frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}}{\frac{j\omega L + R(1-\omega^2 LC)}{1-\omega^2 LC}} \qquad \text{kürzen \& konj. Komplex erweitern}$$

$$= \frac{j\omega L(R(1-\omega^2 LC) - j\omega L)}{[R(1-\omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2} \qquad \text{Real- u. Imaginärteil trennen}$$

$$= \frac{(\omega L)^2 + j\omega L R(1-\omega^2 LC)}{[R(1-\omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2}$$

Lösung zu Aufgabe 18 a)

Der Frequenzgang ergibt sich zu:

$$H(j\omega) = \frac{\frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}}{\frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC} + R}$$

gemeinsamer Hauptnenner

$$= \frac{\frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}}{\frac{j\omega L + R(1-\omega^2 LC)}{1-\omega^2 LC}}$$

kürzen & konj. Komplex erweitern

$$= \frac{j\omega L(R(1-\omega^2 LC) - j\omega L)}{[R(1-\omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2}$$

Real- u. Imaginärteil trennen

$$= \frac{(\omega L)^2 + j\omega LR(1-\omega^2 LC)}{[R(1-\omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2}$$

Lösung zu Aufgabe 18 a) (ctd.)

Zum Betrag via $|H(j\omega)| = \sqrt{|H(j\omega)|^2}$:

$$
\begin{aligned}
H(j\omega) &= \frac{(\omega L)^2 + j\omega LR(1-\omega^2 LC)}{[R(1-\omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2} \\
|H(j\omega)|^2 &= \frac{(\omega L)^4 + (\omega LR)^2(1-\omega^2 LC)^2}{\left([R(1-\omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2\right)^2} \\
&= \frac{(\omega L)^2 \cancel{\left((\omega L)^2 + (R-\omega^2 RLC)^2\right)}}{\left([R(1-\omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2\right)^{\cancel{2}}} \\
|H(j\omega)| = \sqrt{|H(\omega)|^2} &= \frac{\omega L}{\sqrt{[R(1-\omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2}}
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe 18 a) (ctd.)

Zum Betrag via $|H(j\omega)| = \sqrt{|H(j\omega)|^2}$:

$$H(j\omega) = \frac{(\omega L)^2 + j\omega LR(1-\omega^2 LC)}{\left[R(1-\omega^2 LC)\right]^2 + (\omega L)^2}$$

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{(\omega L)^4 + (\omega LR)^2(1-\omega^2 LC)^2}{\left(\left[R(1-\omega^2 LC)\right]^2 + (\omega L)^2\right)^2}$$

$$= \frac{(\omega L)^2 \cancel{\left((\omega L)^2 + (R-\omega^2 RLC)^2\right)}}{\left(\left[R(1-\omega^2 LC)\right]^2 + (\omega L)^2\right)^{\cancel{2}}}$$

$$|H(j\omega)| = \sqrt{|H(\omega)|^2} = \frac{\omega L}{\sqrt{\left[R(1-\omega^2 LC)\right]^2 + (\omega L)^2}}$$

Lösung zu Aufgabe 18 a) (ctd.)

Zum Betrag via $|H(j\omega)| = \sqrt{|H(j\omega)|^2}$:

$$H(j\omega) = \frac{(\omega L)^2 + j\omega LR(1-\omega^2 LC)}{[R(1-\omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2}$$

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{(\omega L)^4 + (\omega LR)^2(1-\omega^2 LC)^2}{\left([R(1-\omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2\right)^2}$$

$$= \frac{(\omega L)^2 \cancel{\left((\omega L)^2 + (R-\omega^2 RLC)^2\right)}}{\left([R(1-\omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2\right)^{\cancel{2}}}$$

$$|H(j\omega)| = \sqrt{|H(\omega)|^2} = \frac{\omega L}{\sqrt{[R(1-\omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2}}$$

Lösung zu Aufgabe 18 a) (ctd.)

Zum Betrag via $|H(j\omega)| = \sqrt{|H(j\omega)|^2}$:

$$H(j\omega) = \frac{(\omega L)^2 + j\omega LR(1-\omega^2 LC)}{[R(1-\omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2}$$

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{(\omega L)^4 + (\omega LR)^2(1-\omega^2 LC)^2}{\left([R(1-\omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2\right)^2}$$

$$= \frac{(\omega L)^2 \cancel{\left((\omega L)^2 + (R-\omega^2 RLC)^2\right)}}{\left([R(1-\omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2\right)^{\cancel{2}}}$$

$$|H(j\omega)| = \sqrt{|H(\omega)|^2} = \frac{\omega L}{\sqrt{[R(1-\omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2}}$$

Lösung zu Aufgabe 18 a) (ctd.)

Zum Betrag via $|H(j\omega)| = \sqrt{|H(j\omega)|^2}$:

$$\begin{aligned}
H(j\omega) &= \frac{(\omega L)^2 + j\omega LR(1-\omega^2 LC)}{\left[R(1-\omega^2 LC)\right]^2 + (\omega L)^2}\\
|H(j\omega)|^2 &= \frac{(\omega L)^4 + (\omega LR)^2(1-\omega^2 LC)^2}{\left(\left[R(1-\omega^2 LC)\right]^2 + (\omega L)^2\right)^2}\\
&= \frac{(\omega L)^2 \cancel{\left((\omega L)^2 + (R-\omega^2 RLC)^2\right)}}{\left(\left[R(1-\omega^2 LC)\right]^2 + (\omega L)^2\right)^{\cancel{2}}}\\
|H(j\omega)| = \sqrt{|H(\omega)|^2} &= \frac{\omega L}{\sqrt{\left[R(1-\omega^2 LC)\right]^2 + (\omega L)^2}}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 18 b) und c)

b) Resonanzfrequenz bestimmen, via $\mathfrak{Im}\{H(j\omega)\} \overset{!}{=} 0$, siehe Skript.

c) Hinweis: Um das Dreieck zu transformieren, zerlegen Sie es in die Faltung zweier Rechtecke.

Erinnerung: Faltung

- Faltungssatz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(\tau) \cdot b(t-\tau)\mathrm{d}\tau = a(t) * b(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad A(f) \cdot B(f)$$

- Faltung mit Dirac $\delta(f - f_\mathrm{T})$ ergibt Verschiebung um f_T

Lösung zu Aufgabe 18 b) und c)

b) Resonanzfrequenz bestimmen, via $\mathfrak{Im}\{H(j\omega)\} \overset{!}{=} 0$, siehe Skript.

c) Hinweis: Um das Dreieck zu transformieren, zerlegen Sie es in die Faltung zweier Rechtecke.

Erinnerung: Faltung

- Faltungssatz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(\tau) \cdot b(t-\tau)\mathrm{d}\tau = a(t) * b(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad A(f) \cdot B(f)$$

- Faltung mit Dirac $\delta(f - f_{\mathrm{T}})$ ergibt Verschiebung um f_{T}