

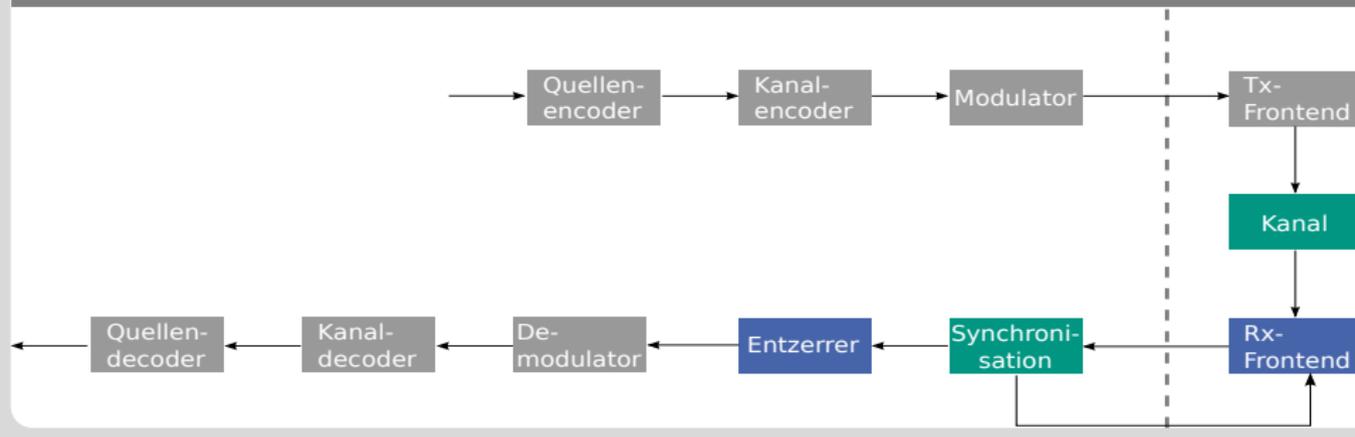


Übungen zu Nachrichtentechnik 1

Übung 3: Modulationsverfahren, Demodulation, Entscheidungstheorie

Marcus Müller | 28. Mai 2018

INSTITUT FÜR NACHRICHTENTECHNIK (CEL)



Aufgabe 24

Ein Sender überträgt das Bandpasssignal

$$s(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos\{2\pi f_T t + X(nT)\}$$

mit

$$X(nT) \in \{\vartheta_m = \frac{2\pi m}{M}; m = 0, 1, \dots, M-1\}.$$

- Berechnen Sie die komplexe Einhüllende $u(t)$.
- Zeichnen Sie die Signalraumdiagramme für $M = 2$ und $M = 4$.
- Berechnen Sie für $M = 2$ und $M = 4$ den Abstand d zweier benachbarter Signalvektoren. Skizzieren Sie in den Signalraumdiagrammen aus b) die optimalen Entscheidungsgrenzen bei gleichwahrscheinlichen Symbolen $X(nT)$ und additivem weißem Gauß'schen Rauschen.

M-PSK: Phase Shift Keying (dt. *Phasenumtastung*) mit M Symbolen, die im Konstellationsdiagramm auf einem Kreis mit dem Durchmesser A liegen, welcher die Amplitude des Basisbandsignals ist. Zum Abtastzeitpunkt wird eines der M Symbole gesendet. Der Verlauf der Übergänge zwischen zwei Symbolen (Trajektorie) hängt vom Impulsformer und der verwendeten PSK-Variante ab.

D = Differenziell: Es wird die Differenzphase zweier aufeinanderfolgender Symbole übertragen \Rightarrow keine Phasenkohärenz, also Kenntnis der absoluten Phase notwendig (d.h. Phasenmehrdeutigkeiten = Drehung des Konstellationsdiagramms egal) \Rightarrow Keine Phasensynchronisation notwendig.

Amplitudenschwankungen: Je näher Trajektorien am Ursprung vorbeigehen, desto stärker bricht in diesem Moment die Amplitude des Sendesignals ein. Das erfordert die Verwendung von Verstärkern mit einem großen linearen Bereich. Diese sind teuer und (Leistungs-)ineffizient. \Rightarrow In der Praxis werden PSK-Varianten verwendet, die Amplitudeneinbrüche vermeiden!

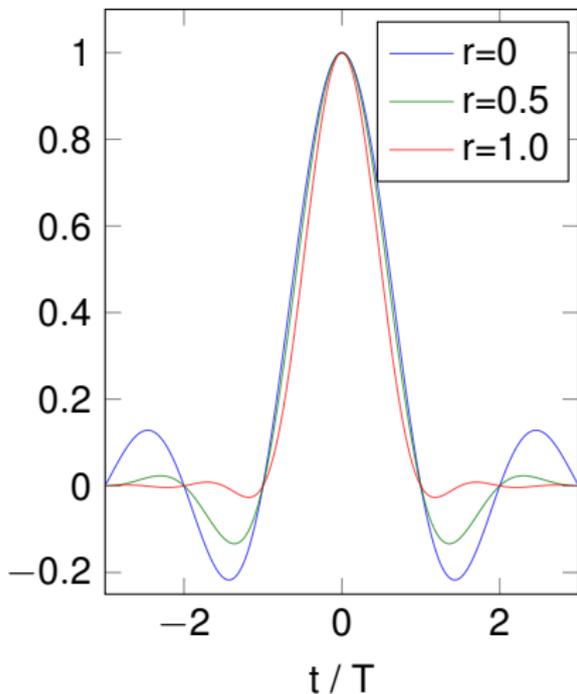
QPSK = 4-PSK: Quadrature Phase Shift Keying, PSK mit 4 Symbolen.

O = Offset: Real- und Imaginärteil der Symbole werden zeitlich versetzt umgetastet \Rightarrow keine Phasensprünge um $\pi \Rightarrow$ kein Amplitudeneinbruch bis auf Null!

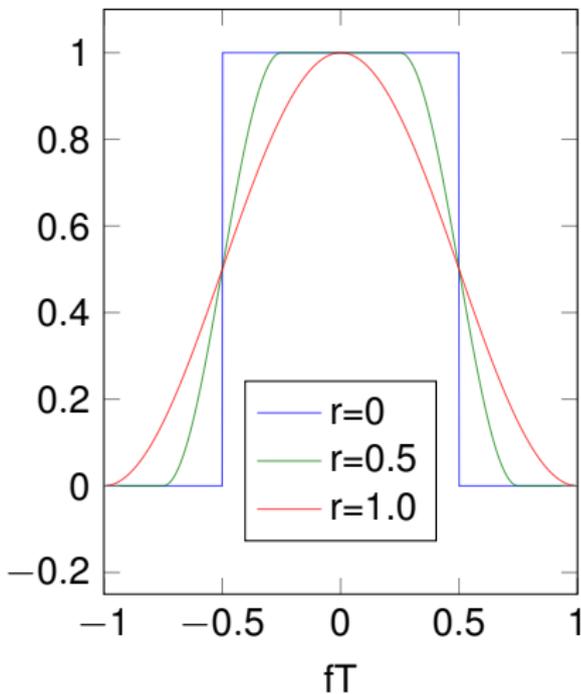
$\frac{\pi}{4}$ -**DQPSK:** Differenzielles Verfahren, bei dem bei jedem 2. Symbol ein um $\frac{\pi}{4}$ gedrehtes Konstellationsdiagramm verwendet wird \Rightarrow kein Amplitudeneinbruch bis auf Null! Keine Phasensynchronisation notwendig!

Raised Cosine Filter: Impulsantwort und Frequenzgang

$g(t)$



$G(f)$



Aufgabe 25

- a) Welche besonderen Eigenschaften hat eine $\pi/4$ -DQPSK Modulation im Vergleich zu einer QPSK Modulation und wann sind diese von Nutzen?
- b) Skizzieren Sie die Trajektorien für eine OQPSK-Übertragung für den Fall rechteckiger Impulsformung und für den Fall einer sinusförmigen Pulsform.
- c) Gegeben sind eine 16-PSK und eine 16-QAM Modulation. Berechnen Sie für beide Verfahren den minimalen Abstand zwischen zwei Symbolpunkten. Beide Alphabete seien so normiert, dass die Varianz bei gleichverteilten Symbolen eins ist.
- d) Welches Verfahren würden Sie im Falle von AWGN bevorzugen? Begründung!

Aufgabe 26 [Jon11]

Über einen diskreten Kanal werden Bits $x_k \in \{-1; 1\}$ übertragen. An seinem Ausgang liegt das Empfangssignal $r = x_k + n$ vor. Die Dichten von Sendesignal x_k und Störung n sind durch

$$f_X(x_k) = \frac{1}{3}\delta(x_k - 1) + \frac{2}{3}\delta(x_k + 1) \quad \text{und}$$
$$f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2}$$

gegeben.

- Auf welchen gesendeten Wert x_0 wird mittels des ML-Kriteriums (8.2-3) geschlossen, wenn $r_0 = 0, 15$ empfangen wird?
- Auf welchen Wert x_0 wird unter identischen Bedingungen nach dem MAP-Kriterium (8.2-1) geschlossen?

Entscheidungskriterium: Maximum-Likelihood (ML)

$$\hat{k} = \arg \max_k f(r|x_k)$$

„Entscheide für das Symbol, dessen bedingte Dichte am Ort des Empfangswertes den größten Wert besitzt.“

ML-Schwelle / Entscheidungsgrenze

Am Schnittpunkt der Bedingten Dichten

= in der Mitte zwischen den Sendesymbolen (BPSK) bzw. auf den Mittel-senkrechten (QAM) bzw. auf den Winkelhalbierenden (M -PSK)

A. 26 - Wie kommt man zur bedingten Dichte?

$$f_X(x_k) = \frac{1}{3}\delta(x_k - 1) + \frac{2}{3}\delta(x_k + 1) \quad \text{und} \quad f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2}$$

Gemeinsame Dichte (beachte Unabhängigkeit von X und N):

$$f_{X,N}(x_k, n) = f_X(x_k)f_N(n) = \frac{1}{3}\delta(x_k - 1)\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2} + \frac{2}{3}\delta(x_k + 1)\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2} \quad (1)$$

Bedingte Dichte:

$$f_R(r|x_k) = \frac{f_{X,N}(x_k, n)}{f_X(x_k)}, \quad \text{falls } f_X(x_k) > 0 \forall x_k \quad (2)$$

Hier erfüllt. Einsetzen von (1) in (2) für $x_k = 1$ und $x_k = -1$ mit $r = x_k + n \Leftrightarrow n = r - x_k$:

$$f_R(r|x_k = 1) = \frac{f_{X,N}(x_k = 1, r - x_k)}{f_X(x_k = 1)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(r-1)^2}$$
$$f_R(r|x_k = -1) = \frac{f_{X,N}(x_k = -1, r - x_k)}{f_X(x_k = -1)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(r+1)^2}$$

Entscheidungskriterium: Maximum-Aposteriori (MAP)

$$\begin{aligned}\hat{k} &= \arg \max_k P(x_k|r) \\ &= \arg \max_k \frac{P(x_k)f(r|x_k)}{f(r)} \\ &= \arg \max_k P(x_k)f(r|x_k)\end{aligned}$$

„Entscheide für das Symbol, dessen **gewichtete** bedingte Dichte am Ort des Empfangswertes den größten Wert besitzt.“

MAP-Schwelle / Entscheidungsgrenze

Am Schnittpunkt der *gewichteten* bedingten Dichten
(i.A. *nicht* mittig zwischen den Symbolen / *nicht* auf den Mittelsenkrechten
/ Winkelhalbierenden)

Über einen zeitdiskreten Kanal werden stochastisch unabhängig voneinander Binärwerte $d_k \in \{-1; 1\}$, $k \in \mathbb{Z}$, übertragen. Das Sendesignal d_k wird durch einen mittelwertfreien AWGN-Prozess n_k mit der Varianz $\sigma^2 = 0,25$ gestört. Sendesignal und Störprozess sind unkorreliert.

- a) Wie groß ist die Bitfehlerwahrscheinlichkeit im Empfänger, wenn ein Schwellwertdetektor mit $\hat{d}_k = \text{sign}(r_k) = \text{sign}(d_k + n_k)$ verwendet wird? Welchen Wert hat das Signal-zu-Rausch Verhältnis (SNR) am Entscheider?

Wiederholung: Normalverteilung

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ($\mathcal{N}(0; 1)$):

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{n^2}{2}} dn$$

Es gilt:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{n^2}{2}} dn = \Phi(b) - \Phi(a)$$

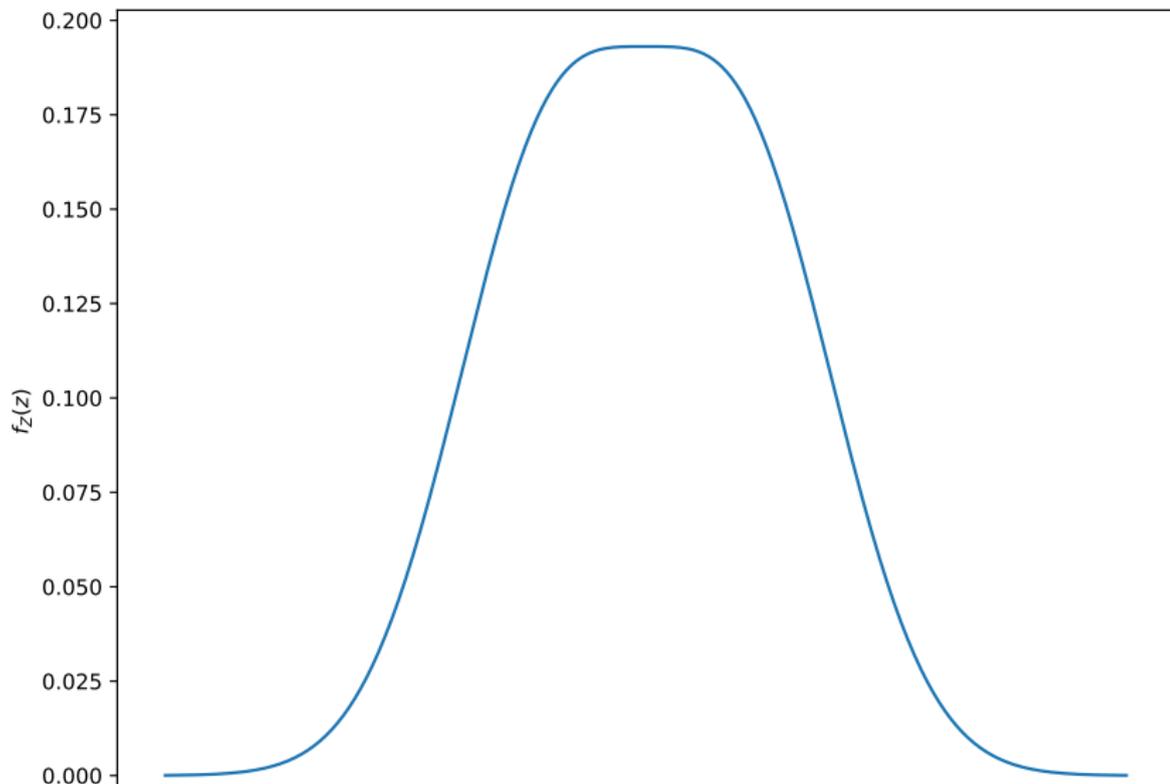
Standardnormalverteilung ist tabelliert (Klausuranhang), daher muss, um Werte angeben zu können, auf diese umgeformt werden, sofern keine Standardnormalverteilung vorliegt. Dies geschieht durch die Substitution:

$$Y := \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Das Übertragungssystem wird nun in einer Umgebung betrachtet, in der ein zusätzlicher gedämpfter Ausbreitungspfad auftritt, der das gesendete Signal um eine Bitdauer verzögert und dieses dem zeitlich korrekt empfangenen Signal additiv überlagert. Der zusätzliche Ausbreitungspfad wird um den Faktor $a = 0,5$ gedämpft. Die AWGN-Störung bleibt unverändert.

- b) Geben Sie die Dichte der resultierenden Störung an, wenn der zusätzliche Ausbreitungspfad als Störung aufgefasst wird.
- c) Wie groß sind die Bitfehlerwahrscheinlichkeit und das Signal-zu-Rausch-Verhältnis am Entscheider?

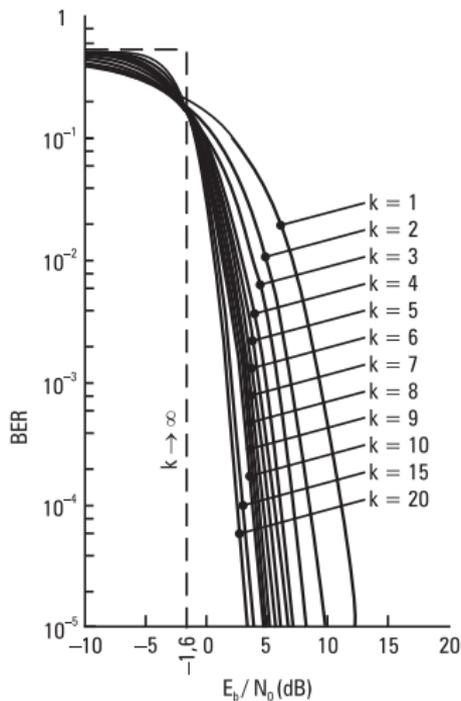
Aufgabe 27 b): Skizze



Aufgabe 28 [F2011]

- a) Gegeben sind die Modulationsverfahren 2-FSK und 4-FSK. Beide verwenden den gleichen Symboltakt und besitzen das gleiche E_b/N_0 . Vergleichen Sie die Bitfehlerrate, die Bandbreite und die Datenrate der beiden Verfahren.
- b) Vergleichen Sie auf dieselbe Weise wie in Aufgabenteil a) die Verfahren BPSK, QPSK und 8-PSK miteinander.

Aufgabe 28 [F2011]



Lösung Aufgabe 28 a): 2-FSK vs. 4-FSK

2-FSK	4-FSK	Erklärung
BER_2	$BER_4 < BER_2$	Mittlerer Frequenzabstand zwischen aufeinanderfolgenden Symbolen größer
B_2	$B_4 = 2B_2$	Doppelt so viele Frequenzen erfordern die doppelte Bandbreite
R_2	$R_4 = 2R_2$	Mit M Symbolen können $\log_2(M) \frac{\text{Bit}}{\text{Symbol}}$ übertragen werden.

Lösung Aufgabe 28 b): BPSK vs. QPSK vs 8-PSK

BPSK	QPSK	8-PSK	Erklärung
BER_2	$BER_4 = BER_2$	$BER_8 > BER_2$	Symbolabstand wird mit größer werdendem M geringer, QPSK kann jedoch als zwei orthogonale BPSK Verfahren demoduliert werden
B	B	B	Banbreite hängt nur von der Impulsform- und Dauer ab
R_2	$R_4 = 2R_2$	$R_8 = 2R_4$	Mit M Symbolen können $\log_2(M) \frac{\text{Bit}}{\text{Symbol}}$ übertragen werden.

Aufgabe 28 [F2011]

c) Gegeben sind die folgenden Signalraumdiagramme:

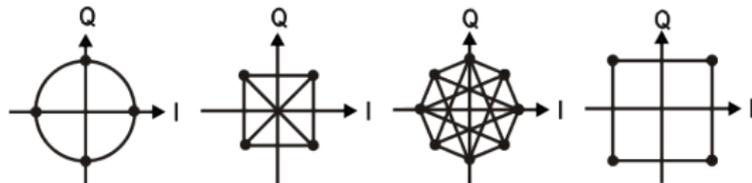


Abbildung: Symbolraumdiagramme

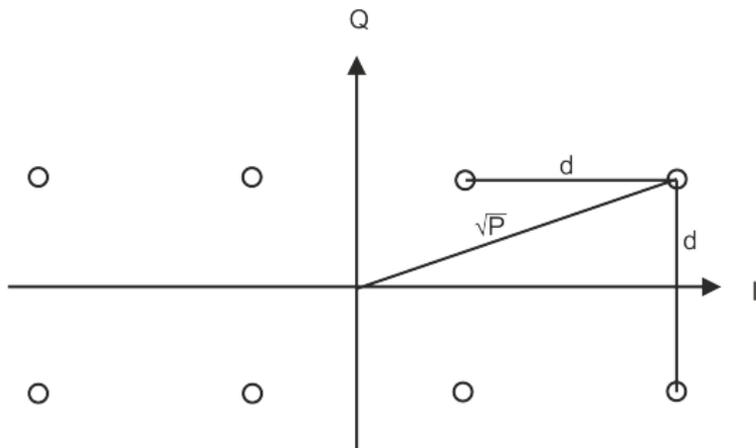
Um welche Modulationsarten handelt es sich?

d) Erläutern Sie den Begriff Bandbreiteneffizienz.

e) Welche Bandbreiteneffizienzen besitzen 256-QAM und BPSK?

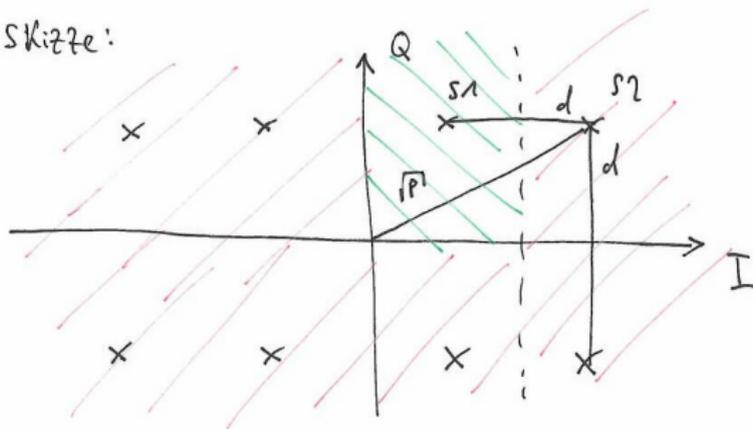
Aufgabe 29 [H2010]

Berechnen Sie die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit P_F der in folgender Abbildung dargestellten 8-QAM bei additivem Gauß'schen Rauschen. Gehen Sie dabei davon aus, dass die Rauschkomponenten in I bzw. in Q unabhängig voneinander sind und jeweils die mittlere Leistung $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$ besitzen. Geben Sie die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit als Funktion von P und N_0 an.



Aufgabe 29: Lösung

Skizze:



- Problem symmetrisch \Rightarrow 1. Quadrant betrachten
- I-/Q-Rauschen unabhängig \Rightarrow 2D-Integration zerfällt in Produkt zweier 1D-Integrationen

Aufgabe 29: Lösung

$$P_{F,S1} = 1 - P_{O,S1}$$

$$\begin{aligned} P_F &= 4 \cdot \left(\frac{1}{8} P_{F,S1} + \frac{1}{8} P_{F,S2} \right) = \frac{1}{2} (P_{F,S1} + P_{F,S2}) \\ &= 1 - P_O = 1 - \frac{1}{2} (P_{O,S1} + P_{O,S2}) \end{aligned}$$

Aufgabe 29: Lösung

$$P_{0,1,1} = \int_0^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(r-\frac{d}{2})^2}{2\sigma^2}} dr \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(r-\frac{d}{2})^2}{2\sigma^2}\right\} dr$$

$$\rho = \frac{r - \frac{d}{2}}{\sigma}$$

↓
=

$$\int_{-\frac{d}{2\sigma}}^{\frac{d}{2\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho \cdot \int_{-\frac{d}{2\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho$$

Aufgabe 29: Lösung

$$\begin{aligned} &= \left(\overset{F(b)}{\Phi\left(\frac{d}{25}\right)} - \overset{F(a)}{\Phi\left(-\frac{d}{25}\right)} \right) \left(1 - \Phi\left(-\frac{d}{25}\right) \right) \\ &= \left(\Phi\left(\frac{d}{25}\right) - 1 + \bar{\Phi}\left(\frac{d}{25}\right) \right) \left(1 - 1 + \bar{\Phi}\left(\frac{d}{25}\right) \right) \\ &= \left(2\bar{\Phi}\left(\frac{d}{25}\right) - 1 \right) \bar{\Phi}\left(\frac{d}{25}\right) \\ &= 2\bar{\Phi}^2\left(\frac{d}{25}\right) - \bar{\Phi}\left(\frac{d}{25}\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 29: Lösung

$$P_{0,52} = \int_{-\frac{d}{2\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(r-\frac{3d}{2})^2}{2\sigma^2}} dr \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(r-\frac{d}{2})^2}{2\sigma^2}\right\} dr$$

$v = \frac{r-\frac{3d}{2}}{\sigma}$, $\beta = \frac{r-\frac{d}{2}}{\sigma}$

$$= \int_{-\frac{d}{2\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \cdot \int_{-\frac{d}{2\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\beta^2}{2}} d\beta$$

Aufgabe 29: Lösung

$$= \left(1 - \left(1 - \Phi\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right)\right) \left(1 - \left(1 - \Phi\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right)\right)$$

$$= \Phi^2\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{1}{2}(P_{0,S1} + P_{0,S2}) = \frac{3}{2}\Phi^2\left(\frac{d}{2\sigma}\right) - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$$

$$P_F = 1 - P_0 = 1 - \frac{3}{2}\Phi^2\left(\frac{d}{2\sigma}\right) - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$$