

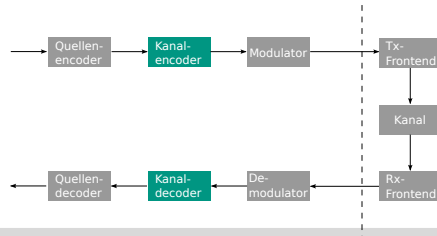


Übungen zu Nachrichtentechnik 1

Übung 4: Blockcodierung, Faltungscodierung

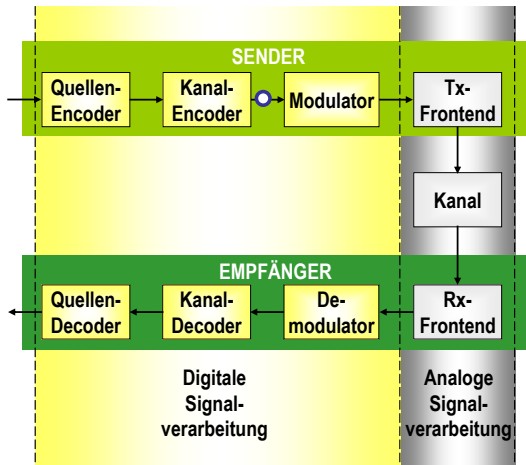
Marcus Müller | 11. Juni 2018

INSTITUT FÜR NACHRICHTENTECHNIK (CEL)



KANALCODIERUNG

FEHLERERKENNUNG- UND KORREKTUR

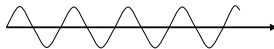


A

0 0 0 1 1 0 0

00 01 10 01 01 00 10

$e^{j\pi/4}$ $e^{j3\pi/4}$ $e^{j7\pi/4}$ $e^{j3\pi/4}$ $e^{j3\pi/4}$ $e^{j\pi/4}$ $e^{j7\pi/4}$



$e^{j\pi/4}$ $e^{j3\pi/4}$ $e^{j7\pi/4}$ $e^{j3\pi/4}$ $e^{j5\pi/4}$ $e^{j\pi/4}$ $e^{j7\pi/4}$

00 01 10 01 11 00 10

0 0 0 1 1 0 0

A

- Gezieltes Hinzufügen von Redundanz zur Fehlerkorrektur
- Kanalcodierung macht gute Kanäle besser und schlechte Kanäle schlechter!

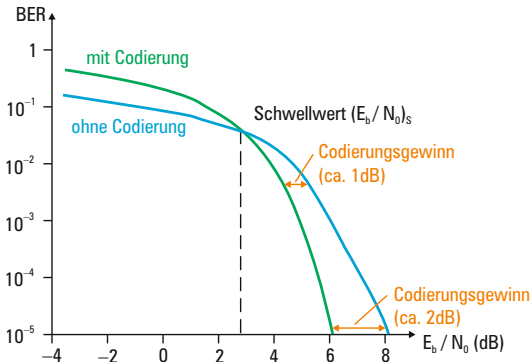


Bild 5.1-1: BER über SNR_{bit} und Codierungsgewinn

- **(n, k) -Code:** Abbildung k -Bit Datenwort (Infowort) $\mathbf{d}^T = (d_1 d_2 \dots d_k)$ auf n -Bit Codewort $\mathbf{c}^T = (c_1 c_2 \dots c_n)$
 - **Coderate:** $r = \frac{k}{n}$
 - **Linear:** Die Codebits ergeben sich als Linearkombination der Infobits: $c_j = \sum_{i=1}^k d_i g_{ij}$. Daraus folgt, dass die Summe zweier CW in GF(2) wieder ein gültiges CW ist.
 - **Systematisch:**
 $c_i = d_i \forall i = 1, 2, \dots, k \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}^T = (d_1 d_2 \dots d_k c_{n-k+1} \dots c_n)$
 - **Zyklisch:** Jede zykl. Verschiebung eines CW ergibt ein gültiges CW.
- **Encodierung:** $\mathbf{c}^T = \mathbf{d}^T \mathbf{G}$ mit Generatormatrix $\mathbf{G} = [\mathbf{I}_k \mathbf{P}]$
- **Hammingabstand:** Anzahl unterschiedl. Bits zwischen zwei Bitfolgen.
- **Minimaler Hammingabstand:** $d_{\min}$. Da Nullwort $(00 \dots 0)$ immer Teil eines linearen Blockcodes ist, muss nur mit diesem verglichen werden!
- **Korrigierbarkeit** von t Fehlern: $d_{\min} \geq 2t + 1$
- **Erkennbarkeit** von t Fehlern: $d_{\min} \geq t + 1$

Syndrom: $\mathbf{s}^T = \mathbf{r}^T \mathbf{H}^T$ mit der Paritycheckmatrix $\mathbf{H} = [\mathbf{P}^T \mathbf{I}_{n-k}]$

- kein Übertragungsfehler $\Rightarrow \mathbf{s} = \vec{0}$
- $\mathbf{s} \neq \mathbf{0} \Rightarrow$ Übertragungsfehler mit Fehlermuster $\mathbf{e}$, so dass gilt:
 $\mathbf{r} = \mathbf{c} + \mathbf{e}$
- Aus dem Syndrom kann auf die verfälschten Bits geschlossen werden, sofern dies die Korrigierbarkeit des Codes zulässt. Bei Korrigierbarkeit eines Fehlers genügt der Vergleich des Syndroms mit den Spalten der Paritycheckmatrix.

Durch die Generatormatrix

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ist ein linearer Blockcode gegeben.

- Bestimmen Sie den minimalen Hammingabstand $d_{\min}$, die Korrekturfähigkeit t und die Paritycheckmatrix $\mathbf{H}$ des Codes.
- Es wird der Vektor $\vec{r} = (011110)^T$ empfangen. Welches ist das am wahrscheinlichsten gesendete Codewort?

Der Code wird zur Übertragung über einen symmetrischen Binärkanal mit der Bitfehlerwahrscheinlichkeit $P = 10^{-3}$ verwendet.

- c) Bestimmen Sie die Wortfehlerwahrscheinlichkeit für uncodierte und für codierte Übertragung.
- d) Schätzen Sie die nach der Decodierung noch vorhandene Bitfehlerwahrscheinlichkeit P_B nach unten und nach oben ab.

Hinweis: Die Wortfehlerwahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei der Übertragung eines Codeworts mindestens ein Fehler auftritt.

- Zahlenmenge $\{0; 1\}$
- Rechnung modulo 2 $\Rightarrow 2x = 0$
- Wahrheitstabellen für die arithmetischen Operationen:

$\pm$	1	0
1	0	1
0	1	0

Tabelle: *

Addition (= XOR) $\Rightarrow -x = x$

$\cdot$	1	0
1	1	0
0	0	0

Tabelle: *

Multiplikation (= AND)

- a) Zeigen Sie, dass in $GF(2)$ die Gleichung

$$x^7 - 1 = (x + 1)(x^3 + x^2 + 1)(x^3 + x + 1)$$

gilt und dass die beiden kubischen Polynome auf der rechten Seite dieser Gleichung irreduzibel in $GF(2)$ sind, d.h. in $GF(2)$ keine Nullstellen besitzen.

- b) Weisen Sie nach, dass

$$g(x) = x^4 + x^2 + x + 1$$

das Generatorpolynom eines zyklischen $(7,3)$ -Blockcodes ist.

- c) Skizzieren Sie den zu $g(x)$ gehörenden Encoder.

Aufgabe 32 [F2012]

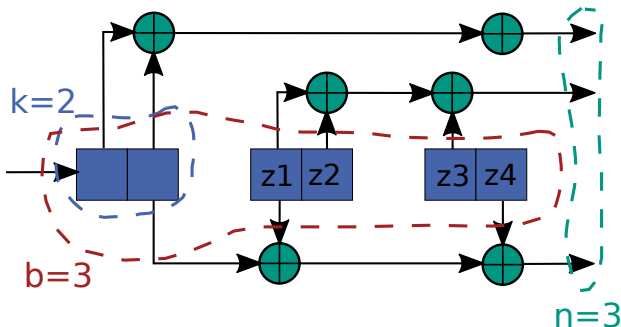
Gegeben ist die Generatormatrix eines linearen (n, k) -Blockcodes:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- a) Geben Sie n und k an.
- b) Ist der Code systematisch? Begründung!
- c) Wie viele Bitfehler kann der Code korrigieren? Begründung!
- d) Geben Sie die systematische Matrix $\mathbf{G}_{\text{sys}}$ zu $\mathbf{G}$ an.
- e) Kann der Code von $\mathbf{G}_{\text{sys}}$ durch ein rückgekoppeltes Schieberegister erzeugt werden? Wenn nein, begründen Sie dies, wenn ja, geben Sie das entsprechende Schieberegister an.

FALTUNGSCODIERUNG

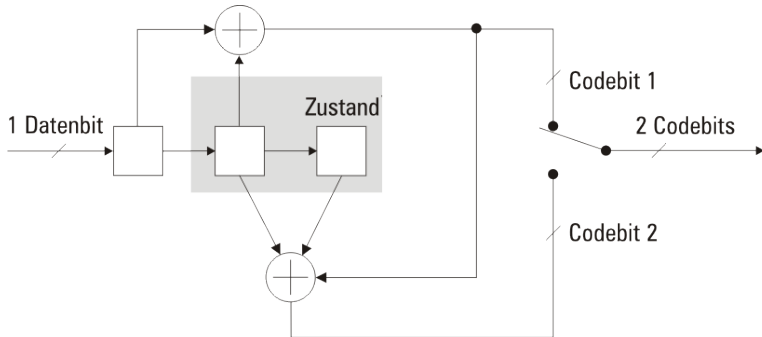
- **Graphisch:** Darstellung eines Faltungscode mit $k = 2$, $b = 3$ und $n = 3 \Rightarrow$ Coderate $r = 2/3$, Einflusslänge $L = 6$



1. Erstellen eines Trellis durch Ablesen aus dem Zustandsdiagramm.
2. Ordentliche Beschriftung der Übergänge z.B. nach der Notation $d_1 d_2 \dots d_n | c_1 c_2 \dots c_n$ wobei $d_1 d_2 \dots d_n$ die Eingangsbits darstellen, die zu der entsprechenden Zustandsänderung führen. $c_1 c_2 \dots c_n$ sind die dabei resultierenden Codebits.
3. Für jeden möglichen Schritt wird die Hammingdistanz bzw. die Euklidische Distanz zwischen den Empfangssymbolen und den möglichen Sendesymbolen gebildet.
4. Enden mehrere Pfade in einem Knoten, wird derjenige gewählt, der die geringere Distanz hat („Survivor“)
5. Sind alle Survivor bestimmt, wird der Gesamtpfad mit der geringsten Distanz zurückverfolgt und die entsprechenden Eingangsbits herausgeschrieben.

Aufgabe 33 [Jon11]

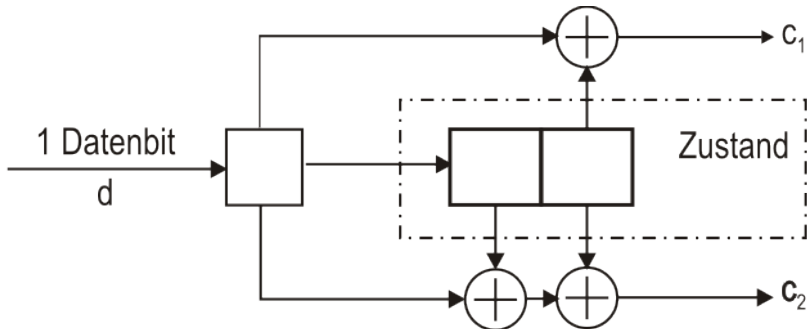
Gegeben sei der im folgenden Bild gezeigte Faltungsencoder mit der Coderate $\frac{1}{2}$ und der Einflusslänge $L = 3$.



- a) Zeichnen Sie das Zustandsdiagramm des Encoders.
- b) Sie empfangen die Codebitfolge 0 0 1 0 0 1 1 1, wobei ein symmetrischer Binärkanal zugrunde gelegt sei. Bestimmen Sie unter Verwendung des Viterbi-Algorithmus die am wahrscheinlichsten gesendete Codebitfolge. Der Anfangszustand des Encoders sei 0 0.

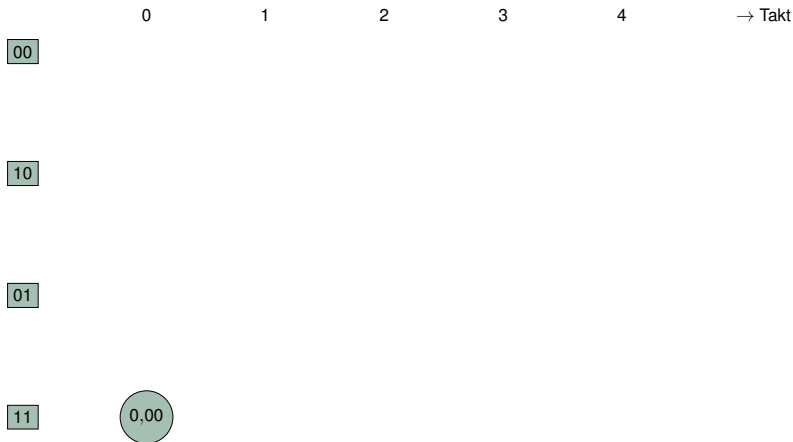
Aufgabe 36 [F2012]

Gegeben ist der in der folgenden Abbildung dargestellte Faltungscoder.

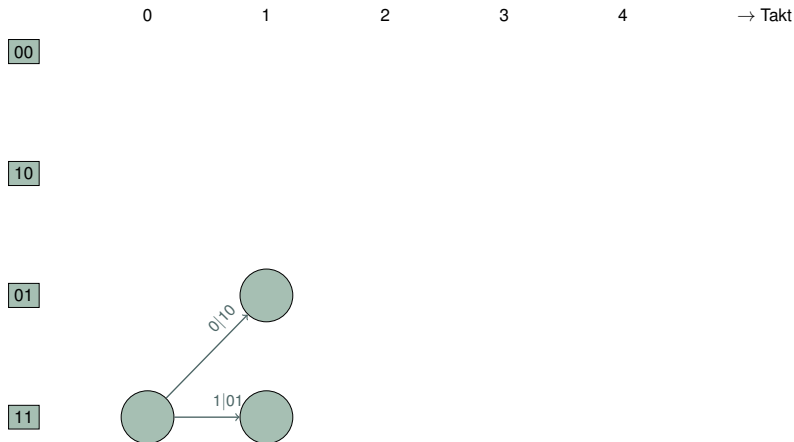


- a) Zeichnen Sie das zum Faltungscoder gehörende Zustandsdiagramm. Kennzeichnen Sie die Übergänge nach der Notation $d|c_1 c_2$.
- b) Codieren Sie die Eingangsfolge $\{1010\}$. Der Anfangszustand sei 00. In welchem Endzustand befindet sich der Decoder?
- c) Sie empfangen die gestörte Empfangsfolge $\{(0, 2; 0, 9) (0, 78; 0, 1) (0, 1; 0, 1) (0, 66; 0, 83)\}$. Decodieren Sie mit Hilfe des Viterbi-Algorithmus. Verwenden Sie als Metrik den **quadrierten** euklidischen Abstand. Der Anfangszustand ist 11.

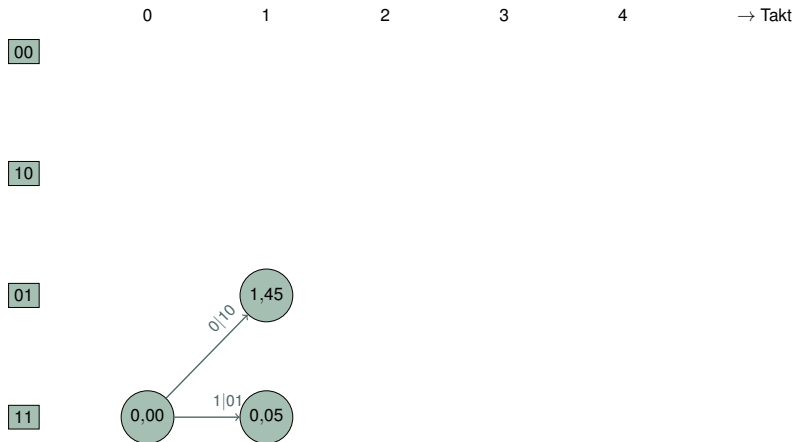
Soft-Viterbi: Achsen & Anfangszustand



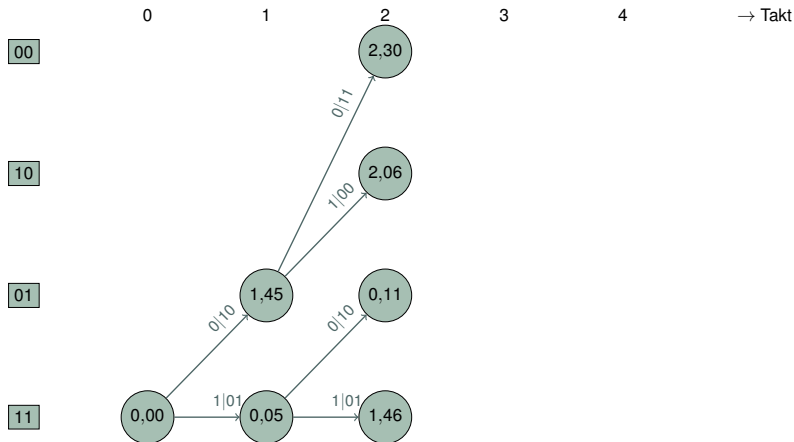
Soft-Viterbi: Erster Zustandsübergang



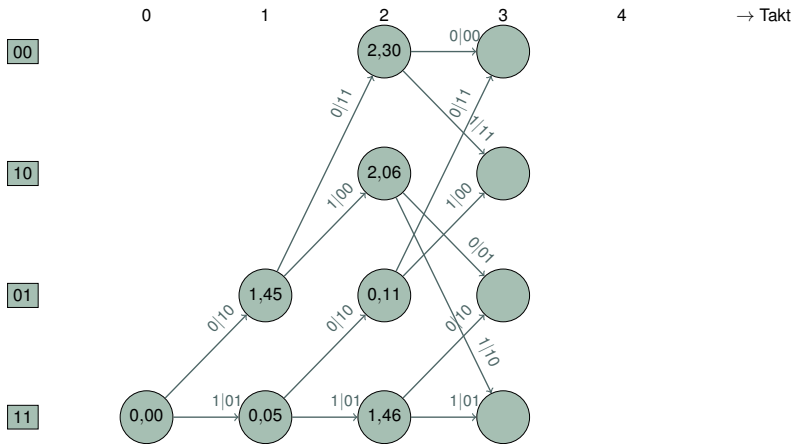
Soft-Viterbi: Gewichte berechnen



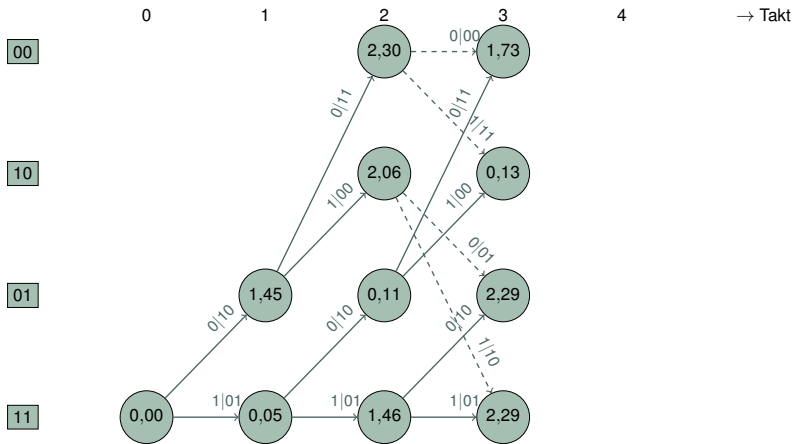
Soft-Viterbi: 2. Übergang & Gewichte



Soft-Viterbi: 3. Zustandsübergang

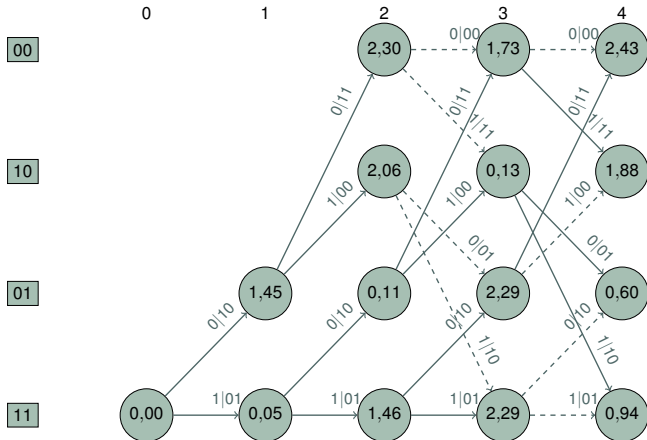


Soft-Viterbi: 3. Überg.: Pfade verwerfen



Soft-Viterbi: 4. Zustandsübergang

→ Takt



Soft-Viterbi: Backtracking

→ Takt

