

# Übersicht über die Vorlesung

---

1. **Grundlagen der Quantenmechanik**
2. **Elektronische Zustände**
3. **Vom Wasserstoffatom zum Periodensystem der Elemente**
4. **Elektronen in Kristallen**
5. **Halbleiter**
6. **Quantenstatistik für Ladungsträger**
7. **Dotierte Halbleiter**

## 8. **Halbleiter im Nichtgleichgewicht**

8.1 Der Driftstrom

8.2 Der Diffusionsstrom

8.3 Generation und Rekombination

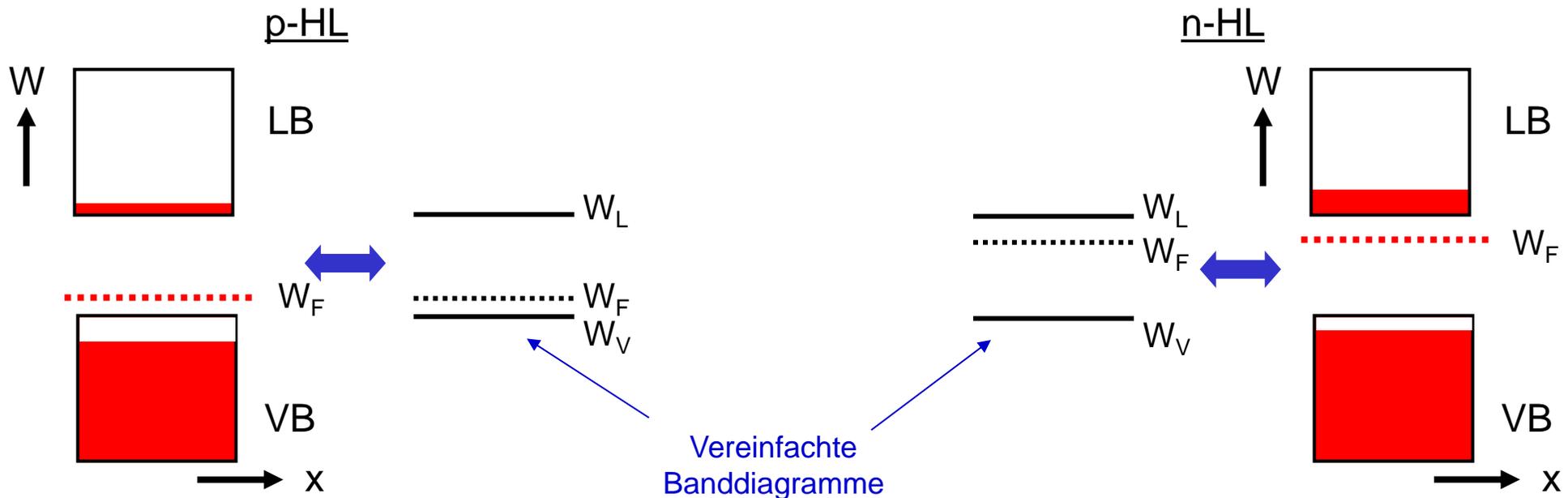
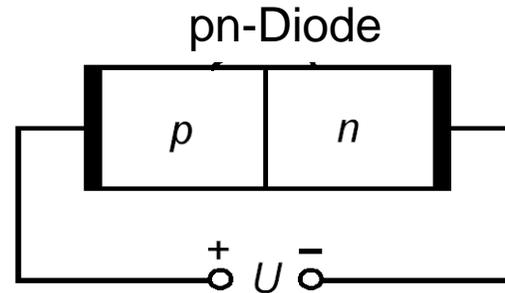
8.4 Halbleitergrundgleichungen

## 9. **Der pn-Übergang**

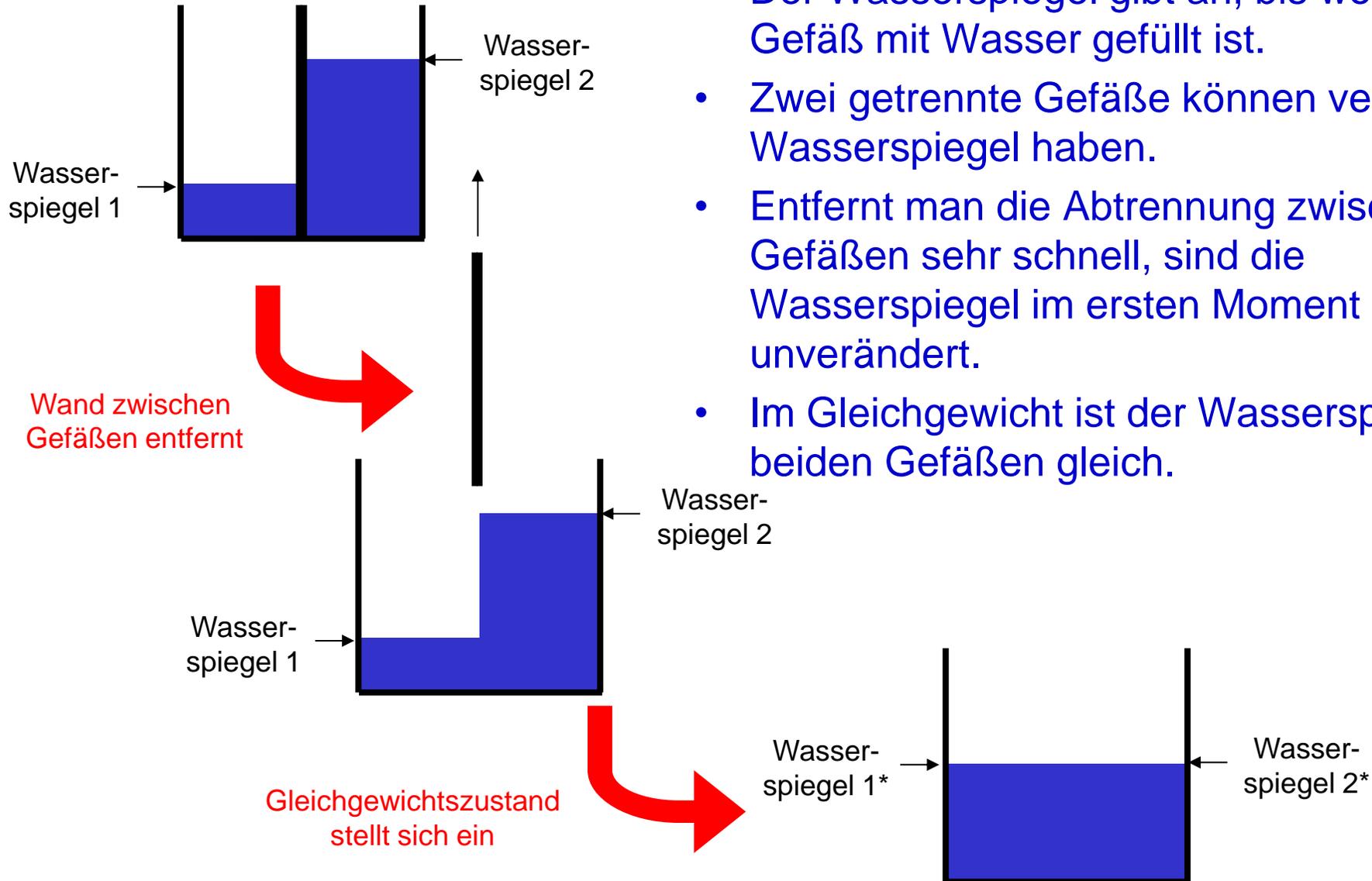
Festkörperelektronik  
SS 2014  
11. Foliensatz  
27.06.2014

# Zusammenbringen von p-HL und n-HL

- Was passiert, wenn wir einen p-HL und einen n-HL zu einer **pn-Diode** zusammenbringen?



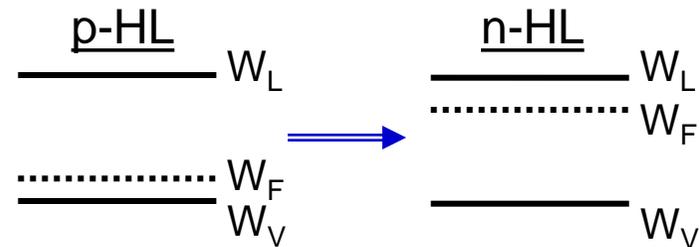
# Fermi-Energie: Wasserpegel-Analogie



- Der Wasserspiegel gibt an, bis wohin ein Gefäß mit Wasser gefüllt ist.
- Zwei getrennte Gefäße können verschiedene Wasserspiegel haben.
- Entfernt man die Abtrennung zwischen den Gefäßen sehr schnell, sind die Wasserspiegel im ersten Moment unverändert.
- Im Gleichgewicht ist der Wasserspiegel in beiden Gefäßen gleich.

# Fermi-Energie

- Die Fermi-Energie gibt an, bei welcher Energie ein erlaubter Bandzustand mit 50% Wahrscheinlichkeit besetzt ist.
- Zwei getrennte Halbleiter können verschiedene Fermi-Energien haben.

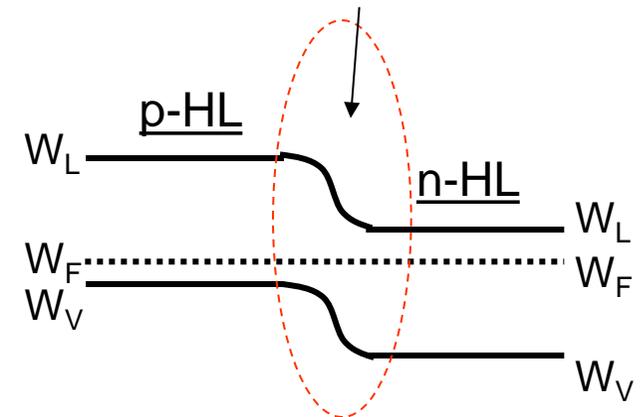


Halbleiter werden  
zusammen gebracht



Gleichgewichtszustand  
stellt sich ein

in diesem Bereich muss dann  
eine Potentialdifferenz sein



- Bringt man die beiden Halbleiter zusammen, sind die Fermi-Energien im ersten Moment unverändert.
- Im thermischen Gleichgewicht ist die Fermi-Energie in beiden Halbleitern gleich!!

# Halbleiter im Nichtgleichgewicht

---

- „Schalten“ (z.B. mit Spannung, mit Licht,...) heisst immer Erzeugung eines Nichtgleichgewichtszustandes
- Bauelemente sind meist nicht homogene Halbleiter, sondern bestehen aus Bereichen mit verschiedenen Halbleitertypen sowie Metallen und Isolatoren
  - **räumliche Abhängigkeit ist relevant**
- Dynamik des Halbleiters bestimmt Schaltverhalten
  - **zeitliche Abhängigkeit ist relevant**

Quantitative Beschreibung von  
 $n(x,y,z,t)$  und  $p(x,y,z,t)$ ?

# Halbleiter im Nichtgleichgewicht

---

- eine Änderung der *Dichte*  $n(x,y,z)$  kann erfolgen durch
  - **Ströme (Drift- und Diffusion)**
  - durch Vernichtung (**Rekombination**)
  - durch Erzeugung von Ladungsträgern (**Generation**)

# Übersicht über die Vorlesung

---

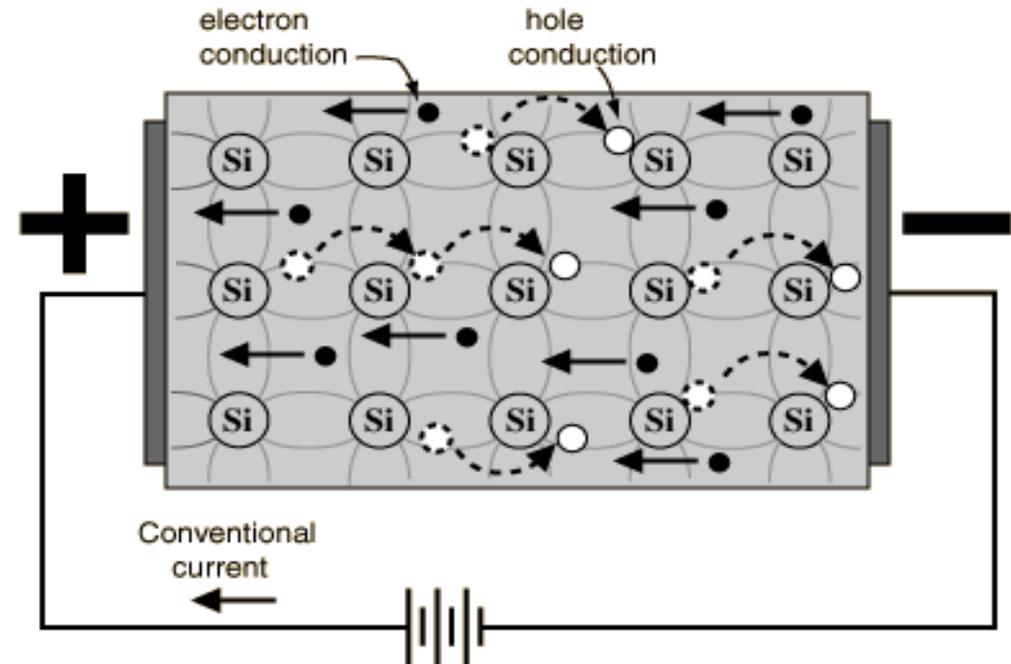
1. **Grundlagen der Quantenmechanik**
2. **Elektronische Zustände**
3. **Vom Wasserstoffatom zum Periodensystem der Elemente**
4. **Elektronen in Kristallen**
5. **Halbleiter**
6. **Quantenstatistik für Ladungsträger**
7. **Dotierte Halbleiter**
8. **Halbleiter im Nichtgleichgewicht**
  - 8.1 Der Driftstrom
  - 8.2 Der Diffusionsstrom
  - 8.3 Generation und Rekombination
  - 8.4 Halbleitergrundgleichungen
9. **Der pn-Übergang**

# Strom #1: Der Driftstrom

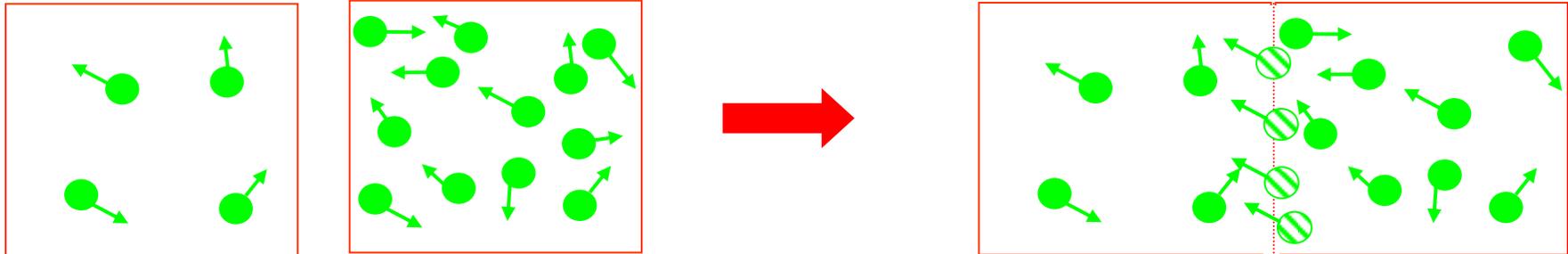
- Driftstrom (Feldstrom)  $J_F$  infolge eines elektrischen Feldes
  - Strom setzt sich aus einem Elektronen- und einem Löcheranteil zusammen
  - Leitfähigkeit hängt von der Ladungsträgerdichte und der Beweglichkeit ab

$$\begin{aligned}\vec{J}_F &= \vec{J}_{n,F} + \vec{J}_{p,F} \\ &= -en\vec{v}_n + ep\vec{v}_p \\ &= e[n\mu_n + p\mu_p]\vec{E} = \sigma\vec{E}\end{aligned}$$

$$\sigma = e[n\mu_n + p\mu_p]$$



# Strom # 2: Diffusionsstrom

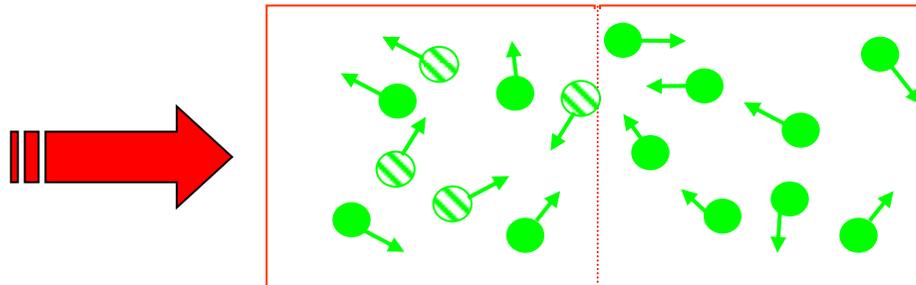


Zwei Bereiche mit verschiedener  
Konzentration an Ladungsträgern  
werden  
zusammengebracht



Es fließt ein Strom

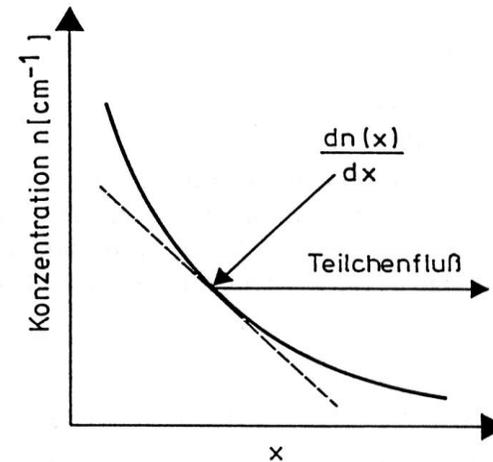
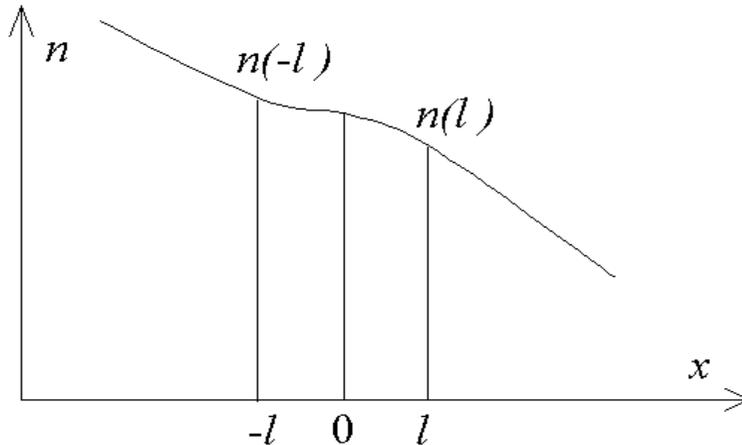
–im Durchschnitt bewegen  
sich mehr Träger aus dem  
Bereich höherer  
Konzentration zum Bereich  
niedrigerer Konzentration als  
anders herum



Es stellt sich eine  
statistische  
Gleichverteilung der  
Träger ein.

# Strom # 2: Diffusionsstrom

–die Diffusionskonstanten  $D_n$  und  $D_p$  geben an, wieviel Strom bei einem gewissen Gradienten der e's bzw. h's fließt



eindimensional:

im Grenzübergang  $l \rightarrow 0$ :

$$J_{n,D} = eD_n \frac{dn}{dx}$$

(unterschiedliches  
Vorzeichen für e's und  
h's !)

bzw. für die Löcher:

$$J_{p,D} = -eD_p \frac{dp}{dx}$$

# Strom # 2: Diffusionsstrom

---

Verallgemeinerung auf  
3D:

$$J_{n,D} = eD_n \frac{dn}{dx}$$



$$\vec{J}_{n,D}(\vec{r}) = eD_n \nabla n(\vec{r})$$

Insgesamt gilt also für die Diffusionsströme:

$$\vec{J} = \vec{J}_{n,D}(\vec{r}) + \vec{J}_{p,D}(\vec{r})$$

$$\vec{J}_{n,D}(\vec{r}) = eD_n \nabla n(\vec{r})$$

$$\vec{J}_{p,D}(\vec{r}) = -eD_p \nabla p(\vec{r})$$

# Das elektrochemische Potential

---

Die Trennung von Drift- und Diffusionsströmen ist nur ein Hilfsmittel zur quantitativen Modellierung (ähnlich wie bei der Überlagerung von verschiedenen Kräften) !

Woher soll das Elektron wissen, ob es diffundieren oder driften soll ??

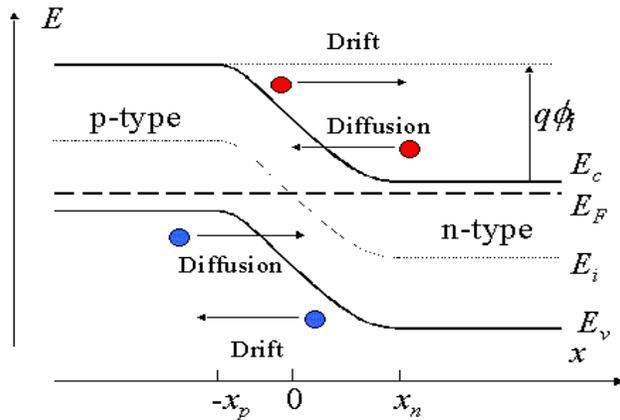
Gemeinsame Beschreibung durch die elektrochemischen Potentiale  $\eta_{e,h}$ , welche identisch sind mit den (Quasi)-Fermi-Energien  $W_{F,e}$  bzw.  $W_{F,h}$ .

Die Quasi-Fermi-Energie kann für Löcher und Elektronen *unterschiedlich* sein ! (z. B. durch eine von aussen angelegte Spannung oder durch Beleuchtung, ....)

Dies ist die Grundlage nahezu aller Halbleiterbauelemente !



# Einsteinrelationen



$$n(x) = N_L \exp\left(-\frac{W_L(\infty) - e\varphi(x) - W_F}{kT}\right)$$

Hier kommt zum Ausdruck, dass in das elektrochemische Potential („Fermi-Niveau“) in einem Halbleiter das elektrische Potential  $\varphi(x)$  mit eingeht. Da wir eine Aussage über Diffusionskonstanten machen wollen, macht es Sinn, den obigen Termin nach  $x$  abzuleiten:

$$\frac{\partial n(x)}{\partial x} = n(x) \frac{e}{kT} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = -n(x) \frac{e}{kT} E(x)$$

Hierbei ist  $E = -\text{grad } \varphi(x)$  das ortsabhängige elektrische Feld.

# Einsteinrelationen

Nun kann ausgenutzt werden, dass sich im Gleichgewicht Drift- und Diffusionsströme gegenseitig kompensieren:

$$\text{Aus } J_F = -J_D \text{ folgt } en(x)\mu_n E(x) = -eD_n \frac{\partial n}{\partial x}$$

Setzt man nun die abgeleitete ortsabhängige Ladungsträgerdichte in diese Beziehung ein, so ergibt sich:

$$en(x)\mu_n E(x) = (-eD_n) \left(-n(x) \frac{e}{kT} E(x)\right)$$

Aus diesem Ausdruck kann das meiste weggekürzt werden, so dass man zur sogenannten **Einsteinrelation** kommt:

$$D_n = \frac{kT}{e} \mu_n$$

Die gleiche Ableitung ließe sich auch für die Löcher machen und man kommt auf diese Weise zu:

$$D_p = \frac{kT}{e} \mu_p$$

Diese hier am Spezialfall pn-Übergang hergeleitete Beziehung ist eine viel allgemeinere Beziehung der statistischen Thermodynamik und gilt z. B. genauso auch bei der Bewegung von Ionen in einer Elektrolytlösung.

# Übersicht über die Vorlesung

---

1. **Grundlagen der Quantenmechanik**
2. **Elektronische Zustände**
3. **Vom Wasserstoffatom zum Periodensystem der Elemente**
4. **Elektronen in Kristallen**
5. **Halbleiter**
6. **Quantenstatistik für Ladungsträger**
7. **Dotierte Halbleiter**
8. **Halbleiter im Nichtgleichgewicht**
  - 8.1 Der Driftstrom
  - 8.2 Der Diffusionsstrom
  - 8.3 Generation und Rekombination
  - 8.4 Halbleitergrundgleichungen
9. **Der pn-Übergang**

# Generation und Rekombination

- Die Trägergenerationsrate  $g$  setzt sich aus verschiedenen Anteilen zusammen:

$$\left( \frac{\partial n}{\partial t} \right)_{gen} = g = g(x, y, z, t) = g_{opt} + g_{phonon} + g_{St} + \dots$$

$g_{opt}$  : Generationsrate durch Absorption von Photonen (Licht)

$g_{phonon}$ : thermische Generationsrate durch Absorption von Gitter-Phononen

$g_{St}$  : Generationsrate durch Ionisation einer Störstelle

- Zu jedem Generationsprozess gibt es einen entsprechenden Rekombinationsprozess:

$$-\left( \frac{\partial n}{\partial t} \right)_{rec} = r = r(x, y, z, t) = r_{opt} + r_{phonon} + r_{St} + \dots$$

- Im thermischen Gleichgewicht gilt  $g = r$  und einzeln  $g_i = r_i$  !

# Übersicht über die Vorlesung

---

1. **Grundlagen der Quantenmechanik**
2. **Elektronische Zustände**
3. **Vom Wasserstoffatom zum Periodensystem der Elemente**
4. **Elektronen in Kristallen**
5. **Halbleiter**
6. **Quantenstatistik für Ladungsträger**
7. **Dotierte Halbleiter**
8. **Halbleiter im Nichtgleichgewicht**
  - 8.1 Der Driftstrom
  - 8.2 Der Diffusionsstrom
  - 8.3 Generation und Rekombination
  - 8.4 Halbleitergrundgleichungen
9. **Der pn-Übergang**

# Zusammenfassung: Ladungsträgerprozesse

---

- Es gibt in Halbleitern drei unterschiedliche Prozesse, durch die sich die Ladungsträgerdichte räumlich und/oder zeitlich verändern kann:
- **1. Driftstrom (Feldstrom)**
  - Ladungsträger bewegen sich aufgrund eines äußeren elektrischen Feldes.
- **2. Diffusionsstrom**
  - Ladungsträger bewegen sich aufgrund eines Konzentrationsgradienten.
- **3. Generations- und Rekombinationsprozesse**
  - Die Raten setzen sich aus verschiedenen Einzelprozesse zusammen (z.B. strahlende Übergänge, Übergänge durch Störstellen, Auger-Prozess, Rekombination an Oberflächen).
  - Je nach Situation sind verschiedene Prozesse dominant.
  - In den meisten HL dominiert die Rekombination durch Störstellen. Bei direkten HL spielen auch strahlende Übergänge eine Rolle.
  - Bei hoher Ladungsträgerdichte von Elektronen und Löchern sind Auger-Prozesse wichtig.

# Ladungsträgerprozesse in Halbleitern

- Es gibt in Halbleitern drei unterschiedliche Prozesse, durch die sich die Ladungsträgerdichte räumlich und/oder zeitlich verändern kann:

- **1. Driftstrom (Feldstrom)**

- Ladungsträger bewegen sich aufgrund eines äußeren elektrischen Feldes:

$$\vec{J}_F = \vec{J}_{n,F} + \vec{J}_{p,F} = \sigma \vec{E} = [en\mu_n + ep\mu_p] \vec{E}$$

- **2. Diffusionsstrom**

- Ladungsträger bewegen sich aufgrund eines Konzentrationsgradienten ( $D_n$  und  $D_p$  sind die Diffusionskonstanten der Elektronen bzw. Löcher):

$$\vec{J}_D = \vec{J}_{n,D} + \vec{J}_{p,D} \quad \begin{aligned} \vec{J}_{n,D} &= +eD_n \text{grad } n \\ \vec{J}_{p,D} &= -eD_p \text{grad } p. \end{aligned}$$

- **3. Generations- und Rekombinationsprozesse**

- Ladungsträger werden mit der Generationsrate  $g$  generiert und rekombinieren mit der Rekombinationsrate  $r$ .
- Die Raten setzen sich aus verschiedenen Einzelprozesse zusammen:

$$g = g_{\text{phonon}} + g_{\text{opt}} + g_{\text{Rek}} + g_{\text{Auger}} \dots$$

$$r = r_{\text{phonon}} + r_{\text{opt}} + r_{\text{Rek}} + r_{\text{Auger}} \dots$$

# Halbleitergrundgleichungen

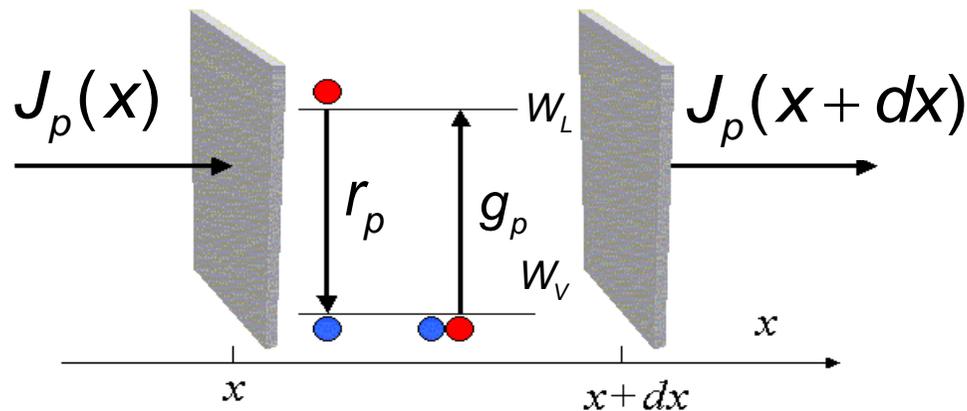
$$(H1) \quad \vec{J}_n = en\mu_n \vec{E} + eD_n \nabla n$$

$$(H2) \quad \vec{J}_p = ep\mu_p \vec{E} - eD_p \nabla p$$

Drift- und  
Diffusion

Wie ändert sich dann die lokale Ladungsdichte

$$\rho = e(p - n) ?$$



$$\frac{\partial(ep)}{\partial t} = -\frac{\partial J_p}{\partial x} + e(g_p - r_p)$$

bzw. in 3D:

$$\frac{\partial(ep)}{\partial t} + \nabla \vec{J}_p = e(g_p - r_p)$$

(Kontinuitätsgleichung)

# Halbleitergrundgleichungen

$$(H1) \quad \vec{J}_n = en\mu_n \vec{E} + eD_n \nabla n$$

$$(H2) \quad \vec{J}_p = ep\mu_p \vec{E} - eD_p \nabla p$$

Drift- und  
Diffusionsgleichung  
für Elektronen und Löcher

$$(H3) \quad \frac{\partial(-en)}{\partial t} + \nabla \vec{J}_n = -e(g_n - r_n)$$

$$(H4) \quad \frac{\partial(ep)}{\partial t} + \nabla \vec{J}_p = e(g_p - r_p)$$

Kontinuitätsgleichungen  
für Elektronen  
und Löcher

...dann fehlt nur noch die Verkopplung von Ladung und E-Feld...

Maxwell-Gleichung:  $\nabla \vec{D} = \nabla \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} = \rho$  bzw. mit  $\vec{E} = -\nabla \varphi$

die Poisson-Gleichung:  $\text{divgrad} \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}$

# Halbleitergrundgleichungen

$$(H1) \quad \vec{J}_n = en\mu_n \vec{E} + eD_n \nabla n$$

$$(H2) \quad \vec{J}_p = ep\mu_p \vec{E} - eD_p \nabla p$$

Drift- und  
Diffusion

$$(H3) \quad \frac{\partial(-en)}{\partial t} + \nabla \vec{J}_n = -e(g_n - r_n)$$

$$(H4) \quad \frac{\partial(ep)}{\partial t} + \nabla \vec{J}_p = e(g_p - r_p)$$

Kontinuitäts-  
gleichungen

$$(H5) \quad \Delta \varphi = -\frac{e}{\epsilon \epsilon_0} (p - n + n_D^+ - n_A^-); \quad \vec{E} = -\nabla \varphi$$

Poisson-  
Gleichung

# Übersicht über die Vorlesung

---

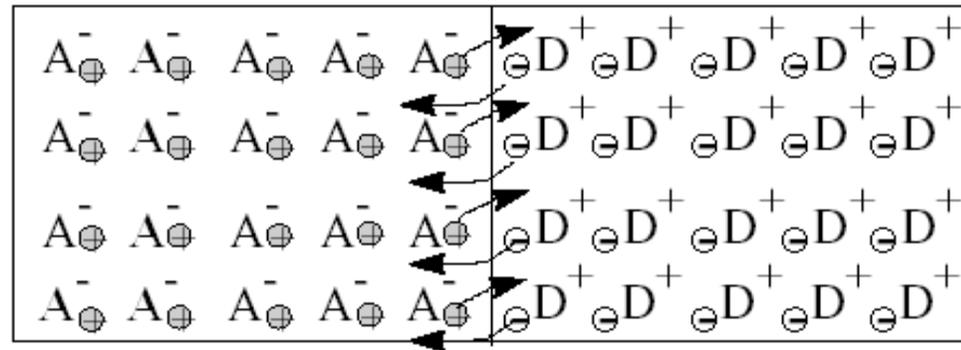
1. **Grundlagen der Quantenmechanik**
2. **Elektronische Zustände**
3. **Vom Wasserstoffatom zum Periodensystem der Elemente**
4. **Elektronen in Kristallen**
5. **Halbleiter**
6. **Quantenstatistik für Ladungsträger**
7. **Dotierte Halbleiter**
8. **Halbleiter im Nichtgleichgewicht**
  - 8.1 Der Driftstrom
  - 8.2 Der Diffusionsstrom
  - 8.3 Generation und Rekombination
  - 8.4 Halbleitergrundgleichungen
9. **Der pn-Übergang**

# Raumladungszone am pn-Übergang

## Diffusionsströme:

- Elektronen diffundieren aus dem n-HL und hinterlassen *positiv* geladene Donatoren.
- Löcher diffundieren aus dem p-HL und hinterlassen *negativ* geladene Akzeptoren.

← p-dotiert → ↔ n-dotiert →

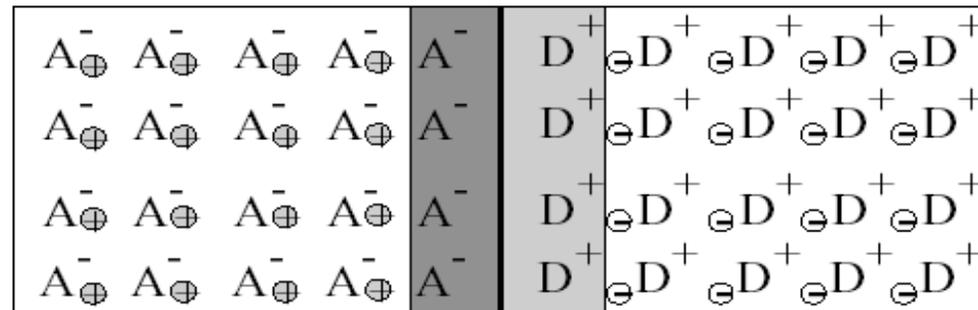


⊕ Loch

⊖ Elektron

## Es bildet sich eine Raumladungszone (RLZ):

- In einer RLZ ist  $\rho \neq 0$ .
- Positive Raumladung  $\rho > 0$  im n-HL.
- Negative Raumladung  $\rho < 0$  im p-HL.



⊕ Loch

⊖ Elektron

negative

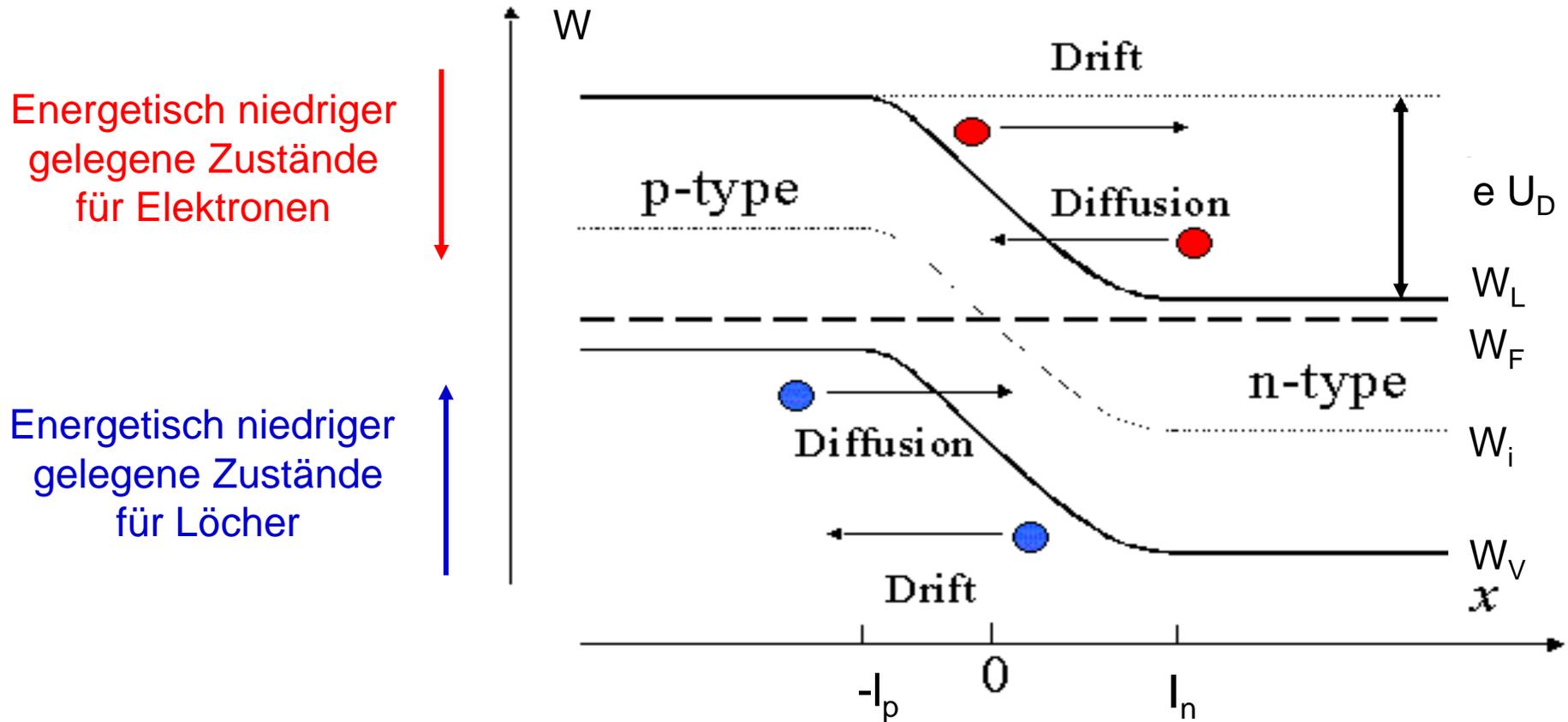
positive

Ladungsdichte

## Durch die neue Ladungsverteilung

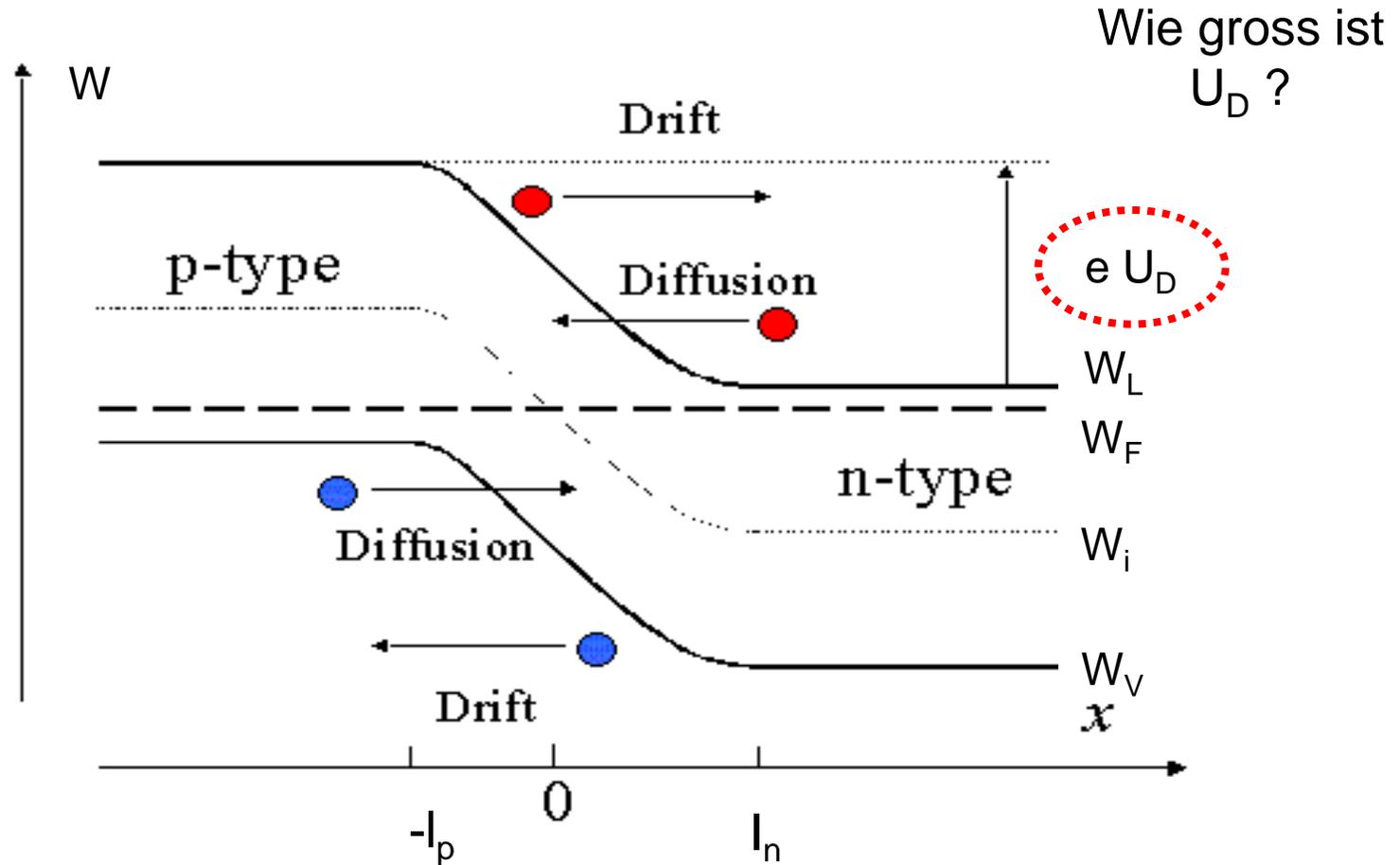
wird ein E-Feld aufgebaut, das einen Driftstrom der Ladungsträger bewirkt, der wiederum dem Diffusionsstrom entgegenwirkt.

# Banddiagramm des pn-Übergangs



- Das  $W(x)$ -Banddiagramm zeigt die erlaubten Zustände der Ladungsträger als eine Funktion der Energie und des Ortes.
- Im Gleichgewicht kompensieren sich Drift- und Diffusionsstrom gerade.

# Diffusionsspannung ?



# Diffusionsspannung $U_D$

---

Die Diffusionsspannung wird ein entscheidender Parameter für die Beschreibung der nichtlinearen Kennlinie einer Diode sein. Ziel ist es nun, die Diffusionsspannung auf die Materialparameter wie Bandlücke und Dotierungsdichten zurückzuführen.

Die Diffusionsspannung ergibt sich aus der energetischen Differenz der Leitungsbandunterkanten weit weg vom pn-Übergang:

$$eU_D = W_L(-\infty) - W_L(\infty)$$

Für die Ladungsträgerdichten weit weg vom pn-Übergang gilt bei *Störstellenerschöpfung*:

$$(1) \quad p_p = N_V \exp\left(-\frac{W_F - W_V(-\infty)}{kT}\right) = n_A$$

$$(2) \quad n_n = N_L \exp\left(-\frac{W_L(\infty) - W_F}{kT}\right) = n_D$$

# Diffusionsspannung $U_D$

Multiplikation von (1) und (2) ergibt:

$$n_A n_D = N_L N_V \exp\left(-\frac{W_L(\infty) - W_V(-\infty)}{kT}\right)$$

Mit  $W_V = W_L - W_G$  folgt:

$$n_A n_D = \underbrace{N_L N_V \exp\left(-\frac{W_G}{kT}\right)}_{=n_i^2 \text{ (gemäß Massenwirkungsgesetz)}} \exp\left(-\frac{W_L(\infty) - W_L(-\infty)}{kT}\right)$$

$\frac{eU_D}{kT}$

Auflösen nach  $U_D$  ergibt:

$$U_D = \frac{kT}{e} \ln\left(\frac{n_A n_D}{n_i^2}\right)$$

Damit ist die Diffusionsspannung auf die intrinsische Ladungsträgerkonzentration und auf die Konzentrationen der Dotieratome (beides Materialparameter) zurückgeführt.

# Diffusionsspannungen

$$U_D = U_T \ln \left( \frac{n_A n_D}{n_i^2} \right)$$

$$U_T = \frac{kT}{e}$$

$$n_i^2(T) = N_L N_V \exp \left( -\frac{W_G}{kT} \right)$$

T = 300 K	Ge	Si	GaAs
$n_i^2 / \text{cm}^{-6}$	$5,8 \cdot 10^{26}$	$2,1 \cdot 10^{20}$	$3,2 \cdot 10^{12}$
$n_A / \text{cm}^{-3}$	$10^{15}$	$10^{15}$	$10^{15}$
$n_D / \text{cm}^{-3}$	$10^{15}$	$10^{15}$	$10^{15}$
$U_D / \text{V}$	0,18	0,56	1,0
$n_A / \text{cm}^{-3}$	$10^{15}$	$10^{15}$	$10^{15}$
$n_D / \text{cm}^{-3}$	$10^{18}$	$10^{18}$	$10^{18}$
$U_D / \text{V}$	0,36	0,73	1,18
$n_A / \text{cm}^{-3}$	$10^{18}$	$10^{18}$	$10^{18}$
$n_D / \text{cm}^{-3}$	$10^{18}$	$10^{18}$	$10^{18}$
$U_D / \text{V}$	0,53	0,90	1,35

- Die Diffusionsspannung hängt nur schwach von der Temperatur ab.
- Die Diffusionsspannung hängt nur schwach von den Dotierungen ab.
- Mit wachsender Dotierung geht

$$U_D \rightarrow E_g / e$$

# Diffusionsspannung

- Die Diffusionsspannung ist nicht an den Enden der p- und n-Zonen messbar !!
  - Meßbar ist nur die Differenz des elektrochemischen Potentials (des Fermi-Niveaus).
  - Dieses ist links und rechts exakt auf dem gleichen Niveau, daher kann keine Spannung abgegriffen werden.
  - Wenn z.B. Metallkontakte aufgesetzt werden zur Spannungsmessung, so bilden sich wieder Diffusionsspannungen, die die eingebaute Spannung gerade kompensieren.

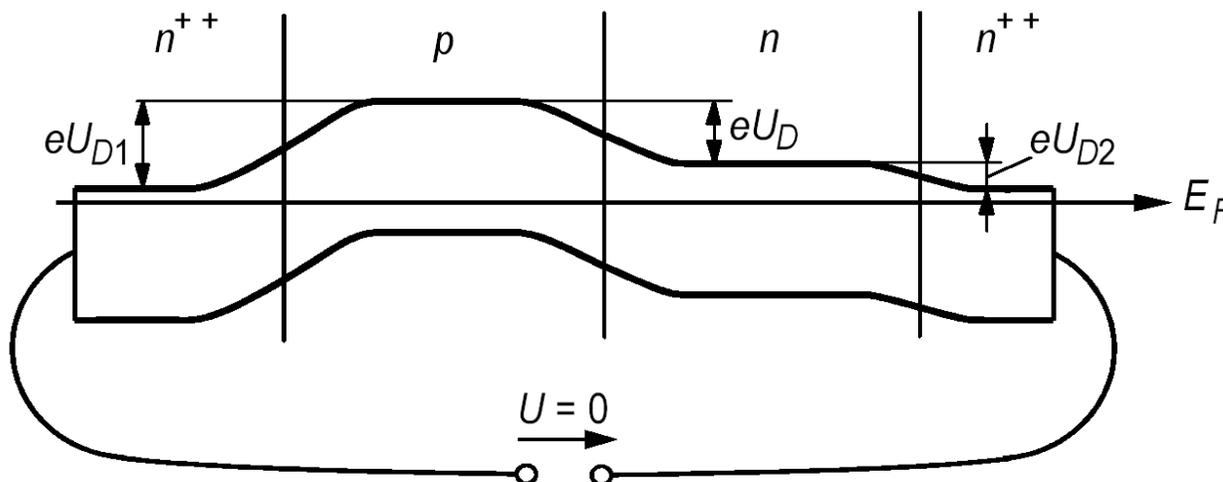


Abb: Spannungsmessung mit zwei  $n^{++}$ -dotierten Bereichen