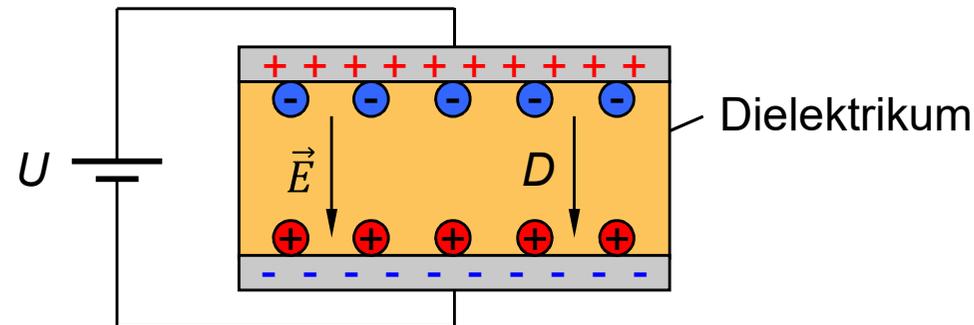


Dielektrika

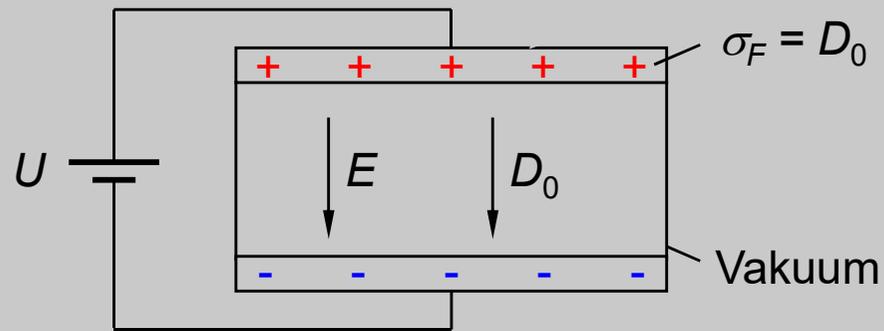
**Woher kommen die Ladungen?
= Was ist Polarisation?**



Plattenkondensator bei konstantem elektrischen Feld

Polarisation im Plattenkondensator

Elektrische Flussdichte im Vakuum

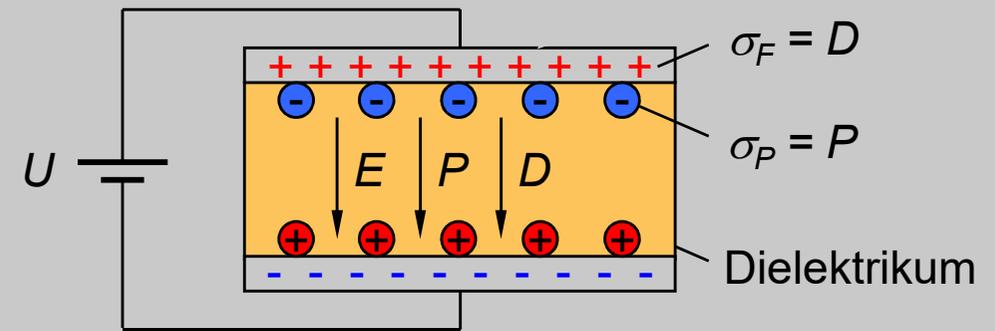


D_0 : El. Flussdichte im Vakuum

σ_F : freie, flächenbezogene Ladung auf den Kondensatorplatten

[Ivers-Tiffée 2007]

El. Flussdichte im Dielektrikum



P : **Polarisation** [As/m²]

σ_P : gebundene, flächenbezogene Polarisationsladung auf der Außenseite des Dielektrikums

$$\vec{D}_0 = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$$

elektrische Feldkonstante
 $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$$

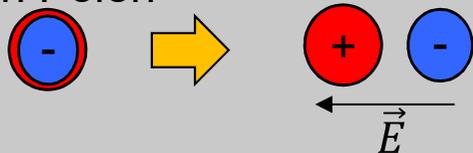
Merke: Dielektrika erzeugen eine Polarisation, die die el. Flussdichte erhöht!

Was heisst nun Polarisation?

Wo finden wir Polarisation in Materie?

Polarisation: eine Bestandsaufnahme

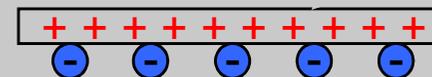
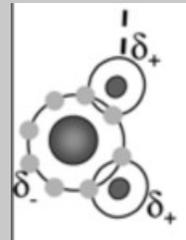
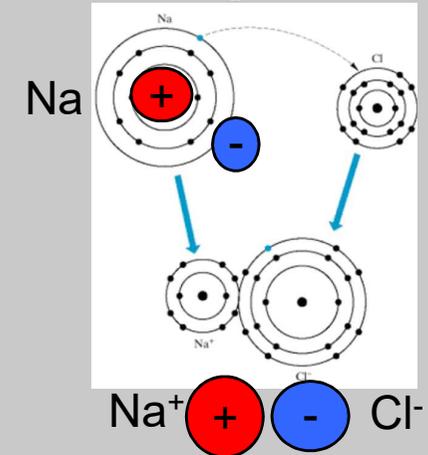
- Wir unterscheiden positive Ladung (+) und negative Ladungen (-)
- Entgegengesetzte Ladungen ziehen sich an, gleiche Ladungen stoßen sich ab (Coulomb-Kräfte)
- Liegen positive und negative Ladung aufeinander, so herrscht Neutralität
- Ausbildung von Polen, wenn + und - örtlich getrennt
- Polarisation = Ausbildung oder Verstärkung von Polen



- **Anlegen von elektr. Feld E führt zur Polarisation!**

Wo finden wir getrennte Ladungen?

- Im Atom
- Bei Ionen
- In Molekülen
- An Grenzflächen



Merke: Es gibt Ladungstrennungen auf untersch. Skalen! \vec{E} verursacht Polarisation!

Polarisationsmechanismen

Grundtypen der dielektrischen Polarisation

Grundtypen

Elektronenpolarisation

Auslenkung von Atomkern und -hülle
(induzierte Dipole)

Ionenpolarisation

Auslenkung von Kationen und Anionen
(induzierte Dipole)

Orientierungspolarisation

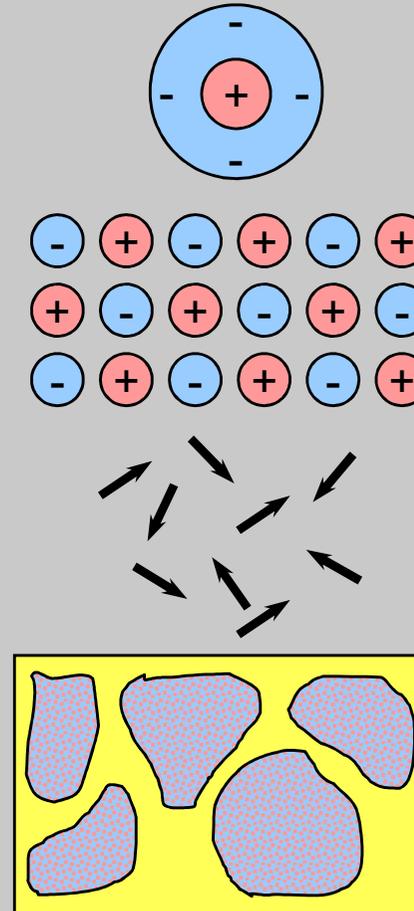
Ausrichtung permanent vorhandener
Dipole

Raumladungspolarisation

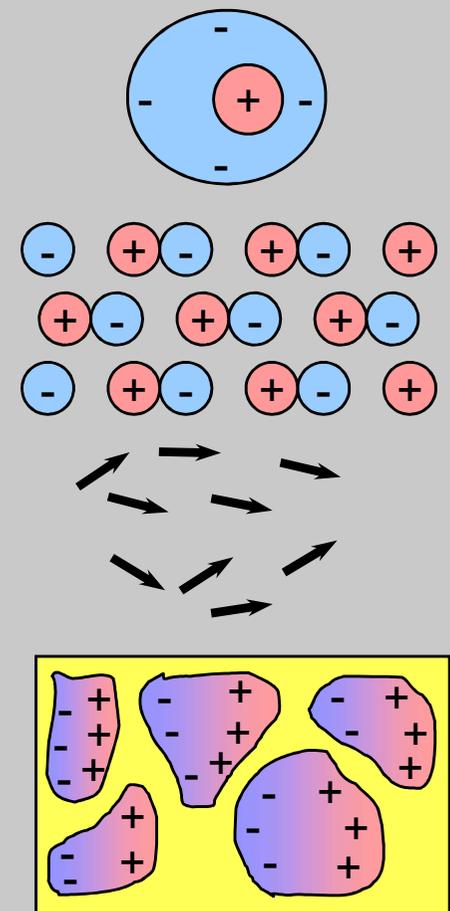
Ansammlung freier Ladungsträgern
an isolierenden Korngrenzen

[Schaumburg 1994]

$E = 0$



$E > 0$



Dielektrizitätszahl und Suszeptibilität

Auswirkung versch. Polarisationsmechanismen auf el. Flussdichte

El. Flussdichte in Materie (allg.)

$$D = \varepsilon_0 \cdot E + P$$

In linearer Materie sind **Feldstärke und Polarisation proportional**

$$P = \varepsilon_0 \cdot \chi_e \cdot E$$

χ_e : elektrische Suszeptibilität [-]

Daher gilt $D = \varepsilon_0 \cdot (1 + \chi_e) \cdot E$

Definition: relative Dielektrizitätszahl

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$$

⇒ $\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E}$ in linearer Materie

Da sich Polarisation der unterschiedlichen Ebenen summiert:

$$P = \sum P_i$$

können wir auch elektrische Suszeptibilitäten addieren:

$$\chi_e = \underbrace{\chi_{el} + \chi_{ion}}_{\text{unpolare/ polare Dielektrika}} + \chi_{or} + \chi_{RL}$$

unpolare/ polare Dielektrika

χ_{el} : Elektronenpolarisation

χ_{ion} : Ionenpolarisation

χ_{or} : Orientierungspolarisation

χ_{RL} : Raumladungspolarisation

Merke: Über die Suszeptibilität lassen sich versch. Polarisationsbeiträge addieren!

Noch ein paar Grundlagen: In welche Richtung weist \mathbf{P} ? Wie kommen wir vom mikroskopischen Verständnis zum makroskopischen \mathbf{P} ?

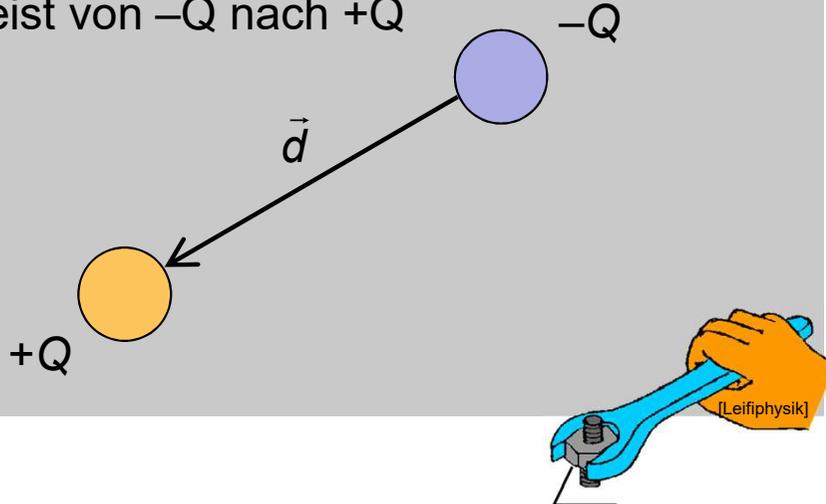
Elektrisches Dipolmoment \mathbf{p}

(mikroskopisch, z.B. einzelnes Molekül/Atom)

Das Moment eines elektrischen Dipols \mathbf{p} ist definiert als Produkt aus Ladung und Abstand d , um den die Ladungen Q verschoben sind.

$$\vec{p} = |Q| \cdot \vec{d} \quad [p] = \text{As m}$$

\vec{p} weist von $-Q$ nach $+Q$



Analogie Mechanik: Drehmoment = Länge x Kraft

Polarisierbarkeit α

(mikroskopisch)

In einfachen Fällen ist das Dipolmoment proportional zur Feldstärke, die am Ort des Dipols wirkt. (analog zu $\mathbf{P} = \epsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \mathbf{E}$)

$$\vec{p} = \alpha \cdot \vec{E} \quad [\alpha] = \text{As m}^2 \text{V}^{-1}$$

Polarisation \mathbf{P}

(makroskopisch)

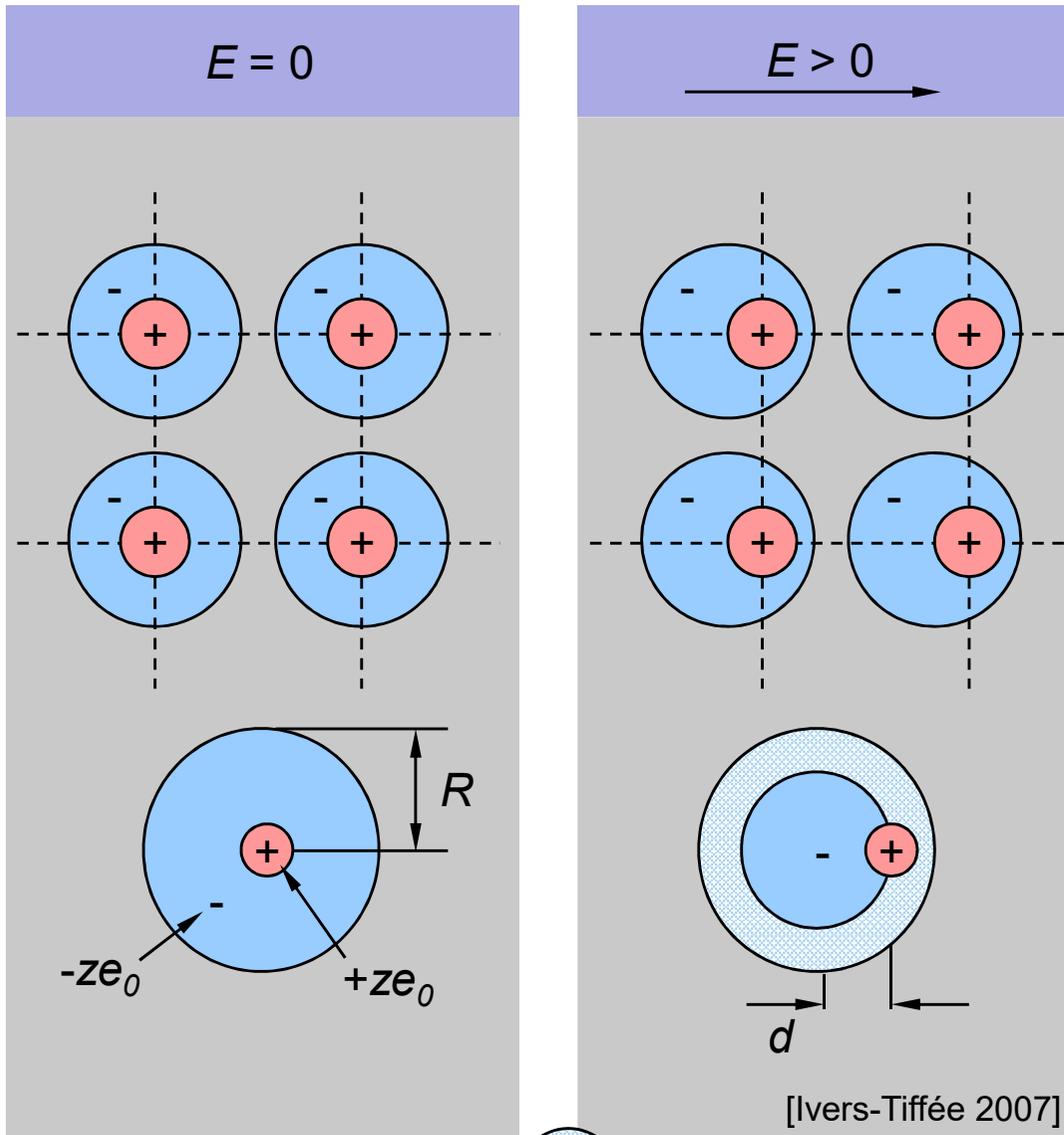
Die Polarisation \mathbf{P} ist definiert als Summe der Dipolmomente pro Volumen.

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \frac{N}{V} \cdot \vec{p} = n \cdot \vec{p} \quad [\vec{P}] = \text{As m}^{-2}$$

\vec{p} : mittleres Dipolmoment pro Volumen V [As m]
 n : Konzentration der Dipole [m^{-3}]

Polarisationsmechanismen

Elektronenpolarisation: Prinzip und Ladungsverschiebung



Das elektrische Feld E verursacht entgegengesetzt gerichtete Kräfte auf Atomkern ($+ze_0$) und -Hülle ($-ze_0$)

⇒ Ladungsverschiebung um d

Kräftebilanz el. Kraft vs. Coulombkraft

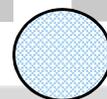
$$F_1 = ze_0 \cdot E = F_2 = \frac{Q_+ Q_-}{4\pi\epsilon_0 d^2}$$

mit $Q_+ = z e_0$

$$Q_- = \rho V = \frac{z e_0}{\frac{4}{3} \pi R^3} \cdot \frac{4}{3} \pi d^3 = z e_0 \frac{d^3}{R^3}$$

Relevantes Ladungsdichte Volumen der Hülle gesamt Hülle für Polarisation

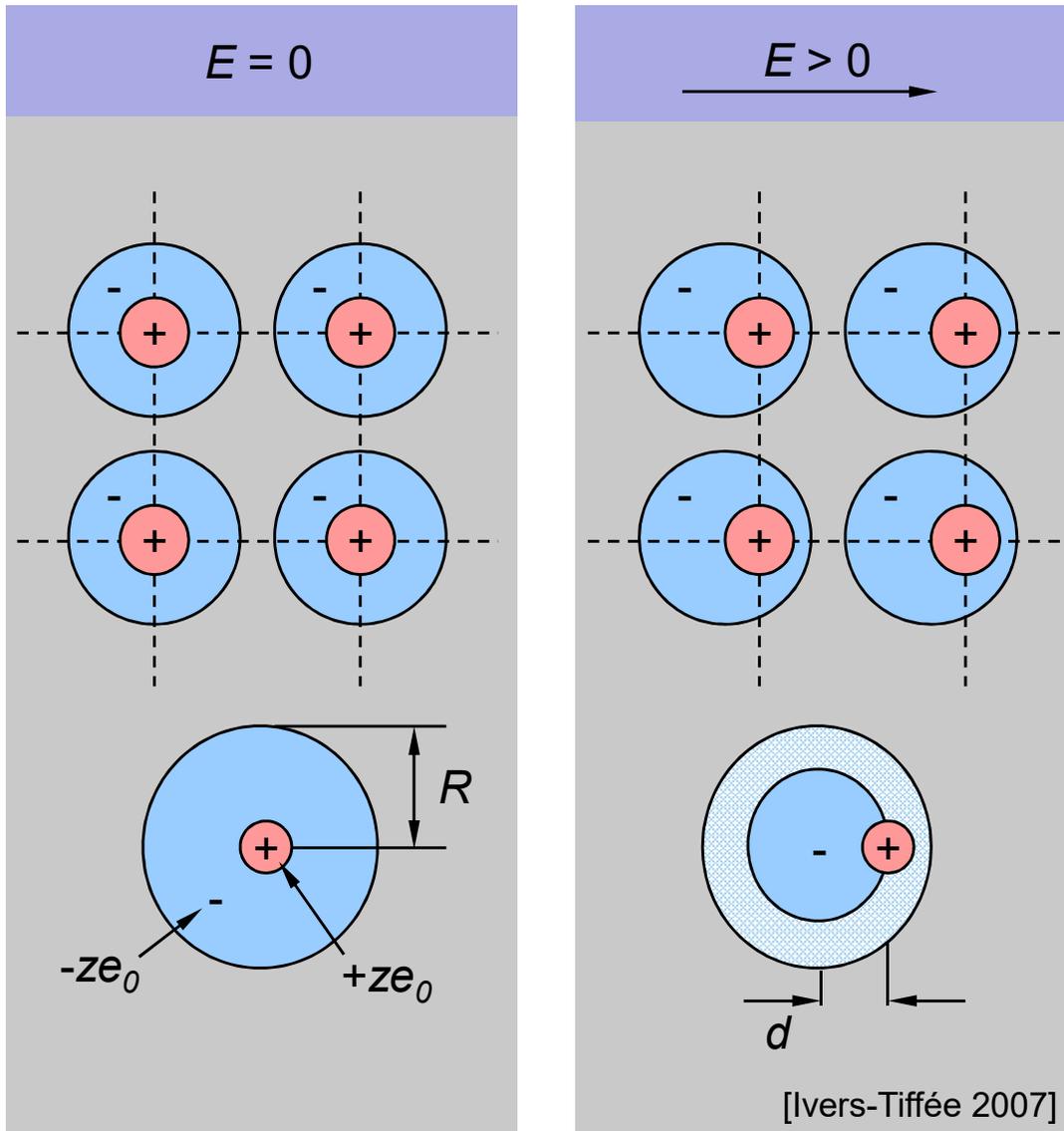
$$\Rightarrow ze_0 \cdot E = \frac{z^2 e_0^2 d}{4\pi\epsilon_0 R^3} \Rightarrow d \text{ berechenbar } (<< 1 \text{ pm!})$$



$d < r < R$: Bereich der Elektronenwolke ohne Effekt auf Rückstellkraft

Polarisationsmechanismen

Elektronenpolarisation: resultierender Effekt



⇒ Ladungsverschiebung um d

Induziertes Dipolmoment

(mikroskopisch)

$$p = z \cdot e_0 \cdot d = 4\pi\epsilon_0 \cdot R^3 \cdot E = \alpha_{el} \cdot E$$

Polarisierbarkeit α_{el} des Einzelatoms

Elektronische Suszeptibilität

(makroskopisch)

$$\text{Mit } \vec{P} = \epsilon_0 \chi_{el} \vec{E} = n \cdot \vec{p} = n \alpha_{el} \vec{E}$$

folgt der makroskopische Effekt:

$$\chi_{el} \approx \frac{n \cdot \alpha_{el}}{\epsilon_0} = 4\pi \cdot n \cdot R^3 \quad \text{bzw.}$$

$$\chi_{el} = \sum_i 4\pi \cdot n_i \cdot R_i^3$$

n_i : Dichte der Atom-/ Molekülsorte i

Merke: Die Polarisierbarkeit eines Einzelatoms ist nur von dessen Radius abhängig.

Polarisationsmechanismen

Elektronenpolarisation bei Gasen

Edelgase
(1 bar, 20 °C)

χ_e

Helium (He)	$6,88 \cdot 10^{-5}$
Neon (Ne)	$13 \cdot 10^{-5}$
Argon (Ar)	$55 \cdot 10^{-5}$
Krypton (Kr)	$77 \cdot 10^{-5}$
Xenon (Xe)	$124 \cdot 10^{-5}$

[Ivers-Tiffée 2007]

Molekülgase
(1 bar, 20 °C)

χ_e

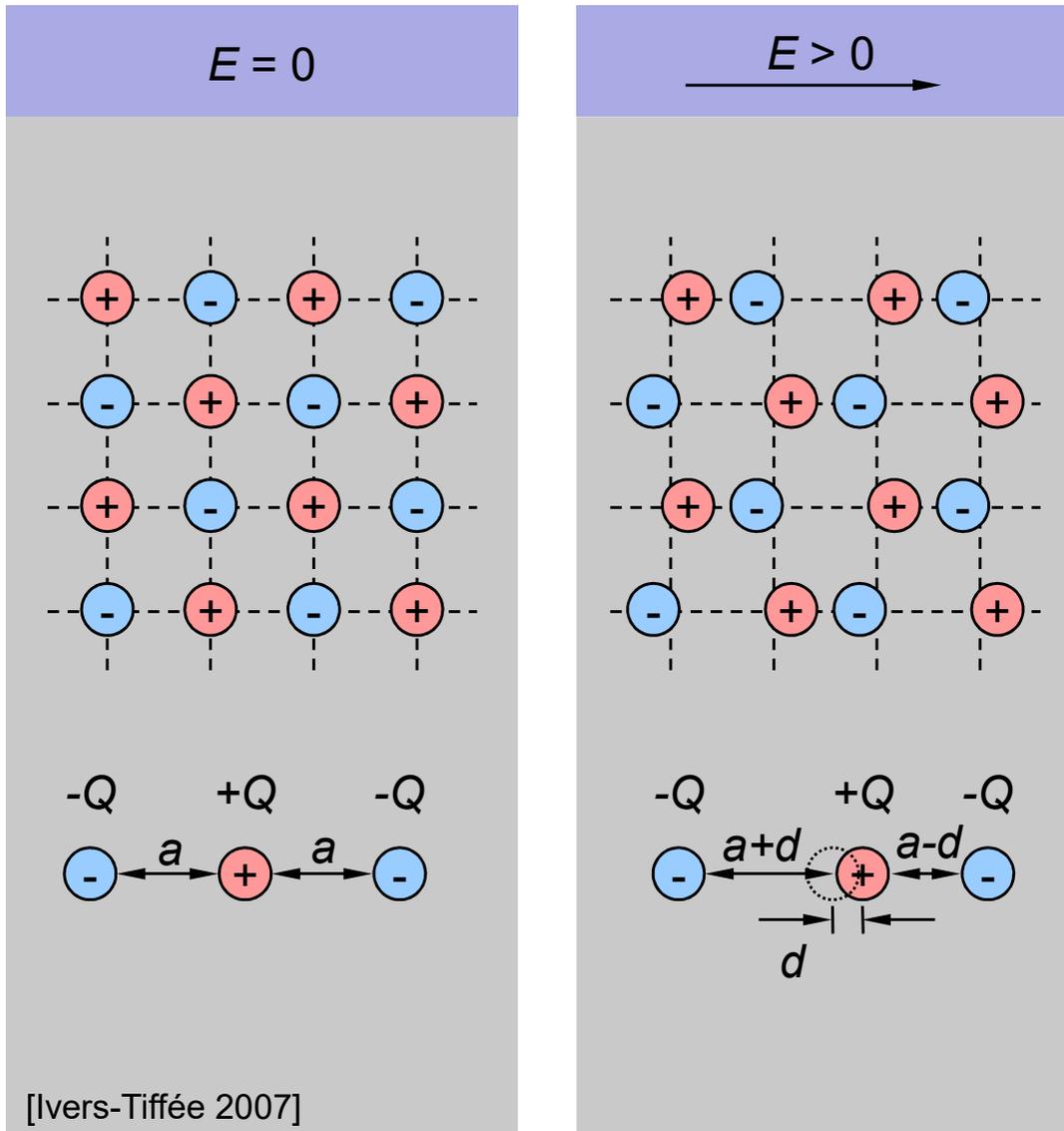
Wasserstoff (H ₂)	$26 \cdot 10^{-5}$
Sauerstoff (O ₂)	$52 \cdot 10^{-5}$
Stickstoff (N ₂)	$58 \cdot 10^{-5}$
Kohlendioxid (CO ₂)	$98 \cdot 10^{-5}$
Schwefelhexafluorid (SF ₆)	$205 \cdot 10^{-5}$

[Münc 1987]

Merke: der Anteil der Polarisation durch Elektronenpolarisation an D ist meist extrem gering!
Für Gase: $\varepsilon \approx \varepsilon_0$

Polarisationsmechanismen

Ionenpolarisation



- In einem Ionenkristall lenkt das elektrische Feld E Kationen ($+Q$) und Anionen ($-Q$) in entgegengesetzte Richtung aus.
- Im Gleichgewicht ist elektrische Kraft gleich Rückstellkraft (Ladungsverschiebung um d)

$$Q \cdot E = k \cdot d$$

Konstante k [As V/m^2]: f(Kristallstruktur, Gitterabstand, Bindungsenergie, etc.)

Analogie: Rückstellkraft einer Feder

Induziertes Dipolmoment

$$p = \frac{Q}{2} \cdot (a + d - (a - d)) = \frac{Q^2}{k} \cdot E = \alpha_{ion} \cdot E$$

Ionische Suszeptibilität

$$\chi_{ion} \approx \frac{nQ^2}{\epsilon_0 k} \text{ bzw. } \chi_{ion} \approx \sum_i \frac{n_i Q_i^2}{\epsilon_0 k_i}$$

(n_i : Dichte der Atom-/ Molekülsorte i)

Merke: Jedes Ion ist Teil von 2 Dipolen, d.h. nutze $Q/2$ pro Dipol

Polarisationsmechanismen

Vergleich ionischer und elektronischer Polarisation

Alkali-Halogenide (I/VII-Verbindungen)

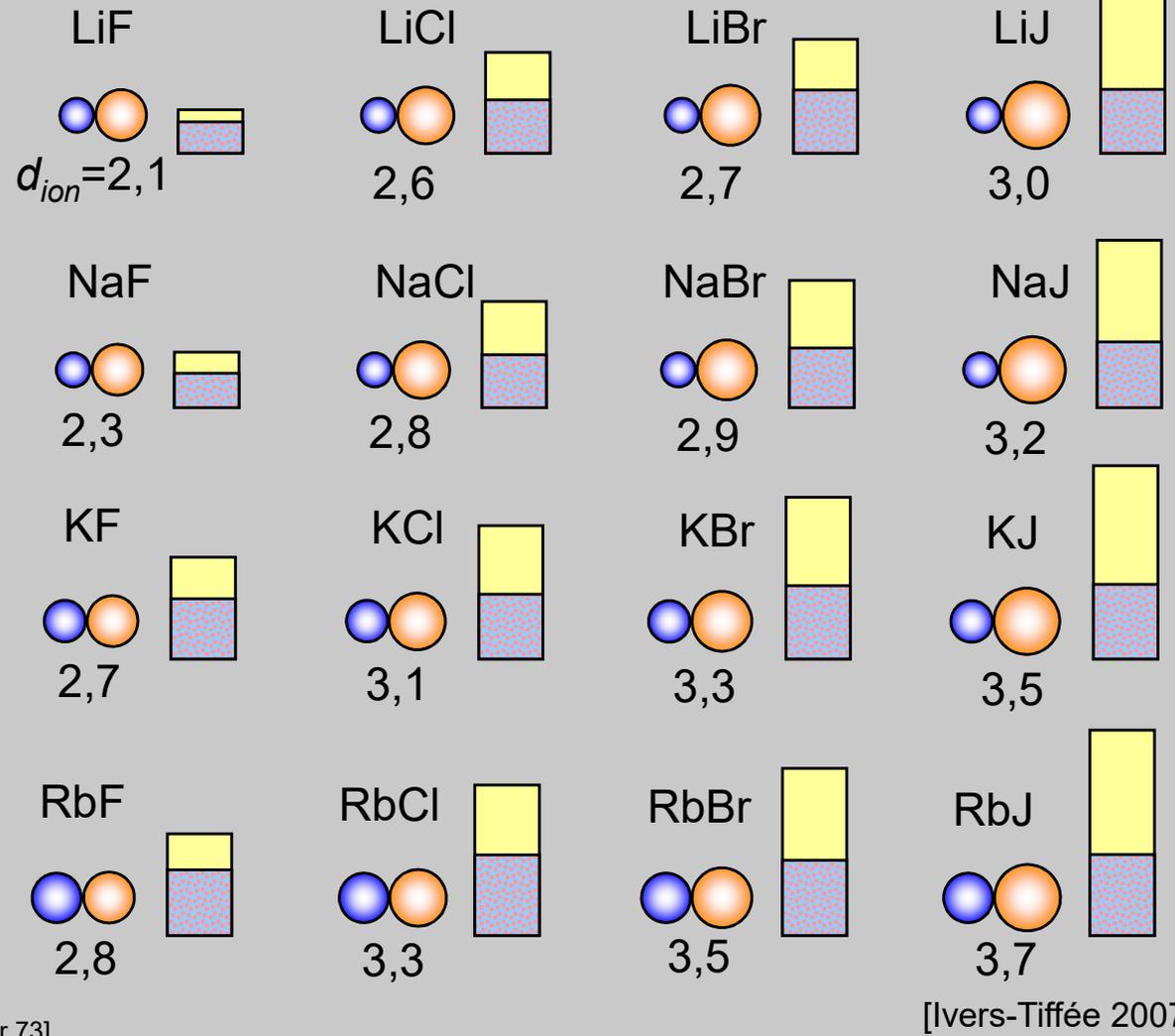
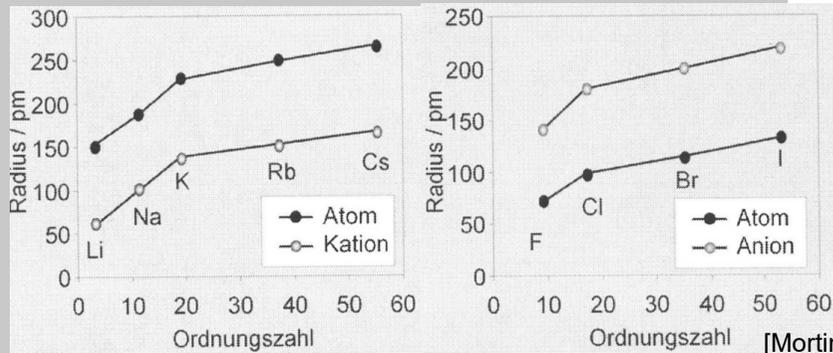
Kation (positiv)

Anion (negativ)

α_{el}
 α_{ion} } Polarisierbarkeit

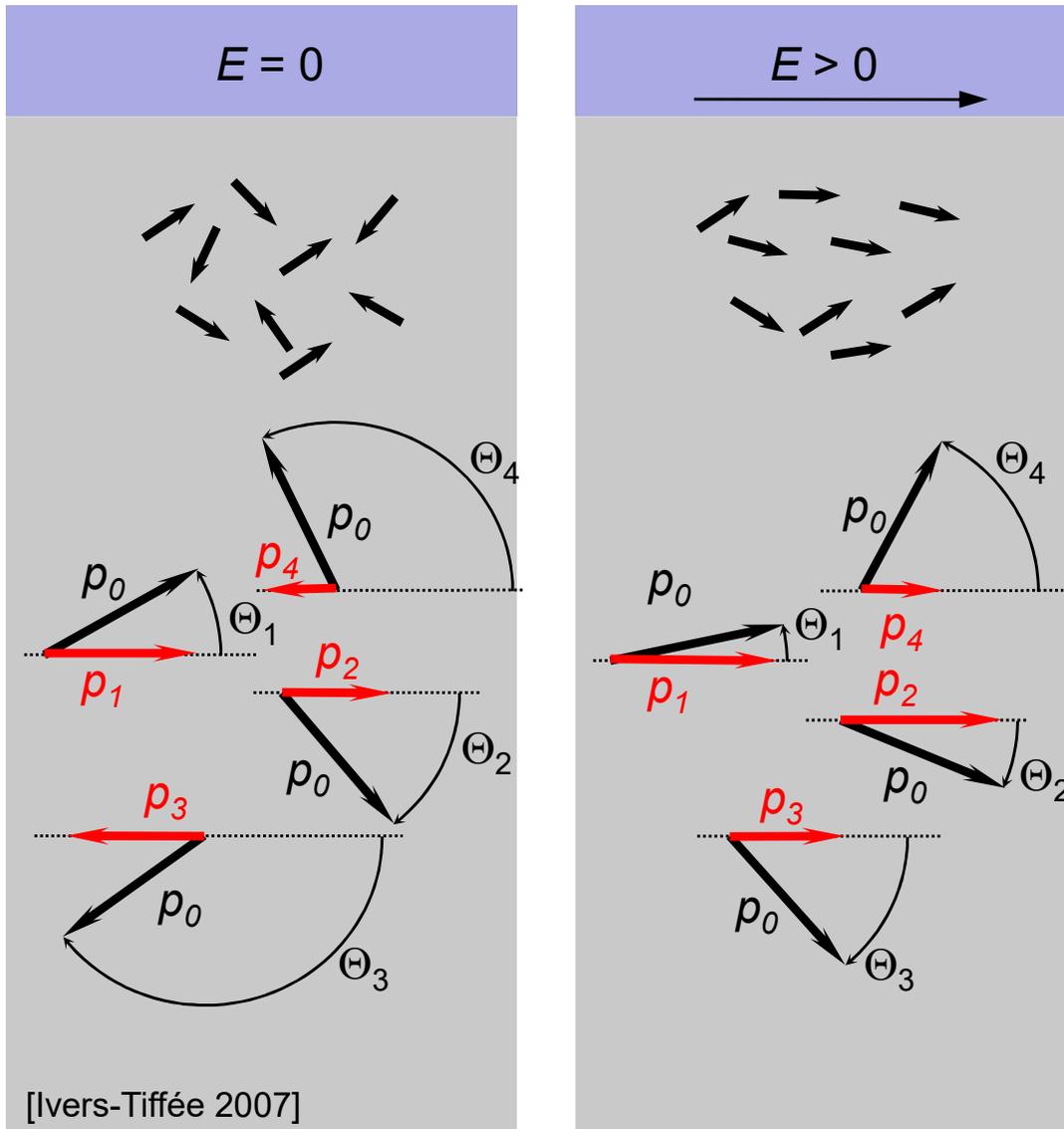
d_{ion} : Ionenabstand in 10^{-10} m

Merke: $\alpha_{el} \sim R^3$
 $\alpha_{ion} \sim d_{ion}$

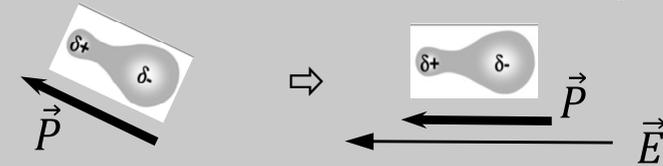


Polarisationsmechanismen

Orientierungspolarisation für polare Dielektrika



Bei polaren Dielektrika werden permanente Dipole im elektrischen Feld E ausgerichtet:



Dipolmoment in Feldrichtung

$$p_i = p_0 \cdot \cos \theta_i \quad (p_0: \text{molekularer Dipol})$$

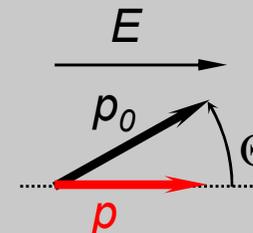
Polarisation

$$P = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N p_i = \frac{N}{V} \cdot \bar{p} = n \cdot p_0 \cdot \overline{\cos \theta}$$

N : Anzahl der Dipole

\bar{x} : Mittelwert

n Dipoldichte, Dipole pro Volumen



Merke: bei $\vec{E} = 0$ richten sich Moleküle mit permanentem Dipol, z.B. fl. Wasser, so aus, dass $\vec{P} = 0!$

Polarisationsmechanismen

Verteilungen der Orientierungspolarisation

Wie groß ist Mittelwert $\overline{\cos \Theta}$ in $P = n \cdot p_0 \cdot \overline{\cos \Theta}$?!?

Potentielle Energie eines Dipols

$$W_P = -p_0 \cdot \cos(\Theta) E$$

- minimal bei $\theta = 0$, $\vec{E} \parallel \vec{p}_0$
- maximal bei $\theta = \pi$, $\vec{E} \parallel -\vec{p}_0$

Thermische Energie vs. Potentielle Energie

Die thermische Bewegung der Dipole wirkt der Ausrichtung durch das elektrische Feld E entgegen \Rightarrow mit steigender Temperatur werden die Dipole weniger stark ausgerichtet.

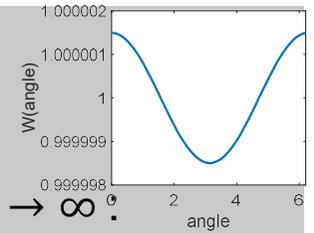
Beschreibung der Häufigkeit des Winkels durch Boltzmannverteilung:

$$f(\Theta) \sim \exp\left(-\frac{W_P}{kT}\right) = \exp\left(\frac{p_0 E}{kT} \cos(\Theta)\right)$$

Eigenschaften der Verteilung

Molekulare Dipole sind in allen Θ gleichverteilt für $E=0$, $p_0=0$ oder $T \rightarrow \infty$.

$$f(\Theta, E = 0 | p_0 = 0 | T \rightarrow \infty) = \text{const}$$



Lösung

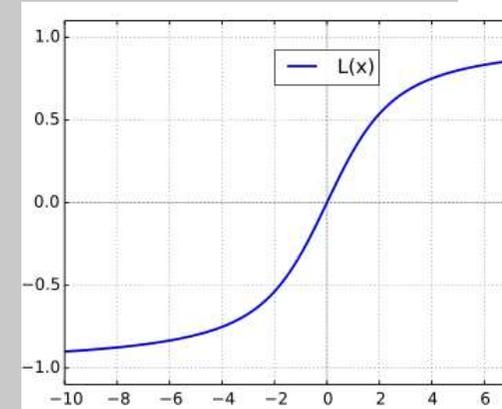
Die Polarisation errechnet sich aus der Mittelwertbildung über alle Raumwinkel anhand der Verteilung $f(\Theta)$ mit:

$$P = np_0 \cdot \frac{\int_1^{-1} \cos(\theta) \cdot f(\theta) d \cos(\theta)}{\int_1^{-1} f(\theta) d \cos(\theta)}$$

$$= n \cdot p_0 \cdot \left[\coth(\beta) - \frac{1}{\beta} \right]$$

Langevin-Funktion $L(\beta)$

$$\text{mit } \beta = \frac{p_0 E}{kT}$$



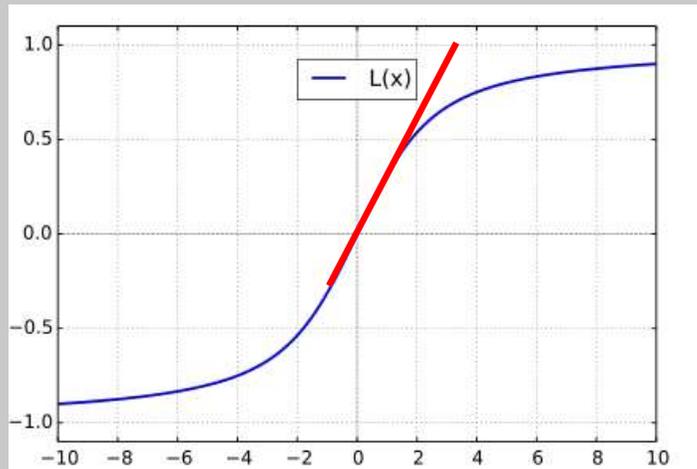
Vgl: Besetzungswahrsch. Leitungsband mittels Boltzmannverteilung: $f(W_F, T) = \exp\left(-\frac{W-W_F}{kT}\right)$

Langevin-Funktion $L(\beta)$

$$P = n \cdot p_0 \cdot \underbrace{\left[\coth(\beta) - \frac{1}{\beta} \right]}_{L(\beta)} \quad \text{mit } \beta = \frac{p_0 E}{kT}$$

für $\beta \ll 1$ gilt näherungsweise $L(\beta) \approx \frac{\beta}{3}$

In technisch relevanten Fällen ist die Näherung erfüllt, da $p_0 E \ll kT$ gilt.



Für diese Fälle ergibt sich für die **Polarisation** die sogenannte Langevin-Debye-Gleichung:

$$P \approx n \alpha_{or} E$$

mit der mittleren Polarisierbarkeit

$$\alpha_{or} \approx \frac{p_0^2}{3kT}$$

Und **Suszeptibilität**

$$\chi_{or} \approx \frac{n \cdot p_0^2}{3kT \cdot \epsilon_0}$$

Fazit:

Orientierungspolarisierungseffekte

- nehmen stark ab mit Temperatur,
- nehmen zu mit p_0 !

Polarisationsmechanismen

Atomare Dipolmomente einiger Moleküle mit Orientierungspolarisation

Molekül	Dipolmoment $p_0 / 10^{-30} \text{ As}\cdot\text{m}$
Kohlenmonoxid (CO)	0,3
Schwefelwasserstoff (H ₂ S)	3,2
Chlorwasserstoff (HCl)	3,8
Ammoniak (NH ₃)	4,9
Schwefeldioxid (SO ₂)	5,4
Ethanol (C ₂ H ₅ OH)	5,6
Wasser H ₂ O	6,2

Einheit des Dipolmoment: $3,33 \cdot 10^{-30} \text{ As}\cdot\text{m} = 1 \text{ Debye}$

Merke: auch Kristallgitter können Dipole haben und sich ausrichten!



Polarisationsmechanismen

Raumladungspolarisation

Raumladungspolarisation tritt in polykristallinen oder Verbundwerkstoffen (Komposite) auf. Voraussetzung sind leitfähige Körner und (dünne) isolierende Korngrenzen.

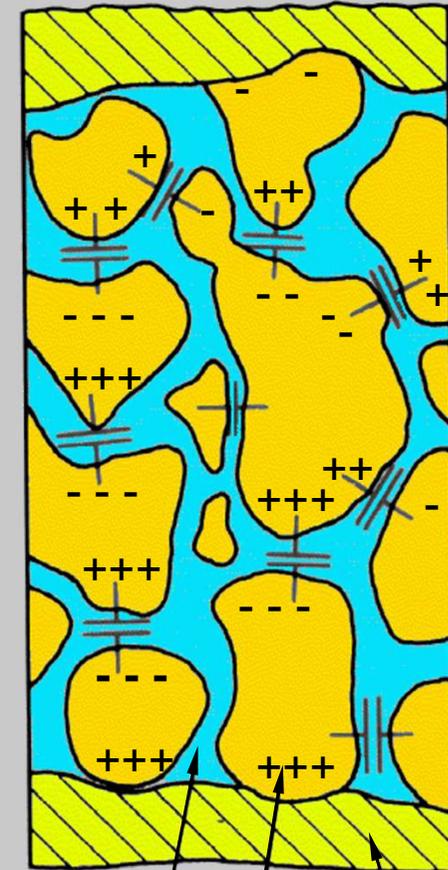
Bsp. BaTiO₃

$$\text{Kapazität } C = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$

Mikrokondensatoren: Große Fläche A , dünnes Dielektrikum d (in der Größenordnung der Korngrenzdicke)

➔ Raumladungs-Polarisation
 ϵ_{eff} bis zu 10^5
höchste Kapazitätswerte pro Volumen

[Hering 1994]



Sperrschicht Kontaktierung leitende Zone

Beispiele für Dielektrizitätskonstanten

Werkstoff	Bestandteile	ϵ_r (1 bar, 20 °C)	χ_e
Diamant	C	5,6	χ_{el}
Silizium	Si	11,9	χ_{el}
Germanium	Ge	16,2	χ_{el}
Polystyrol, PE		2 ... 2,5	$\chi_{el} + \chi_{ion}$
PVC, Polyester		2,5 ... 6	$\chi_{el} + \chi_{ion} + \chi_{or}$
Technische Gläser	SiO ₂ + Metalloxide	3,5 ... 12	$\chi_{el} + \chi_{ion}$
Elektroporzellan	SiO ₂ , Al ₂ O ₃ , MgO	4 ... 6,5	$\chi_{el} + \chi_{ion}$
Korund	Al ₂ O ₃	8,5 (\perp) / 10,5 (\parallel)	$\chi_{el} + \chi_{ion} + \chi_{or}$
Rutil	TiO ₂	90 (\perp) / 170 (\parallel)	$\chi_{el} + \chi_{ion} + \chi_{or}$

Tabelle 4.1 Dielektrizitätszahlen einiger fester Stoffe (\parallel , \perp zur c-Achse des Kristallgitters)
[Münch1987]

Lokale Feldstärke

Wie wirken lokale Polarisationsphänomene auf das Feld?

Lokale Feldstärke \vec{E}_{lok}

= das elektrische Feld, welches

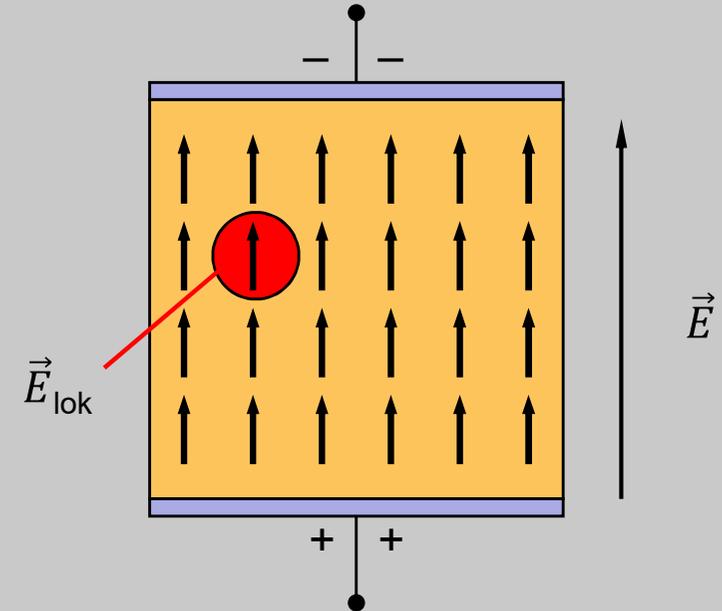
- **innerhalb** der Materie wirkt und
- diese auf **atomarer Ebene** polarisiert.

= von außen angelegtes Feld

+ Feld, das durch atomare Dipole erzeugt wird

Fragen:

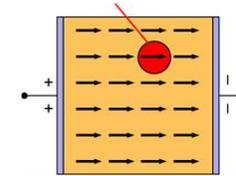
- Wie wirken das äußere Feld, die Dipole außerhalb und innerhalb des betrachteten Bereichs?
- Wie stark sind sie und was bleibt für die lokale Feldstärke?



\vec{E}_{lok} : lokale elektrische Feldstärke
 \vec{E} : makroskopische/ äußere Feldstärke

Lokale Feldstärke

Zusammensetzung der (äußeren) Feldstärke E



Makroskopisch betrachtet besteht das elektrische Feld im Dielektrikum aus 2 Feldern:

- makroskopisches, **durch äußere Ladungen** (an Platten) im Vakuum erzeugtes Feld E_0
- Durch **Polarisationsgrenzschicht** an Plattenoberflächen induziertes Feld E_{pol}

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{pol}$$

<0

Das Dielektrikum schwächt also das zwischen den Platten wirkende Feld ab!

Damit schwächt sich auch die Spannung ab!

Bedeutung:

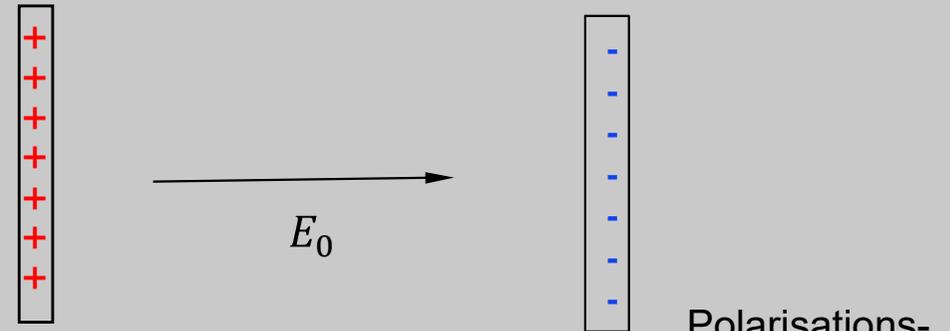
Für die Speicherung derselben Ladung Q benötigt ein Kondensator mit Dielektrikum weit weniger Spannung!

$$Q = C_0 U_0 = C_0 E_0 d = C U = C E d$$

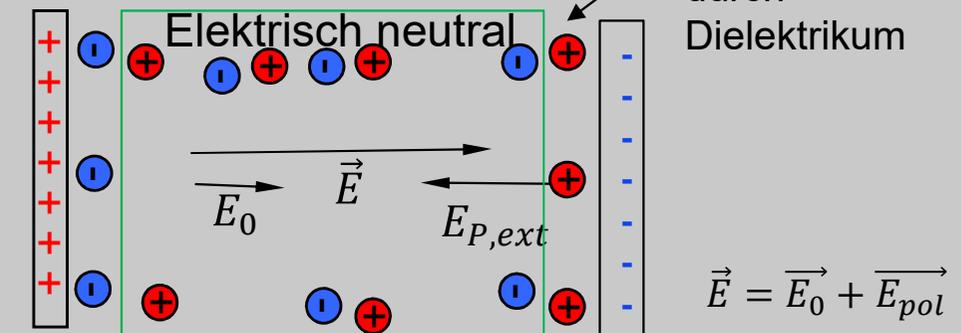
$$C \sim \epsilon_0 \epsilon_r \rightarrow \epsilon_{r,H2O}=80 \quad \begin{matrix} \text{x80} \uparrow \\ \downarrow \text{x1/80} \end{matrix}$$

Äußeres Feld

Ohne Dielektrikum

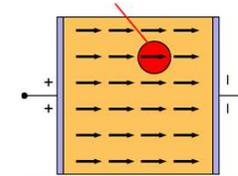


Mit Dielektrikum



Lokale Feldstärke

Komponenten der lokalen Feldstärke für Festkörper



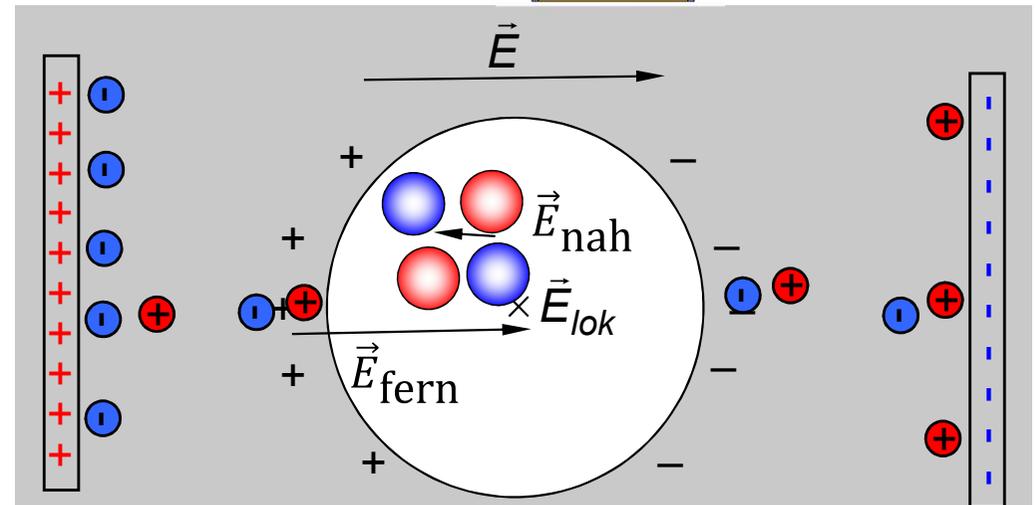
Mikroskopisch wechselwirken innere Felder durch lokale Polarisation mit äußerem Feld E !

Analyse von Lorentz an Kugel:

Betrachtet wird ein Raum, der durch Herausschneiden einer Kugel um einen beliebigen Punkt im Festkörper entsteht. In Mittelpunkt x setzt sich die lokale Feldstärke aus drei Teilfeldern zusammen:

- makroskopisches, **durch äußere Ladungen** (an Platten) erzeugtes Feld E
- elektrisches Nahfeld E_{nah} , induziert durch **Dipole im Kugelhohlraum**
- elektrisches Fernfeld E_{fern} der **induzierten Dipole im Dielektrikum außerhalb Kugel** (ungleichmässig polarisierte Kugeloberfläche)

$$\vec{E}_{lok} = \vec{E} + \vec{E}_{fern} + \vec{E}_{nah}$$



Lorentz berechnet \vec{E}_{lok} für Kugelgeometrie

mit \vec{E}_{nah} für kubisch **symmetrische** Gitter:

$$\vec{E}_{nah} \rightarrow 0 \quad \vec{E}_{fern} = \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \text{ Lorentzfeld}$$

$$\vec{E}_{lok} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} = \vec{E} + \frac{\chi\vec{E}}{3}$$

[Fasching 1994]

Fazit: Lokale Feldstärke einer Kugel ist durch polarisierte Umgebung $\chi/3$ höher!

Bedeutung der lokalen Feldstärke für Polarisierungseffekte

Frage: wenn $\vec{E}_{lok} > \vec{E}$, was heisst das für Berechnung der Polarisierungseffekte, die wir bisher NUR auf E bezogen haben? Bsp. $P_{or} \approx n \alpha_{or} E$

Für die Polarisierung des **Festkörpers** gilt:

$$P = n\alpha \cdot E_{lok} = n\alpha \cdot \left(E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right)$$

↑
lokales Feld nach Lorentz einsetzen

nach P auflösen ergibt: $P = n\alpha \cdot \left(1 - \frac{n\alpha}{3\epsilon_0} \right)^{-1} \cdot E$

Koeffizientenvergleich mit $P = \epsilon_0 \cdot (\epsilon_r - 1) \cdot E$
ergibt die Clausius-Mossotti-Beziehung

$$\frac{n\alpha}{3\epsilon_0} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{n\alpha}{3\epsilon_0} = \frac{\chi_e}{\chi_e + 3}$$

Für kleine Suszeptibilitäten ($\chi_e \ll 3$) gilt:

$$\chi_e = \epsilon_r - 1 = \frac{n}{\epsilon_0} \cdot \alpha$$

Merke:

- Es gibt diverse molekulare Polarisierungseffekte
- Übergang von molekularen Dipolmomenten auf makroskopische Polarisierung P benötigt lokales Feld! (s. C-Mossotti-Beziehung)
- Für geringe Polarisierung (z.B. unpolare Polymere): E statt E_{lok} nutzbar