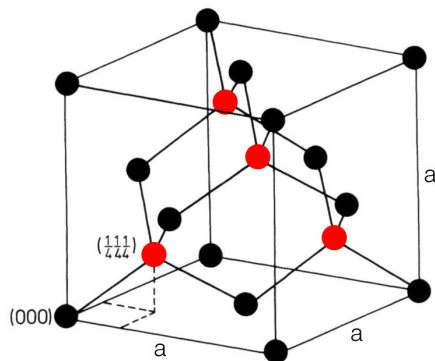


1. Silizium

- (a) Skizzieren und benennen Sie die Kristallstruktur von Silizium. [2P]



Silizium kristallisiert in einer fcc-Struktur (face centered cubic = kubisch flächenzentriert) mit einer 2-atomigen Basis.

- (b) Wie läßt sich die Kristallstruktur experimentell überprüfen? [1P]

Bestrahlt man einen Kristall mit Licht der Wellenlänge λ , so treten entsprechend der Bragg'schen Streu-Bedingung

$$2d \sin \alpha = m\lambda$$

Reflexionen auf. Jede Kristallstruktur hat dabei ihr typisches Reflexions-Muster.

- (c) Skizzieren Sie die vereinfachte Bandstruktur $E(k)$ von Silizium. [1P]

...

Bei Silizium handelt es sich um einen indirekten Halbleiter.

- (d) Betrachten Sie einen mit Phosphor dotierten Silizium-Kristall. Zeigen Sie, daß bei Raumtemperatur quasi alle Störstellen ionisiert sind. Die Bandlücke von Silizium betrage 1,1 eV. Die Störstellen liegen 0,044 eV von der Leitungsbandkante entfernt. (Die effektive Masse der Löcher entspreche der effektiven Masse der Elektronen.) [2P]

Der Anteil der ionisierten Störstellen berechnet sich zu

$$\frac{n_D^+}{n_D} = \frac{1}{1 + 2 \exp \frac{E_F - E_D}{k_B T}}$$

Unter der Annahme, daß $E_F \approx E_{gap}/2$, und $k_B T = 25 \text{ meV}$ bei Raumtemperatur ergibt sich

$$\frac{n_D^+}{n_D} \approx 1$$

- (e) Das Potential $E(k) = 1 \text{ eV} \cdot (2 + \cos(\frac{ka}{2}))$ beschreibt näherungsweise einen Teil des Leitungsbandes von Silizium. Bestimmen Sie die effektive Masse und die Geschwindigkeit der Elektronen bei $k = 0$ in Abhängigkeit von der Gitterkonstanten a . [2P]

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{\hbar} \cdot \frac{\partial E}{\partial k} = -\frac{a \cdot 1 \text{ eV}}{2\hbar} \cdot \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \\ m_{eff} &= \frac{\hbar^2}{\frac{\partial^2 E}{\partial k^2}} = -\frac{4\hbar^2}{a^2 \cdot 1 \text{ eV}} \cdot \cos\left(\frac{ka}{2}\right) \\ v(0) &= 0 \\ m_{eff}(0) &= -\frac{4\hbar^2}{a^2 \cdot 1 \text{ eV}} \end{aligned}$$

2. pn-Übergang unter Bestrahlung

- (a) Betrachten Sie einen pn-Übergang als Photodetektor. Beschreiben Sie den Mechanismus von der Absorption von Photonen bis hin zum Aufbau einer von außen meßbaren Spannung. [2P]

Werden Photonen mit einer Energie größer als die Bandlücke in einem Halbleiter absorbiert, so wird ein Elektron/Loch-Paar erzeugt. Nehmen wir an, diese Absorption findet im n-dotierten Bereich statt. Wenn das Ladungsträgerpaar den Grenzbereich zwischen p- und n-dotiertem Halbleiter erreicht, bevor es rekombiniert, so werden die beiden Ladungsträger voneinander getrennt. Ein Elektron im Grenzbereich wird in die energetisch günstigeren Zustände des Leitungsband des p-dotierten Bereiches übergehen, wohingegen das Loch im n-dotierten Bereich bleiben wird. Entsprechendes gilt für ein im p-Bereich absorbiertes Elektron/Loch-Paar. Durch diese Ladungstrennung wird eine Spannung aufgebaut, die an den Kristallenden

gemessen werden kann.

- (b) Wovon (wie?) hängt es ab, welche Licht-Wellenlängen absorbiert werden können? [1P]

Ein Photon wird absorbiert, wenn die Energie des Photons größer ist als die Bandlücke des Halbleiters.

$$E_{gap} = h\nu = \frac{hc}{\lambda_0}$$

D.h., Absorption findet statt, wenn die Wellenlänge des Photons kleiner als λ_0 ist.

- (c) Was versteht man unter einer Raumladungszone in einem pn-Übergang. [1P]

Bringt man einen n- und einen p-dotierten Halbleiter in Kontakt, so diffundieren Elektronen aus dem grenznahen Bereich des n-dotierten Halbleiters in den p-dotierten Kristall. Löcher im p-dotierten Halbleiter verhalten sich entsprechend. Durch diesen Prozeß werden Ladungsüberschüsse (Raumladungen) ausgebildet.

- (d) Woran erkennt man an einem Banddiagramm, daß sich ein pn-Übergang im Gleichgewicht befindet? [1P]

Im Gleichgewicht ist die Fermi-Energie eine Parallele zur x-Achse.

3. Fermi-Energie

- (a) Wie ist die Fermi-Energie definiert? [1P]

Die Besetzungswahrscheinlichkeit bei der Fermi-Energie beträgt 0.5 (mathematisch: Die Fermi-Verteilungsfunktion nimmt bei der Fermi-Energie den Wert 0.5 an). (Behelfsweise: Bei $T=0$ K sind alle Zustände bis zur Fermi-Energie besetzt).

- (b) Wie verhält sich die Fermi-Energie im undotierten Halbleiter mit steigender Temperatur (Begründung)? [2P]

Das Verhalten der Fermi-Energie im undotierten Halbleiter hängt vom Verhältnis der effektiven Elektron- und Lochmassen ab. Aus $n_i = n = p$ folgt:

$$N_{eff}^L \cdot e^{\frac{E_F - E_L}{k_B T}} = N_{eff}^V \cdot e^{\frac{E_V - E_F}{k_B T}}$$

$$e^{\frac{2E_F}{k_B T}} = \frac{N_{eff}^V}{N_{eff}^L} \cdot e^{\frac{E_V + E_L}{k_B T}}$$

Logarithmieren und Auflösen nach E_F liefert:

$$E_F = \frac{E_L + E_V}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln \left(\frac{N_{eff}^V}{N_{eff}^L} \right)$$

Einsetzen von $N_{eff} \propto (m^*)^{3/2}$ liefert:

$$E_F = \frac{E_L + E_V}{2} + \frac{3}{4} k_B T \ln \left(\frac{m_h^*}{m_e^*} \right)$$

Für $T=0$ K liegt die Fermi-Energie genau mittig zwischen Valenz- und Leitungsband. Für $\frac{m_h^*}{m_e^*} > 1$ steigt die Fermi-Energie mit steigender Temperatur, für $\frac{m_h^*}{m_e^*} < 1$ fällt sie.

- (c) *Wie verhält sich die Fermi-Energie im p-dotierten Halbleiter mit steigender Temperatur (Begründung)? [2P]*

Die Fermi-Energie nimmt zu.

Die Fermi-Energie liegt bei $T=0$ K im Fall eines p-dotierten Halbleiters in der Mitte zwischen dem Energie-Niveau der Akzeptor-Störstellen und der Valenzband-Kante. Bei der Erwärmung eines Halbleiters nimmt der Anteil der Leitungs-Elektronen, die intrinsisch erzeugt werden, mit steigender Temperatur zu. Bei hinreichend hohen Temperaturen dominieren die intrinsisch erzeugten sogar die aus Störstellen erzeugten Leitungs-Elektronen. Im intrinsischen Fall, liegt die Fermi-Energie aber in der Mitte zwischen Valenz- und Leitungsband (siehe Teil a). Demnach muß die Fermi-Energie mit steigenden Temperaturen zunehmen.

- (d) *Wo liegt die Fermi-Energie in einem Metall? [1P]*

Die Fermi-Energie liegt in einem Band. Hierdurch erhält das Metall seine Eigenschaft zu leiten. Für elektrische Leitung ist ein nicht-vollbesetztes Band notwendig.

4. Begriffsklärung

Erklären Sie die folgenden Begriffe:

- (a) *Orthonormierung quantenmechanischer Zustände [1P]*

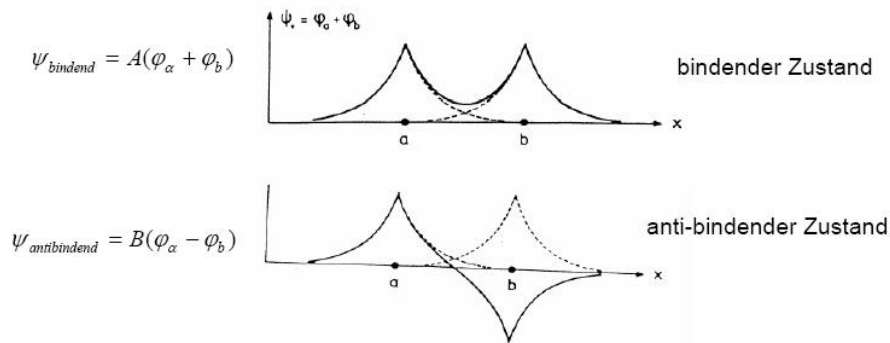
Ein Lösungssystem von Eigenfunktionen zu einem Operator gilt als orthonormiert, falls gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{x,n}^* \psi_{x,m} dx = 0 \quad \forall n \neq m$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{x,n}^* \psi_{x,m} dx = 1 \quad \forall n = m$$

(b) *Bindender und antibindender Zustand [1P]*

Die Wellenfunktionen von Elektronen in zwei gekoppelten Potentialtöpfen setzen



zen sich aus den Wellenfunktionen der einzelnen Elektronen der jeweiligen Töpfe zusammen. Im Falle des bindenden Zustands addieren sich die beiden Wellenfunktionen, im anderen Fall werden sie voneinander subtrahiert. Im Fall der Addition senkt sich die Energie ab, dies ist der bindende Zustand.

(c) *Kovalente Bindung [1P]*

Binden zwei Atome mit ungefähr gleicher Elektronenaffinität miteinander, so ist diese Bindung kovalent. In diesem Fall ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Bindungs-Elektronen über beide Atome verteilt.

(d) *Majoritätsladungsträger [1P]*

Ladungsträger gelten in einem Halbleiter dann als Majoritätsladungsträger, falls ihre Dichte die Dichte des jeweils anderen Typs deutlich übersteigt.

5. Quantenzahlen

- (a) Was sagen die Quantenzahlen n , l , m , m_s über Elektronen in einem Atom aus? Welche Werte können diese Quantenzahlen jeweils annehmen? [2P]

Quantenzahl	Beschreibung	Wertebereich
n	Hauptquantenzahl ungefähre Energie	1 ... ∞
l	Nebenquantenzahl Bahndrehimpuls	0 ... $n-1$
m	Ausrichtung des Bahndrehimpulses	-1 ... +1
m_s	Spinquantenzahl	$\pm \frac{1}{2}$

- (b) Inwiefern kann man in Hinblick auf diese Quantenzahlen von Entartung sprechen? [1P]

Unter Entartung versteht man, daß zu einer Energie mehrere Sätze von Quantenzahlen führen. Die Energie eines Elektrons hängt von seiner Schale und seinem Orbital ab. Solange keine äußeren Felder anliegen, ist die Energie unabhängig von den Quantenzahlen m und m_s . Damit liefern alle Sätze von Quantenzahlen die gleiche Energie, die sich nur in m oder m_s unterscheiden. Diese Energie ist dann entartet. Beispiel: $(2,1,0,+\frac{1}{2})$ und $(2,1,1,+\frac{1}{2})$.

6. Quantenmechanik

Beschreiben Sie ein Experiment, dessen Ergebnis sich nicht mit der klassischen Physik erklären läßt, und das zwingend mit den Vorstellungen der Quantenmechanik erörtert werden muß. Zeigen Sie dabei explizit die Grenzen der klassischen Physik auf. [3P]

- Elektronen-Beugung am Doppelspalt: Werden Elektronen auf einen Doppelspalt geschossen, so zeigen diese auf einem dahinterliegenden Schirm ein Beugungsmuster. Dieses gilt auch, wenn man einzelne Elektronen auf den Doppelspalt schießt und auf dem Schirm detektiert. Bei einer ausreichenden Anzahl von Elektronen zeigt sich auf dem Schirm eine Verteilung, die dem Intensitätsmuster einer Doppelspalt-Beugung entspricht. Somit müssen die Elektronen durch beide Spalte gleichzeitig fliegen und miteinander interferieren. Dies ist aber nur dann möglich, wenn Elektronen Wellen sind.

7. Parabelpotential

- (a) Geben Sie die Energie-Eigenwerte zum Hamilton-Operator $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$ an. [1P]

$$E = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad n = 0 \dots$$

- (b) Skizzieren Sie das zugrunde liegende Potential und die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Elektronen in den niedrigsten drei Zuständen. [2P]

...

- (c) Hat die Schrödinger-Gleichung für den gegebenen Hamilton-Operator uneigentliche Lösungen? [1P]

Falls nein: Kennen Sie ein anderes Potential mit uneigentlichen Lösungen? Wie sehen diese aus?

Falls ja: Welche?

Nein, in diesem Fall gibt es keine uneigentlichen Lösungen. Uneigentliche Lösungen sind nicht-normierbare Lösungen. Alle Eigenfunktionen im harmonischen Potential sind normierbar. Nicht-normierbare Lösungen gibt es beim Wasserstoff-Atom oder beim endlichen Potentialtopf.

- (d) Geben Sie den Erwartungswert des Impulsoperators an (Begründung!). [1P]

Da sich das Elektron mit der gleichen Wahrscheinlichkeit nach links oder nach rechts bewegt, muß der Impulsoperator den Erwartungswert 0 liefern (Impuls ist vektoriell!).

- (e) Berechnen Sie den Erwartungswert des Operators $\hat{p}^2$ im Grundzustand. [2P]

$$\begin{aligned} \langle \hat{p}^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) \hat{p}^2 \psi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{b}\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2b^2}} (-i\hbar\nabla)^2 \frac{1}{\sqrt{b}\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2b^2}} dx \\ &= -\frac{\hbar^2}{b\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2b^2}} \nabla^2 e^{-\frac{x^2}{2b^2}} dx \\ &= -\frac{\hbar^2}{b\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2b^2}} \nabla \left(-\frac{x}{b^2} e^{-\frac{x^2}{2b^2}} \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\hbar^2}{b\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2b^2}} \left(-\frac{1}{b^2} e^{-\frac{x^2}{2b^2}} + \frac{x^2}{b^4} e^{-\frac{x^2}{2b^2}} \right) dx \\
&= -\frac{\hbar^2}{b\sqrt{\pi}} \left(-\frac{1}{b^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{b^2}} dx + \frac{1}{b^4} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{b^2}} dx \right) \\
&= -\frac{\hbar^2}{b\sqrt{\pi}} \left(-\frac{1}{b} \sqrt{\pi} + \frac{1}{2b} \sqrt{\pi} \right) \\
&= \frac{\hbar^2}{2b^2} = \frac{\hbar m \omega}{2}
\end{aligned}$$

wobei $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

(f) Berechnen Sie die Zustandsdichte $D(E)$ im harmonischen Oszillator. [2P]

Es gilt

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$n = \frac{E_n}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$$

Die Zustandsdichte berechnet sich zu

$$D(E) = \frac{dn}{dE} = \frac{1}{\hbar\omega}$$

Die Zustandsdichte ist konstant. Das erwartet man auch, da die Energieniveaus äquidistant sind.

8. Potentialgebiet

Sei $V_0 > 0$ und

$$V(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 & \text{Bereich I} \\ V_0 & : 0 \leq x \leq d & \text{Bereich II} \\ 0 & : d < x & \text{Bereich III} \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie das Potential und die Wellenfunktion eines von rechts einlaufenden Elektrons mit der Energie (i) $E_1 > V_0$ und (ii) $E_2 < V_0$ über dem gesamten Potentialgebiet. [2P]

...

(b) Bestimmen Sie die Wellenzahlen k_I , k_{II} und k_{III} eines Elektrons in den angegebenen Potentialgebieten in Abhängigkeit der Energie des Elektrons. [2P]

Ansatz für eine ebene Welle, getrennt nach Potential-Gebieten (da $k = k(E, V)$)

$$(I) \quad \psi(x) = Ae^{ikx} \quad \text{für} \quad V(x) = 0$$

$$(II) \quad \psi(x) = Be^{i\kappa x} \quad \text{für} \quad V(x) = V_0$$

$$\begin{aligned} (I) \quad & -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = E\psi \\ & -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 Ae^{ikx} = EAe^{ikx} \\ & \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E \\ & \Rightarrow k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (II) \quad & \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x) \right) \psi = E\psi \\ & \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x) \right) Be^{i\kappa x} = EBe^{i\kappa x} \\ & \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} + V(x) = E \\ & \Rightarrow \kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - V_0)} \end{aligned}$$

Im Fall (II) muß zwischen $V_0 > E_e$ und $V_0 < E_e$ unterschieden werden:

$$\begin{aligned} (1) \quad V_0 < E_e & : \quad \kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - V_0)} \\ (2) \quad V_0 > E_e & : \quad \kappa = \frac{1}{\hbar} i \sqrt{2m(V_0 - E)} =: iq \end{aligned}$$

Im Bereich (III) entspricht die Wellenzahl der Wellenzahl im Bereich (I).

(c) Welchen Bedingungen müssen die Wellenfunktionen an den Stellen $x=0$ bzw. $x=d$ genügen? [1P]

Sowohl die Wellenfunktionen wie auch ihre ersten Ableitungen müssen stetig sein.

$$\begin{aligned} (1) \quad \psi_I(0) &= \psi_{II}(0) \\ (2) \quad \psi'_I(0) &= \psi'_{II}(0) \\ (3) \quad \psi_{II}(d) &= \psi_{III}(d) \\ (4) \quad \psi'_{II}(d) &= \psi'_{III}(d) \end{aligned}$$

9. Ladungsträgerdynamik im Halbleiter

Ein einheitlich stark p -dotierter Halbleiter wird zur Zeit $t=0$ bei Raumtemperatur plötzlich mit Licht bestrahlt. Die Lebensdauer der angeregten Elektronen betrage $\tau_n = 10^{-6}$ s. Jede Sekunde werden 10^{17} Elektronen pro Kubikzentimeter homogen im ganzen Kristall angeregt. Betrachten Sie im Folgenden nur die durch Licht angeregten Elektronen.

- (a) Welche Elektronendichte stellt sich im Kristall nach einiger Zeit ein? [1P]

Zu Beginn ($t=0$) ist $n=0$ (intrinsisch angeregten Ladungsträger sollen laut Aufgabenstellung nicht betrachtet werden). Da die Elektronendichte nicht beliebig steigen kann, erwarten wir eine Sättigung. Die Generationsrate wird dann der Regenerationsrate entsprechen.

$$\frac{n}{\tau_n} = G_L \quad \Rightarrow \quad n = \tau_n \cdot G_L = 10^{11} \text{ cm}^3$$

- (b) Welche Differentialgleichung beschreibt die Ladungsträgerdynamik $n(t)$? [1P]

Die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{e} \frac{\partial n}{\partial x} j + g_n - r_n$$

- (c) Vereinfachen Sie diese Differentialgleichung mit den Angaben in der Aufgabenstellung. [1P]

Da über den ganzen Kristall einheitlich viele Elektronen angeregt werden, fließen weder Diffusions- noch Drift-Ströme. Demnach ist $j=0$. Die Generationsrate ist in der Aufgabenstellung gegeben $g_n = G_L$. Die Rekombinationsrate beträgt $r_n = \frac{n}{\tau_n}$. Damit ergibt sich:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = G_L - \frac{n}{\tau_n}$$

- (d) Lösen Sie die Differentialgleichung und leiten Sie einen Ausdruck für die Dichte der Elektronen im Kristall $n=n(t)$ für $t>0$ her. [2P]

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{n}{\tau_n} - G_L = 0$$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet

$$n_{hom}(t) = A e^{-\frac{t}{\tau_n}}$$

Eine spezielle Lösung läßt sich durch genaues Hinsehen ablesen

$$n_{spez} = G_L \tau_n$$

Damit ist die allgemeine Lösung

$$n(t) = n_{hom}(t) + n_{spez}(t) = A e^{-\frac{t}{\tau_n}} + G_L \tau_n$$

Mit der Randbedingung $n(t)|_{t=0} = 0$ ergibt sich die Lösung

$$n(t) = G_L \tau_n \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_n}} \right)$$