

Lichttechnisches Institut
Universität Karlsruhe
Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer
Kaiserstrasse 12
76131 Karlsruhe

Festkörperelektronik
Klausur
21. September 2006

Name:

Vorname:

E-Mail:

Matrikelnummer:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte									
Max	4,5	9	6,5	4,5	5,5	5	7	7,5	49,5

Erreichte Punktzahl:

Note:

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteilte Formelsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 49,5, zum Bestehen notwendige Punktzahl: etwa 20.
- In eckigen Klammern angegebene Zahlen sind die erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Bitte schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Bitte legen Sie Ihren Studentenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf dem von uns gestellten Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Bitte nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie bitte jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite Nachkommastelle anzugeben.

1. Doppelspalt-Experiment

- (a) Diskutieren Sie die verschiedenen Aspekte des Doppelspalt-Experiments. Was passiert, wenn das Experiment mit Licht hoher Intensität, mit Licht extrem niedriger Intensität oder mit Elektronen durchgeführt wird? Wie wirkt sich das Zudecken eines Spalts aus? Welche fundamentalen quantenmechanischen Prinzipien offenbaren sich hier? [3P]

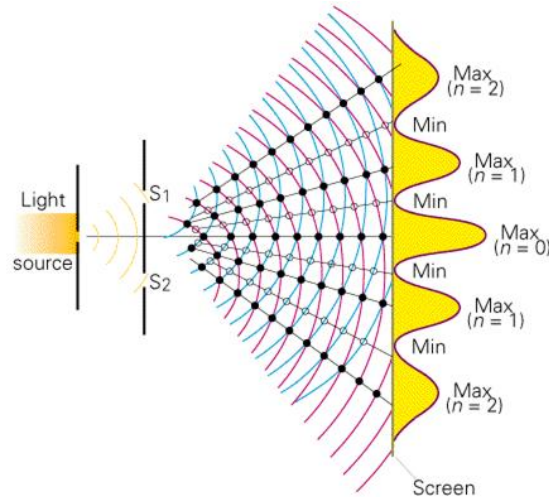


Abbildung L1

Sowohl bei Beleuchtung mit Licht hoher und niedriger Intensität, als auch beim Versuch mit Elektronen (jeweils bei geeigneter Geometrie) bildet sich das in L1 gezeigte Interferenzmuster aus. Bei sehr geringer Intensität des Lichts werden zwar am Schirm zunächst nur einzelne Photonen detektiert, im Laufe der Zeit baut sich aber trotzdem das gezeigte Interferenzmuster auf. Auch bei hoher Lichtintensität und mit Elektronen detektiert man immer nur einzelne Teilchen, deren Auftreffwahrscheinlichkeit sich aber gemäß des Interferenzmusters ergibt. Sobald einer der Spalte zugedeckt wird, zeigt sich kein Interferenzmuster mehr auf dem Schirm. Wie geschickt man es auch versucht, es ist nicht möglich, gleichzeitig herauszufinden, durch welchen Spalt ein Elektron/Photon geflogen ist und trotzdem eine Interferenz zu sehen. Im Ganzen macht das Experiment vor allem den Welle-Teilchen-Dualismus deutlich, auch die Unschärferelation zwischen Ort und Impuls kann für die Erklärung des Scheiterns von welcher-Weg-Fragen herangezogen werden.

- (b) Welche Wellenlänge kann man einem Elektron zuordnen, das durch eine Spannung von 1 V beschleunigt wurde? Welche Wellenlänge hat ein Photon mit gleicher Energie? [1,5P]

Nach dem Durchlaufen des Feldes hat das Elektron 1 eV Energie. Nach de-Broglie

ergibt sich die Wellenlänge zu:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Die kinetische Energie ist $W_{kin} = \frac{p^2}{2m}$ und damit:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mW_{kin}}} = 1,23 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

Ein Photon der entsprechenden Energie hat die Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{hc}{W} = 1,24 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

2. Harmonischer Oszillator

- (a) Gleichung (1) ist eine Eigenwertgleichung für einen beliebigen quantenmechanischen Operator $\hat{A}$.

$$\hat{A}\psi = a\psi \quad (1)$$

Benennen Sie die Bestandteile von (1). Wie hängen diese mit den möglichen Ergebnissen einer Messung und dem Zustand des System unmittelbar nach der Messung zusammen? [2,5P]

Der Operator ist mit einer Messgröße assoziiert. Die Eigenwertgleichung (1) liefert als Eigenwerte die möglichen Messwerte zur jeweiligen Messgröße. Jede Messung einer Größe liefert einen Eigenwert als Ergebnis und hinterlässt das System in einem Eigenzustand.

- (b) Welche Gemeinsamkeiten zeigen die Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung des quantenmechanischen harmonischen Oszillators und die des unendlichen Potentialtopfs, welche Unterschiede gibt es? [2P]

In beiden Fällen erhalten wir diskrete Lösungen für die Energiewerte, wobei der niedrigste Zustand eine Energie größer Null hat. Ebenso wechseln sich gerade und ungerade Lösungen ab (die Anzahl der Knoten erhöht sich jeweils um Eins), wobei der Grundzustand eine gerade Lösung ist. Unterschiedlich sind die Abstände der Energieniveaus, beim harmonischen Oszillator erhalten wir äquidistante, beim unendlichen Potentialtopf nimmt der Abstand quadratisch zu. Außerdem weisen die Wellenfunktionen im unendlichen Potentialtopf an dessen Grenzen einen Knoten auf.

- (c) Der Grundzustand des eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillators ist

$$\psi_0(x) = \frac{1}{b^{1/2}\sqrt{\pi}^{1/2}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \quad (2)$$

mit der Konstanten $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Berechnen Sie den Erwartungswert für die kinetische Energie des harmonischen Oszillators im Grundzustand. [3,5P]

Die kinetische Energie ergibt sich zu $W_{kin} = \frac{p^2}{2m}$. In Operatorschreibweise setzen wir den Impulsoperator ein, also $\hat{p} = -j\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, somit erhalten wir für den Operator der kinetischen Energie:

$$\hat{W}_{kin} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Für den Erwartungswert der kinetischen Energie erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{W}_{kin} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^* \hat{W} \psi_0 dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b^{1/2} \sqrt{\pi^{1/2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{1}{b^{1/2} \sqrt{\pi^{1/2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) dx \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right)\right) dx \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \left(-\frac{1}{b^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) + \frac{x^2}{b^4} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right)\right) dx \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{b^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) + \frac{x^2}{b^4} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right)\right) dx \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \left(-\frac{1}{b^2} \sqrt{b^2\pi} + \frac{1}{2b^2} \sqrt{b^2\pi}\right) \\
&= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \frac{1}{2b^2} \sqrt{b^2\pi} = \frac{1}{4} \hbar\omega
\end{aligned}$$

- (d) Bestimmen Sie mit dem Ergebnis des letzten Aufgabenteils den Erwartungswert der potentiellen Energie des Grundzustands und erläutern Sie ihr Vorgehen (Falls Sie den Teil c) nicht lösen konnten, benutzen Sie $\langle \hat{W}_{kin} \rangle = K$.) [1P]

Die Gesamtenergie des Grundzustands des harmonischen Oszillators ist $W_T = \frac{1}{2} \hbar\omega$. Die Gesamtenergie berechnet sich aus der Summe der potentiellen und kinetischen Energie, gleiches gilt auch für die Erwartungswerte. Mit dem Ergebnis der letzten Teilaufgabe erhalten wir $\langle \hat{W}_{pot} \rangle = \frac{1}{4} \hbar\omega$.

3. Potentialtopf mit endlich hohen Wänden

- (a) Skizzieren Sie einen Potentialtopf der Höhe V_0 und Breite L für Elektronen. Zeichnen Sie die Wellenfunktionen (Realteil) von zwei Eigenfunktionen für Energien $W > V_0$ und die der niedrigenergetischsten drei Lösungen mit $W < V_0$ ein. [1,5P]

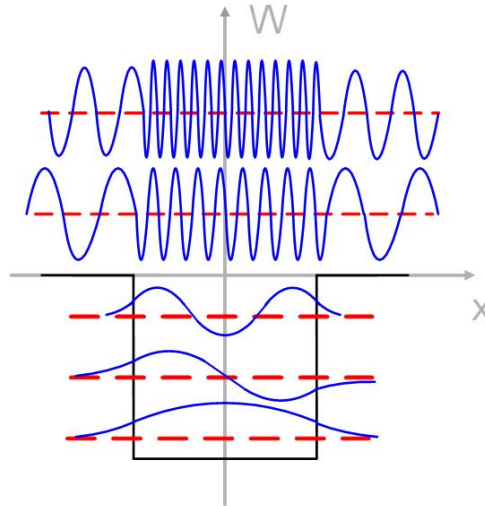


Abbildung L2

- (b) Worin unterscheiden sich die Wellenfunktionen für $W > V_0$ und $W < V_0$? [1P]

Die Lösungen mit $W > V_0$ haben die Form von ebenen Wellen und sind daher unendlich ausgedehnt. Außerdem gibt es hier zu jeder Energie eine Lösung. Die gebundenen Lösungen dagegen fallen in der Barriere exponentiell ab, sind also im Quantentopf lokalisiert. Zudem ist ihr Energiespektrum diskret.

- (c) Welche Gleichung liefert die Lösung für die elektronischen Zustände in einem solchen System mit $W < V_0$? Machen Sie Lösungsansätze für die drei Bereiche mit konstantem Potential und stellen Sie die zur Lösung nötigen Rand- und Nebenbedingungen auf. Das explizite Ausrechnen der Lösung ist **nicht** verlangt! [3P]

Die stationäre Schroedingergleichung liefert die Energieeigenwerte dieses Problems. In unserem Fall zerfällt das Problem in drei Einzelprobleme mit jeweils konstantem Potential. Daher können wir für alle drei Bereiche zwei ebene Wellen überlagern und erhalten:

$$\text{Gebiet 1: } \psi_1(x) = A \exp(-\kappa_1 x) + B \exp(\kappa_1 x)$$

$$\text{Gebiet 2: } \psi_2(x) = C \exp(-jk_2 x) + D \exp(jk_2 x)$$

$$\text{Gebiet 3: } \psi_3(x) = E \exp(-\kappa_3 x) + F \exp(\kappa_3 x)$$

Hier wurde schon ausgenutzt, dass die Wellenvektoren in der Barriere für $W < V_0$ imaginär sind und so die oszillierenden komplexen Exponentialfunktion in reelle Exponentialfunktionen verwandeln. Daran knüpft die Forderung an, dass in den Gebieten 1 und 3 die Lösungen exponentiell abfallen müssen, weil sonst die Wellenfunktionen weit weg vom Topf divergieren. Wir folgern $A = F = 0$. Die restlichen vier Variablen erledigen wir mit den Stetigkeitsbedingungen an den Übergängen 1-2 und 2-3. wir nehmen an, der Potentialtopf reiche von $x = 0$ bis $x = L$.

$$\text{Nebenbedingung1 : } \psi_1(x = 0) = \psi_2(x = 0)$$

$$\text{Nebenbedingung2 : } \psi'_1(x = 0) = \psi'_2(x = 0)$$

$$\text{Nebenbedingung3 : } \psi_2(x = L) = \psi_3(x = L)$$

$$\text{Nebenbedingung4 : } \psi'_2(x = L) = \psi'_3(x = L)$$

Damit haben wir vier unabhängige Nebenbedingungen, um vier Konstanten zu bestimmen, das Problem ist lösbar.

- (d) Zeigen Sie anhand einer Skizze, wie sich das Aussehen der Lösungen verändert, wenn $V_0 \rightarrow \infty$. [1P]

Mit unendlich hohen Wänden wird der endliche zum unendlichen Potentialtopf. Dann ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in den Barrieren Null, die Wellenfunktion hat an der Grenze einen Knoten. Natürlich gibt es im unendlichen Potentialtopf auch keine ungebundenen Lösungen.

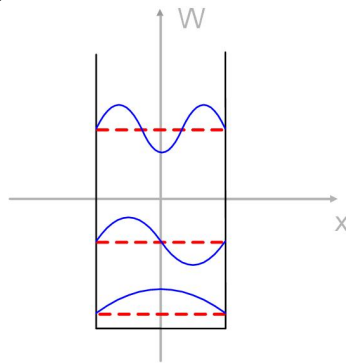


Abbildung L3

4. Zustandsdichte

Es herrsche Raumtemperatur (293 K).

- (a) Was beschreibt die „Zustandsdichte der Elektronen“ im Halbleiterkristall? [1P]

Die Zustandsdichte gibt an, wie viele elektronische Zustände pro Energieintervall in einem Kristall vorhanden sind. Meistens ist die Zustandsdichte auf das Volumen normiert.

- (b) Die effektive Masse der Elektronen in einem Germanium-Kristall sei $m_{eff} = 0,041m_0$. Berechnen Sie die maximal mögliche Dichte der freien Elektronen zwischen der Leitungsbandkante bis zu einer Energie, die um $2k_B T$ über der Bandkante liegt. [2,5P]

Die Dichte der freien Elektronen n berechnen wir aus der Zustandsdichte:

$$\begin{aligned}
 n &= \int_{W_L}^{W_L+2k_B T} g(W) dW \\
 &= \frac{4\pi(2m_{eff})^{3/2}}{h^3} \int_{W_L}^{W_L+2k_B T} \sqrt{W - W_L} dW \\
 &= \frac{8\pi(2m_{eff})^{3/2}}{3h^3} \left| (W - W_L)^{3/2} \right|_{W_L}^{W_L+2k_B T} \\
 &= \frac{8\pi(2m_{eff})^{3/2}}{3h^3} (2k_B T)^{3/2} = 4,28 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3}
 \end{aligned}$$

- (c) Wie viele freie Elektronen können in diesem Energiebereich in einer kubischen Probe mit 1 mm Kantenlänge maximal existieren? [1P]

$$\begin{aligned}
 N &= V \cdot n \\
 &= 4,28 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-3}
 \end{aligned}$$

5. Ladungsträgerdichte

Wir betrachten eine Gallium-Arsenid-Probe. Bei einer Temperatur von 230 K beträgt die Bandlücke in diesem Halbleiter $W_G = 1,45 \text{ eV}$.

- (a) Die Probe ist mit Tellur in einer Konzentration von 10^{16} cm^{-3} dotiert. Das Donatorniveau liegt 0,03 eV, das Fermi-niveau 0,1 eV unterhalb der Leitungsbandkante. Berechnen Sie die Ionisationswahrscheinlichkeit für die Dotierstellen. [1,5P]

$$\begin{aligned} \frac{n_D^+}{n_D} &= \frac{1}{1 + 2 \exp\left(\frac{W_F - W_D}{k_B T}\right)} \\ &= \frac{1}{1 + 2 \exp\left(\frac{-0,07 \text{ eV}}{k_B T}\right)} = 0,94 \end{aligned}$$

- (b) Die Bandstruktur von Gallium-Arsenid ist in Abbildung 1 gegeben. Zeichnen Sie in diese Abbildung die parabolische Näherung der Bandstruktur ein. Skizzieren Sie die Bandstruktur von Silizium. Welcher wichtige Unterschied besteht zwischen den beiden Materialien? [2,5P]

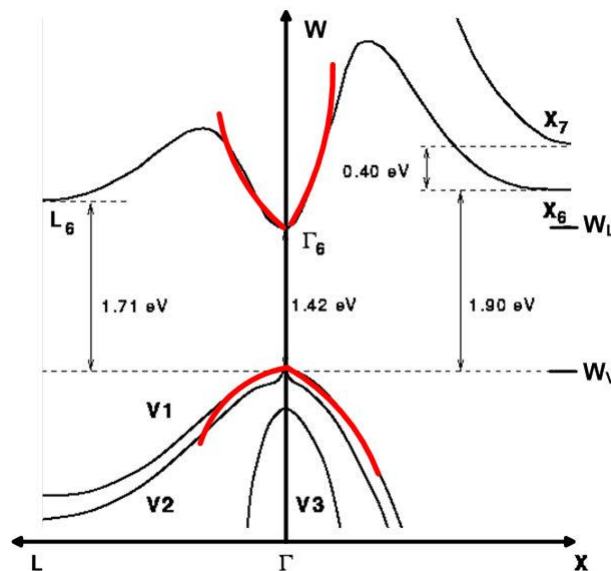


Abbildung L4

Silizium ist im Gegensatz zu Gallium-Arsenid ein indirekter Halbleiter, das heißt das

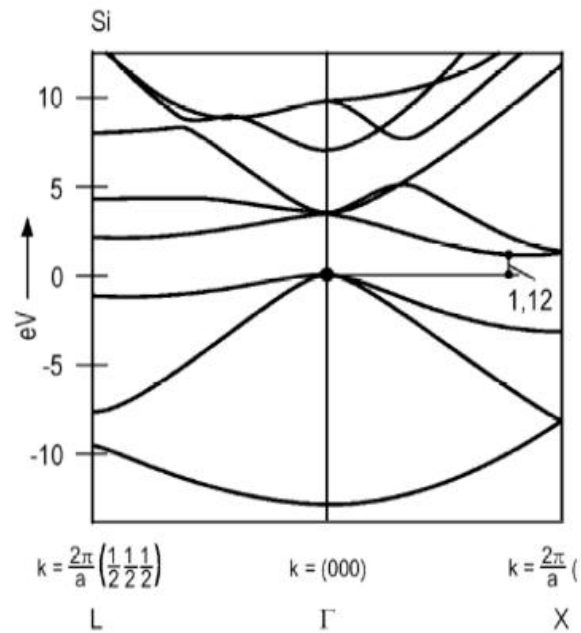


Abbildung L5 (grobe Skizze war ausreichend!)

Maximum des Valenzbandes und das Minimum des Leitungsbandes liegen bei unterschiedlichen Kristallimpulsen.

- (c) Nun sei die parabolische Näherung für das Leitungsband gegeben als $W_L(k) = \frac{W_G}{2} + ak^2$, wobei $a = \hbar^2/0,134m_0$. Berechnen Sie die effektive Masse der Elektronen im Leitungsband. [1,5P]

$$\begin{aligned}
 m_{eff} &= \hbar^2 \frac{1}{\partial^2 W / \partial k^2} \\
 &= \hbar^2 \frac{1}{2a} = 0,067 m_0 \\
 &= 6,1 \cdot 10^{-32} \text{ kg}
 \end{aligned}$$

6. Leitfähigkeit

Störstellenerschöpfung kann angenommen werden, es herrscht Raumtemperatur (293 K).

- (a) Geben Sie die Formel für die Leitfähigkeit im Halbleiter an und erklären Sie die darin auftretenden Größen. [1P]

$$\sigma = e(\mu_n n + \mu_p p)$$

Die Leitfähigkeit eines Halbleiters steigt mit der Beweglichkeit (μ) und der Dichte (n und p) der Ladungsträger. In unserem Modell kommen zwei unterschiedliche geladene Teilchen, Elektronen und Löcher, vor, die beide einen Beitrag zur Leitfähigkeit leisten können.

- (b) Die Beweglichkeiten in Silizium seien $\mu_n = 1350 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ und $\mu_p = 480 \text{ cm}^2/\text{Vs}$, die effektiven Massen seien $m_e = 0,36m_0$ (Elektronen) und $m_h = 0,81m_0$ (Löcher), die Bandlücke $W_G = 1,1 \text{ eV}$. Wie muss man die Dotierung eines p-dotierten Plättchens wählen, damit die Leitfähigkeit gleich der eines mit 10^{16} Dotieratomen pro Kubikzentimeter dotierten n-dotierten Plättchens ist (die Beweglichkeiten seien unabhängig von der Dotierdichte)? [2,5P]

$$\begin{aligned} n_i &= \sqrt{N_V N_L} \exp\left(-\frac{W_G}{2k_B T}\right) \\ &= 2 \left(\frac{2\pi k_B T}{h^2}\right)^{3/2} m_e^{3/4} m_h^{3/4} \exp\left(-\frac{W_G}{2k_B T}\right) = 3,43 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-3} \end{aligned}$$

Damit spielen im Fall des dotierten Halbleiterplättchens die intrinsisch erzeugten Ladungsträger keine Rolle. Die Leitfähigkeit im n-Halbleiter ist somit:

$$\begin{aligned} \sigma &= e_0 \mu_n n \\ &= 2,16 \text{ S/cm} \end{aligned}$$

Die benötigte Dotierdichte der Akzeptoren ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\sigma}{e_0 \mu_p} \\ &= 2,81 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3} \end{aligned}$$

- (c) Ist die Annahme konstanter Beweglichkeit bei steigender Dotierung berechtigt? Welcher Effekt beeinflusst hier die Beweglichkeit? Warum beeinflusst auch das Erhitzen des Halbleiters die Beweglichkeit? [1,5P]

Mit zunehmender Dotierung steigt die Anzahl der Streueignissen an Störstellen stark an. Daher ist ein Rückgang der Ladungsträgerbeweglichkeit zu erwarten. Beim Erhitzen führen die Gitteratome Schwingungen um ihre Ruhelage aus, was ebenfalls in einer verstärkten Streuung (und damit verringerten Beweglichkeit) resultiert.

7. Elektrostatik einer pn-Diode mit linearem Dotierprofil

Gegeben sei ein pn-Übergang mit dem Dotierprofil nach Abbildung 2. Aufgetragen ist die Differenz der Dichten der Donatoren n_D und der Akzeptoren n_A , mathematisch wird das Profil ausgedrückt durch $n_D - n_A = ax$ mit einer Konstanten $a > 0$.

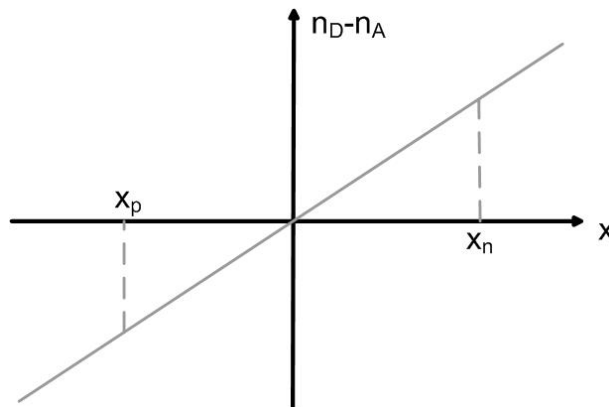


Abbildung 2

- (a) Ein solches Modell ist gut geeignet für einen pn-Übergang, der durch das tiefe Eindiffundieren von Akzeptoren in einen moderat bis stark dotierten n-Halbleiter hergestellt wurde. Nennen Sie ein weiteres Verfahren zur Dotierung von Halbleiterkristallen. Erläutern Sie, wie die beiden Verfahren funktionieren. [1P]

Bei der Diffusionsmethode wird die zu behandelnde Oberfläche des Halbleiters mit dem gasförmigen, flüssigen oder festen Dotiermaterial in Kontakt gebracht. Das Konzentrations-Gefälle sorgt dann dafür, dass die Dotanden in den Halbleiter diffundieren. Bei epitaktischem Schichtwachstum kann das Dotiermaterial beim Herstellungsprozess beigemischt und so direkt ins Kristall-Gitter eingebaut werden. Ein weiteres Verfahren ist die Ionenimplantation, wo geladene Dotier-Ionen in den Halbleiter „geschossen“ werden.

- (b) Beim abrupten pn-Übergang bildet sich eine Raumladungszone um den Punkt $x = 0$ aus. Beschreiben Sie, wie es zur Ausbildung der Raumladungszone kommt. [1,5P]

Am pn-Übergang treffen sich Raumbereiche, in denen jeweils viele freie Elektronen oder Löcher existieren. Da beide Ladungsträgersorten frei beweglich sind, diffundieren sie ins jeweils andere Gebiet. Durch die damit verbundene Ladungstrennung (die ionisierten Dotieratom-Rümpfe bleiben zurück) baut sich ein elektrisches Feld auf, dass der Diffusion entgegenwirkt. An einem bestimmten Punkt wiegen sich die Diffusions-

kraft und die Kraft durch das elektrische Feld gerade auf, ein Gleichgewichtszustand ist die Folge. Allerdings gibt es dann auf beiden Seiten des Übergangs einen Bereich, in dem die Ladung der ionisierten Rümpfe nicht mehr durch freie Ladungsträger ausgeglichen wird. Diesen Bereich bezeichnet man als Raumladungszone.

- (c) Die Raumladungszone erstreckt sich von $x_p < 0$ im p-dotierten Bereich bis $x_n > 0$ im n-dotierten Teil. Wie verhalten sich die Längen der beiden Bereiche zueinander, wenn man davon ausgeht, dass in der Raumladungszone keine beweglichen Ladungsträger existieren? [0,5P]

Da die positive Ladung im n-dotierten Bereich und die negative Ladung im p-dotierten Bereich gleich groß sein müssen, gilt $x_n = x_p = d/2$.

- (d) Berechnen Sie den Verlauf des Feldes und des Potentials innerhalb des Halbleiters von einem Punkt $x < x_p$ bis zu einem Punkt $x > x_n$. Die dielektrische Konstante des verwendeten Materials ist $\epsilon_r = 12$. [3P]

Das Vorgehen ist vollkommen analog zu dem beim abrupten pn-Übergang. Die Maxwell-Gleichungen liefern:

$$\rho = ax = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial E}{\partial x}$$

Da außerhalb der Raumladungszone der Kristall neutral ist, ist auch das elektrische Feld hier Null. Wir integrieren also ab dem linken Rand der Raumladungszone ($x = -d/2$).

$$\int_{-d/2}^x ax dx = \epsilon_0 \epsilon_r \int_{-d/2}^x \frac{\partial E}{\partial x} dx = \epsilon_0 \epsilon_r \int_0^E dE \rightarrow \frac{a}{2} \left(x^2 - \left(\frac{d}{2} \right)^2 \right) = \epsilon_0 \epsilon_r E$$

...und damit...

$$E(x) = \begin{cases} 0 & : x < -d/2 \\ \frac{a}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \left(x^2 - \left(\frac{d}{2} \right)^2 \right) & : -d/2 \leq x \leq d/2 \\ 0 & : x > d/2 \end{cases}$$

Zum Potential kommt man über $E = -d\phi/dx$.

$$\begin{aligned} \int_0^\phi d\phi &= - \int_{d/2}^x E dx = - \int_{d/2}^x \frac{a}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \left(x^2 - \left(\frac{d}{2} \right)^2 \right) dx \\ \phi - \phi_0 &= \frac{a}{6\epsilon_0 \epsilon_r} \left(2 \left(\frac{d}{2} \right)^3 + 3 \left(\frac{d}{2} \right)^2 x - x^3 \right) \end{aligned}$$

Mit der Eichung $\phi_0 = 0$ erhalten wir also:

$$\phi(x) = \frac{a}{6\epsilon_0\epsilon_r} \left(2 \left(\frac{d}{2} \right)^3 + 3 \left(\frac{d}{2} \right)^2 x - x^3 \right)$$

...also...

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & : x < -d/2 \\ \frac{a}{6\epsilon_0\epsilon_r} \left(2 \left(\frac{d}{2} \right)^3 + 3 \left(\frac{d}{2} \right)^2 x - x^3 \right) & : -d/2 \leq x \leq d/2 \\ \frac{4a}{6\epsilon_0\epsilon_r} d^3 & : x > d/2 \end{cases}$$

- (e) Skizzieren Sie den Verlauf der Bänder im Halbleiter in dem in Aufgabenteil d) beschriebenen Bereich. [1P]

Die Form der Bänder entspricht dem gespiegelten Verlauf des Potentials.

8. Halbleiter unter Beleuchtung

Wir betrachten einen stark p-dotierten Halbleiter-Quader der Dicke d nach Abbildung 3. An der Oberseite wird er homogen mit Licht bestrahlt. Die einfallenden Photonen werden in einer im Vergleich zur Diffusionslänge sehr dünnen Schicht absorbiert. Wir befinden uns im Bereich der Störstellenerschöpfung.

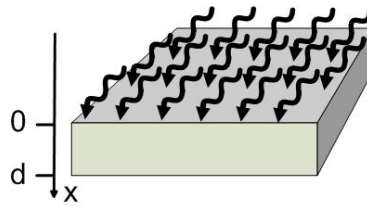


Abbildung 3

- (a) Stellen Sie nun die Kontinuitätsgleichung und die Randbedingungen für die Überschusselektronen Δn auf und erklären Sie Ihr Vorgehen. Gehen Sie davon aus, dass an der Oberfläche eine konstante Überschusssträgerdichte aufrechterhalten wird. An der Unterseite der Probe werden alle Überschussladungsträger abgesaugt. Im Halbleiter habe sich ein stationärer Zustand eingestellt. Gehen Sie von einer Rekombinationsrate $r = \Delta n / \tau_n$ aus. [3P]

Wir können uns auf die Überschussladungsträgerdichte beschränken, stellen also die Kontinuitätsgleichung für Δn auf. Da Ladungsneutralität herrscht, betrachten wir nur einen Diffusionsstrom. Außerhalb der Randzone gibt es keine Generation, für die Rekombination verwenden wir nach Aufgabenstellung $r = \Delta n / \tau_n$, insgesamt:

$$\frac{\partial \Delta n}{\partial t} = D_n \frac{\partial^2 \Delta n}{\partial x^2} - \frac{\Delta n}{\tau_n}$$

Da die Bestrahlung stationär ist, erwarten wir zudem keine zeitliche Änderung, also:

$$0 = D_n \frac{\partial^2 \Delta n}{\partial x^2} - \frac{\Delta n}{\tau_n}$$

Auf der oberen Seite des Quaders legt die Injektion der Ladungsträger durch Bestrahlung die Randbedingung fest.

$$\Delta n(x=0) = \Delta n_0$$

Alle Elektronen, die die Unterseite erreichen, werden sofort weggesaugt.

$$\Delta n(x = d) = 0$$

- (b) Lösen Sie allgemein die im letzten Aufgabenteil aufgestellte Gleichung und berechnen Sie nun die Überschusselektronendichte. [2,5P]

Wir multiplizieren mit τ_n und erhalten:

$$0 = D_n \tau_n \frac{\partial^2 \Delta n}{\partial x^2} - \Delta n$$

Gesucht ist also eine Funktion, die gleich ihrer zweiten Ableitung multipliziert mit einer Konstanten ist. Dies trifft zum Beispiel für die Exponentialfunktion zu. Wir erraten zwei linear unabhängige Lösungen zu:

$$\begin{aligned} \Delta n(x) &= C_1 \exp\left(\frac{x}{\sqrt{D_n \tau_n}}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{D_n \tau_n}}\right) \\ &= C_1 \exp\left(\frac{x}{L_n}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{x}{L_n}\right) \end{aligned}$$

Mit den Randbedingungen folgt:

$$\begin{aligned} \Delta n_0 &= C_1 + C_2 \\ 0 &= C_1 \exp\left(\frac{d}{L_n}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{d}{L_n}\right) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Konstanten;

$$\begin{aligned} C_1 &= -\Delta n_0 \frac{\exp\left(-\frac{d}{L_n}\right)}{\exp\left(+\frac{d}{L_n}\right) - \exp\left(-\frac{d}{L_n}\right)} \\ C_2 &= \Delta n_0 \left(1 + \frac{\exp\left(-\frac{d}{L_n}\right)}{\exp\left(+\frac{d}{L_n}\right) - \exp\left(-\frac{d}{L_n}\right)}\right) \end{aligned}$$

- (c) Ein allgemeinerer Ausdruck für die Störstellen-Rekombinationsrate hat folgende Form:

$$r = \frac{np - n_i^2}{\tau_p n + \tau_n p} \quad (3)$$

Vereinfachen Sie die Gleichung (3) so weit wie möglich für den Fall, dass wir die Anzahl der Löcher in einem stark n-dotierten Halbleiter betrachten. Die Löcheranzahl

und die Elektronenanzahl sei durch Photogeneration über die Gleichgewichtsanzahl im unbeleuchteten Halbleiter (n_0 und p_0) erhöht, wobei $p \ll n_0$ und $n \cong n_0$ gelten sollen. [2P]

Wir schreiben für die Anzahl der Ladungsträger $n = n_0 + \Delta n$ und $p = p_0 + \Delta p$

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{(n_0 + \Delta n)(p_0 + \Delta p) - n_i^2}{\tau_p(n_0 + \Delta n) + \tau_n(p_0 + \Delta p + p_i)} \\
 &= \frac{\overbrace{n_0 p_0}^{=n_i^2} + \Delta n p_0 + \Delta p n_0 + \Delta n \Delta p - n_i^2}{\tau_p(n_0 + \Delta n) + \tau_n(p_0 + \Delta p)} \\
 &= \frac{\Delta n p_0 + \Delta p n_0 + \Delta n \Delta p}{\tau_p(n_0 + \Delta n) + \tau_n(p_0 + \Delta p)}
 \end{aligned}$$

Aus den Informationen der Aufgabenstellung lässt sich schließen, dass durch die Ladungsträgerinjektion die Anzahl der Majoritäten fast unverändert bleibt, die der Minoritäten aber stark steigt. Daher können wir im Nenner alle Größen bis auf n_0 vernachlässigen. Im Zähler sind aus dem gleichen Grund gegenüber $\Delta p n_0$ die anderen Terme klein.

$$r = \frac{\Delta p n_0}{\tau_p n_0} = \frac{\Delta p}{\tau_p}$$

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$= 6,63 \cdot 10^{-34}$	J s
	$\hbar$	$= \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$	J s
Avogadro-Konstante	N_A	$= 6,02 \cdot 10^{23}$	mol ⁻¹
Bohr'scher Radius	a_0	$= 5,29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$= 1,60 \cdot 10^{-19}$	A s
Atomare Masseneinheit	u	$= 1,66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_0	$= 9,11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$= 1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$= 1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$= 8,85 \cdot 10^{-12}$	A s V ⁻¹ m ⁻¹
Permeabilitätskonstante	μ_0	$= 4\pi \cdot 10^{-7}$	V s A ⁻¹ m ⁻¹
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$= 3,0 \cdot 10^8$	m s ⁻¹
Boltzmann-Konstante	k_B	$= 1,38 \cdot 10^{-23}$	J K ⁻¹
Kreiszahl	π	$= 3,14$	
Euler'sche Zahl	e	$= 2,72$	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit → Kilogramm	$1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenvolt → Joule	$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Taylor-Reihe

Entwicklung einer Funktion $f(x)$ in einer Taylor-Reihe um x_0 :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$

Hermite'sche Polynome

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

bitte wenden ...

Integrale

$$\begin{aligned}
\int (\sin ax)^2 dx &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax \\
\int (\cos ax)^2 dx &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax \\
\int \sin ax \cos ax dx &= \frac{1}{2a} (\sin ax)^2 \\
\int x (\sin ax)^2 dx &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x \sin 2ax - \frac{1}{8a^2} \cos 2ax
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx &= 0 \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}
\end{aligned}$$

Additionstheoreme

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\
\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\
\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\
\sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \\
\cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \\
\sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \\
\sin^2 \alpha &= \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) \\
\cos^2 \alpha &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)
\end{aligned}$$