

Lichttechnisches Institut
Universität Karlsruhe (TH)
Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer
Engesserstraße 13
76131 Karlsruhe

Festkörperelektronik
Klausur
5. Oktober 2007

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

E-Mail-Adresse:

Erreichte Punktzahl:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Punkte								
Max	5,5	7	7	8	8,5	6,5	7,5	50

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteilte Formelsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 50, zum Bestehen notwendige Punktzahl: 21.
- In eckigen Klammern angegebene Zahlen sind die erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Bitte schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf von der Uni gestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Bitte nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie bitte jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.

1. Doppelspaltexperimente

- (a) Erläutern Sie für eine ebene Welle die Bedeutung der folgenden Größen:

- Wellenvektor
- Phase
- Amplitude
- Phasengeschwindigkeit

[je 0,5 P]

Für eine ebene Welle kann man den komplexen Ansatz $A \exp j(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$ machen. Hier ist A die Amplitude, die Auslenkung der Schwingung. Als Phase fasst man den Term $\vec{k}\vec{r} - \omega t$ zusammen, der den Schwingungszustand der Welle in Abhängigkeit von Ort und Zeit angibt. Somit ist die Phasengeschwindigkeit die Geschwindigkeit, mit der sich ein Punkt mit bestimmter Phase bewegt. Im Fall der ebenen Welle ist das $v_{Ph} = \omega/k$. Der Wellenvektor zeigt in die Ausbreitungsrichtung der Welle. Er ist ein Maß dafür, wie stark sich die Phase in einer bestimmten Richtung ändert.

- (b) Was passiert beim Doppelspaltexperiment für Elektronen und Licht schwacher und hoher Intensität? Welche Schlüsse kann man daraus ziehen? [2,5 P]

Für alle drei Fälle kann auf einem Detektionsschirm ein Interferenzmuster beobachtet werden. Gleichzeitig zeigt sich, vor allem in Experimenten mit Wellen schwacher Intensität, der Quantencharakter des Lichts und der Elektronen im sukzessiven Auftreffen einzelner Photonen und Elektronen auf dem Schirm, die mit der Zeit das Interferenzmuster aufbauen. Jeder Versuch, den Weg einzelner Elektronen oder Photonen durch die Spalte zu bestimmen, führt zum Verschwinden der Interferenzeffekte. Deutlich wird hier der Welle-Teilchen-Dualismus sowohl der elektromagnetischen als auch der Materiewellen, d.h. beide verhalten sich in gewissen Situationen wie eine Welle, in anderen wie ein Teilchen, nie aber sind gleichzeitig Wellen- und Teilchenphänomene zu sehen.

- (c) In einem modifizierten Doppelspaltexperiment wird vor den unteren Spalt ein Plättchen gestellt, das die Polarisierung des Lichts um 90° dreht. Das einfallende Licht sei linear in die x-Richtung polarisiert (siehe Abbildung 1). Da nun Licht, das durch den oberen Spalt kommt orthogonal zum Licht polarisiert ist, das den unteren Spalt passiert hat, kann man den Weg der Photonen am Schirm mit einer Polarisationsmessung rekonstruieren. Was erwarten Sie für die Intensitätsverteilung auf dem Schirm? [1 P]

Nach Durchgang durch den Polarisationsdreher ist das Licht in $\pm z$ -Richtung polarisiert, also orthogonal zur ursprünglichen Polarisierung. Damit ist der Weg eines jeden Photons zwar rekonstruierbar, man wird aber keine Interferenzen sehen, da orthogonale Polarisierungen nicht interferieren können. [Eine interessante Abwandlung des

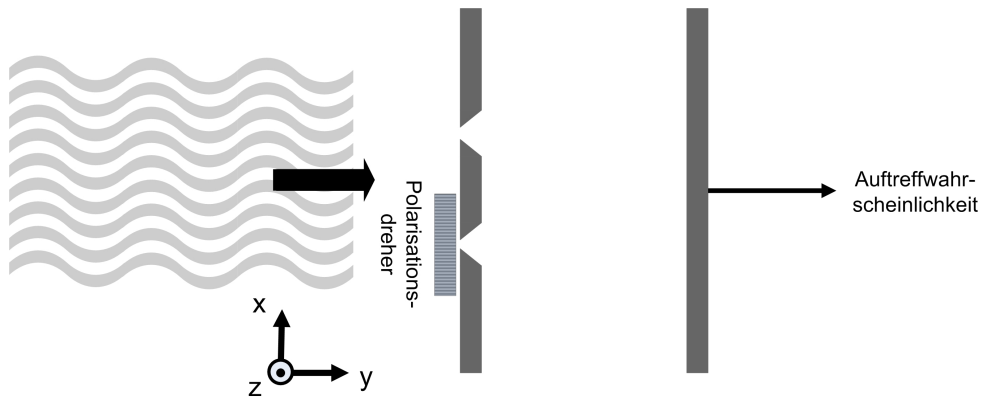


Abb. 1: Doppelspalt-Experiment mit polarisiertem Licht

Experiments ist der so genannte „Quantenradierer“. Hier benutzt man verschränkte Photonen. In diesem Zustand werden zwei oder mehr Teilchen durch eine gemeinsame Wellenfunktion beschrieben. Der (Einzel-)Zustand des einen Teilchens ist dann nicht unabhängig von dem des anderen. So kann man zum Beispiel die Messung der Polarisation eines Photons Gewissheit über die Polarisation des verschränkten Partners gewinnen. Im Doppelspaltexperiment mit Polarisatoren kann man so durch „Speichern“ des einen Photons und Messung an diesem feststellen, durch welchen Spalt das andere gekommen ist. Dieser Vorgang zerstört die Interferenz. Zerstört man die „Welcher-Weg“-Information bevor Sie beobachtet werden kann, werden die Interferenzen wiederhergestellt.]

2. Tunneln

- (a) Eine ebene Elektronen-Welle mit der Energie 0,5 eV trifft eine unendlich dicke Potentialbarriere der Höhe 1 eV. Ist es wahrscheinlicher ein Elektron im ersten Angström der Barriere zu finden oder weiter innerhalb der Barriere? [2,5 P]

Die Wellenzahl innerhalb der Barriere ergibt sich zu:

$$k = \frac{\sqrt{2m(W - V_0)}}{\hbar} = j \cdot \kappa = j3,62 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

Als Ansatz für die von links einlaufende Welle wählt man:

$$\psi = te^{jkx} = te^{-\kappa x}$$

Die Wahrscheinlichkeit, das Elektron im inneren des ersten $\text{\AA}$ (10^{-10}m) der Barriere zu finden (wir gehen von einer Barriere aus, die bei $x = 0$ beginnt und in positiver x -Richtung liegt), berechnen wir zu:

$$P_1 = \int_0^{x_0} |\psi|^2 dx = \int_0^{x_0} |t|^2 e^{-2\kappa x} dx = |t|^2 \frac{1}{-2\kappa} |e^{-2\kappa x}|_0^{x_0} = \frac{|t|^2}{-2\kappa} (e^{-2\kappa x_0} - 1)$$

Und gleichermaßen für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Rest der Barriere:

$$P_{Rest} = \int_{x_0}^{\infty} |\psi|^2 dx = \int_{x_0}^{\infty} |t|^2 e^{-2\kappa x} dx = |t|^2 \frac{1}{-2\kappa} |e^{-2\kappa x}|_{x_0}^{\infty} = \frac{|t|^2}{-2\kappa} (-e^{-2\kappa x_0})$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} P_1 &= |t|^2 \frac{1}{2\kappa} \cdot 0,515 \\ P_{Rest} &= |t|^2 \frac{1}{2\kappa} \cdot 0,485 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, das Elektron im ersten $\text{\AA}$ der Barriere zu finden, ist also größer als die Wahrscheinlichkeit, es im Rest der Barriere zu entdecken.

- (b) Nun emittieren Sie die Elektronen gezielt aus einer Quelle im Abstand Q von der Barriere. Dabei kann man die Elektronen durch Gaußsche Materiewellenpakete beschreiben (siehe Abbildung 2). Skizzieren und erklären Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten zu folgenden Zeitpunkten:

- i. kurz vorm Auftreffen der Pulsfront auf die Barriere.
- ii. beim Auftreffen des Maximums des Pulses auf die Barriere.
- iii. einige Zeit nach Auftreffen des Pulses auf die Barriere.

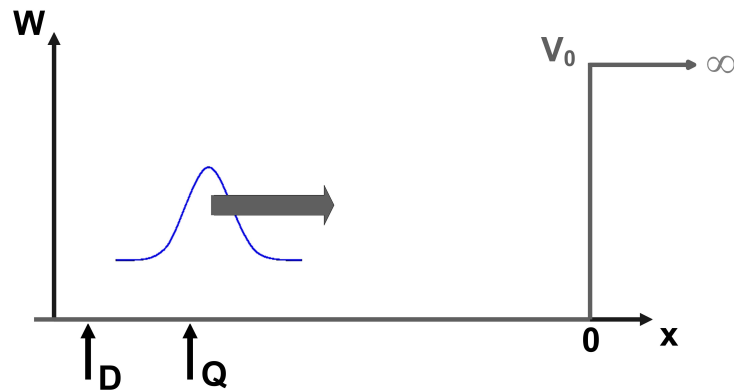


Abb. 2: Gaußsches Wellenpaket trifft auf Potentialbarriere

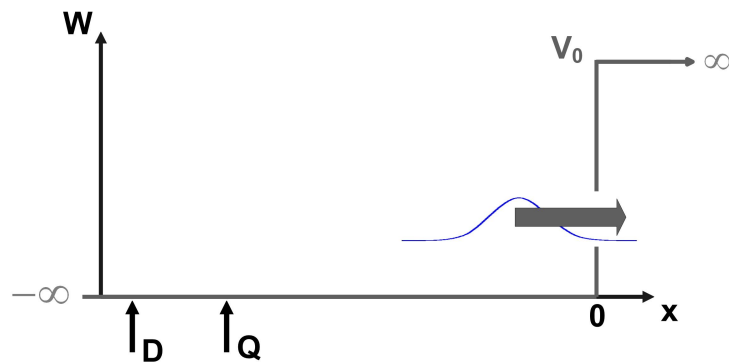


Abb. 3: Gaußsches Wellenpaket trifft auf Potentialbarriere Auftreffen der Pulsfront

Gehen Sie erneut von $W < V_0$ aus. [2,5 P]

Ein wichtiger Aspekt bei der Propagation von Materiewellenpaketen ist die Dispersion. Je nach Breite des Ausgangspulses wird sich das Paket also während der Propagation verbreitern und erniedrigen. Trifft der Puls auf die Barriere, dringt ein Teil der Welle in die Barriere ein, letztlich wird aber das gesamte Paket reflektiert. Damit ergibt sich in der Barriere eine exponentiell abfallende Aufenthaltswahrscheinlichkeit, vor der Barriere interferieren einlaufende Teile des Pakets mit den reflektierten (siehe Abbildungen 3 bis 5).

- (c) Mit Hilfe eines Detektors im Abstand D von der Barriere können Sie Elektronen nachweisen, die Quelle der Elektronen ist in Aufgabenteil b) beschrieben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein von der Quelle emittiertes Elektron detektiert? Was ändert sich, wenn die Barriere endlich ausgedehnt ist? [1 P]

Die Materiewelle wird zwar in die Barriere eindringen, aber letztlich reflektiert. Somit muss jedes einfallende Elektron nach einiger Zeit am Detektor ankommen. Sobald die

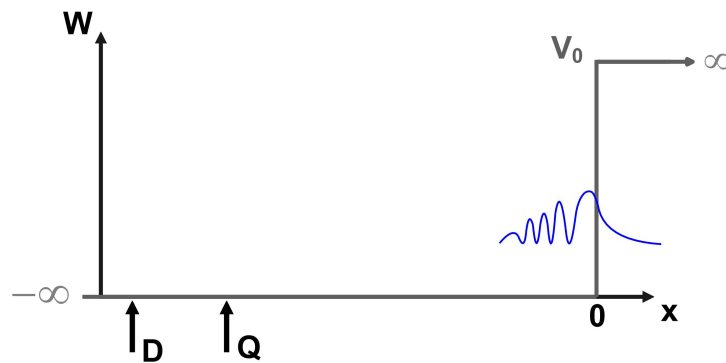


Abb. 4: Gaußsches Wellenpaket trifft auf Potentialbarriere Auftreffen des Pulsmaximums

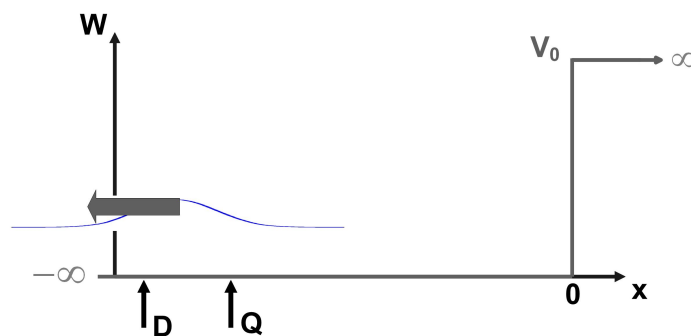


Abb. 5: Gaußsches Wellenpaket trifft auf Potentialbarriere nach Auftreffen

Barriere eine endliche Ausdehnung bekommt, besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron die Barriere durchtunnelt und auf der anderen Seite weiterpropagiert.

- (d) Wie können Sie abschätzen, wie viel Zeit von Emission bis zur Detektion eines reflektiertes Elektron vergeht? [1 P]

Das Maximum des Wellenpakets breitet sich mit der Gruppengeschwindigkeit v_{Gr} aus, diese stimmt mit der klassischen Teilchengeschwindigkeit überein. Ist sie bekannt, so kann durch $t = (Q + D)/v_{Gr}$ die Zeit zwischen Emission und Detektion abgeschätzt werden. Nicht berücksichtigt werden hier Verzögerungseffekte bei der Reflexion.

3. Unendlicher Potentialtopf

- (a) Skizzieren Sie die niedrigsten drei Energieniveaus (W_1 , W_2 , und W_3) in einem unendlichen Potentialtopf und die zugehörigen Wellenfunktionen. [2 P]

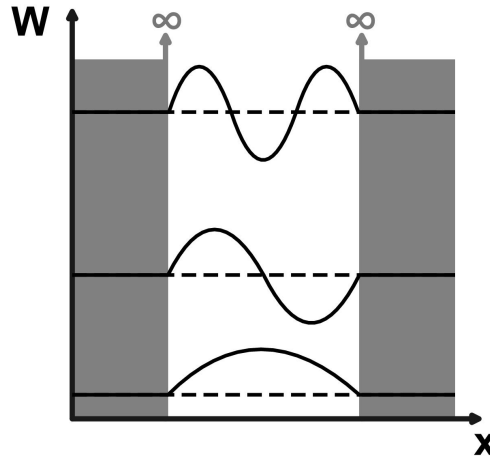


Abb. 6: Energieniveaus im unendlichen Potentialtopf

- (b) Ein Elektron befindet sich in einem Überlagerungszustand $\psi(x, t) = a\psi_1(x, t) + b\psi_2(x, t) + c\psi_3(x, t)$; $\psi_1(x, t)$, $\psi_2(x, t)$ und $\psi_3(x, t)$ seien die zeitabhängigen Lösungen der Schrödingergleichung für die niedrigsten drei Eigenenergien mit den Konstanten a , b und c . Zeigen Sie, dass die Überlagerungsfunktion die (zeitabhängige) Schrödingergleichung löst. [2 P]

Setzt man ψ in der Schrödingergleichung ein, so ergibt sich:

$$j\hbar \frac{\partial}{\partial t} (a\psi_1(x, t) + b\psi_2(x, t) + c\psi_3(x, t)) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (a\psi_1(x, t) + b\psi_2(x, t) + c\psi_3(x, t)) \quad (1)$$

Die Differentialoperatoren wirken jeweils auf die einzelnen Summanden und die Konstanten können nach vorne gezogen werden. Umsortieren ergibt dann:

$$a \left(j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_1(x, t) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_1(x, t) \right) + b \left(j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_2(x, t) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_2(x, t) \right) + c \left(j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_3(x, t) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_3(x, t) \right) = 0 \quad (2)$$

Die Terme in den Klammern werden alle zu Null, da nach Aufgabenstellung die Wellenfunktionen ψ_i die Schrödingergleichung lösen.

- (c) Wie müssen die Konstanten in b) gewählt werden, damit Sie bei einer Messung genau mit doppelt so hoher Wahrscheinlichkeit W_2 erhalten wie jeweils W_1 oder W_3 ? [1 P]

Die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Eigenwert zu messen, ist proportional zum Betragsquadrat des Vorfaktors. Somit muss $|b|^2 = 2|a|^2 = 2|c|^2$ sein. Unter Berücksichtigung der Normierung kann man so zum Beispiel $b = 1/\sqrt{2}$, $a = c = 1/2$ wählen.

- (d) Stellen Sie die Gleichung auf, mit der Sie den Energieerwartungswert und den Ortserwartungswert für den Überlagerungszustand ψ nach b) errechnen können. Ist der Ortserwartungswert zeitabhängig? Bestimmen Sie den Energieerwartungswert, wenn die Konstanten die in c) ermittelten Werte besitzen. [2 P]

Einen Erwartungswert zum Operator $\hat{A}$ erhalten wir durch:

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{A} \psi dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi dx} \quad (3)$$

Der Ortsoperator ist $\hat{x} = x$ der Energieoperator $\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. In unserem Fall erwarten wir eine Zeitabhängigkeit des Ortserwartungswerts. Für den Energieerwartungswert können wir Ausnutzen, dass in unserem Überlagerungszustand die Eigenfunktion zu W_2 doppelt so stark gewichtet wie die zu W_1 und W_3 . Somit erwarten wir $\langle W \rangle = (W_1 + 2W_2 + W_3)/4$.

4. Dreidimensionale Quantenpunkte

In der Nanotechnologie spielen 3-dimensionale Quantenpunkte eine wachsende Rolle. In erster Näherung entsprechen diese Punkte einem 3-dimensionalen Potentialtopf. Betrachten Sie einen würfelförmigen Quantenpunkt der Kantenlänge L .

- (a) Zeigen Sie, dass der Betrag des Wellenvektors $|\vec{k}|$ eines Elektrons im Quantenpunkt nur diskrete Werte annehmen kann und berechnen Sie diese. Nehmen Sie zur Vereinfachung des Problems außerhalb des Quantenpunktes ein Potential $V = \infty$ an. [2 P]

Wir können das dreidimensionale Problem in drei eindimensionale Probleme separieren. Jedes dieser entspricht einem unendlichen Quantentopf der Länge L .

Ansatz für die Wellenfunktion: $\psi_x(x) = Ae^{jk_x x} + Be^{-jk_x x}$. Dies beschreibt die Überlagerung einer nach links und einer nach rechts laufenden ebenen Welle. Da das Potential zeitunabhängig ist, muß der zeitabhängige Term $e^{j\omega t}$ nicht weiter betrachtet werden. Für das Potential gilt:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & : x < 0 \\ 0 & : 0 \leq x \leq L \\ \infty & : L < x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \psi_x(0) = 0, \psi_x(L) = 0$$

$$\psi_x(0) = Ae^0 + Be^0 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow B = -A$$

$$\psi_x(L) = Ae^{jk_x L} - Ae^{-jk_x L} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\stackrel{\text{Euler-Gl.}}{\Rightarrow} 2jA \sin k_x L = 0 \Leftrightarrow \sin k_x L = 0$$

$$\Rightarrow k_x = \frac{n_x \pi}{L} \text{ bei nichtverschwindender Amplitude}$$

Entsprechend gilt: für $k_y = \frac{n_y \pi}{L}$ und $k_z = \frac{n_z \pi}{L}$. Wenn die Komponenten des Wellenvektors $\vec{k}$ diskret sind, so kann auch der Betrag des Wellenvektors nur diskrete Werte annehmen.

- (b) Zeigen Sie mit Hilfe der zeitunabhängigen (stationären) Schrödingergleichung $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi = W \psi$, dass gilt: $W(|\vec{k}|) = \frac{\hbar^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)}{2m}$. [2 P]

Ansatz: $\psi_x(x) = Ae^{jk_x x} + Be^{-jk_x x}$

Einsetzen in die SG liefert:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (Ae^{jk_x x} + Be^{-jk_x x}) &= W_x (Ae^{jk_x x} + Be^{-jk_x x}) \\ -\frac{\hbar^2}{2m} (-Ak_x^2 e^{jk_x x} - Bk_x^2 e^{-jk_x x}) &= W_x (Ae^{jk_x x} + Be^{-jk_x x}) \end{aligned}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} k_x^2 \left(A e^{j k_x x} + B e^{-j k_x x} \right) = W_x \left(A e^{j k_x x} + B e^{-j k_x x} \right)$$

$$W_x = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m}$$

Entsprechend gilt: $W_y = \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m}$ und $W_z = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$ und damit $W(|\vec{k}|) = \frac{\hbar^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)}{2m}$.

- (c) Bestimmen Sie die Quantenzahlen zur Energie $W = \frac{3\hbar^2 \pi^2}{mL^2}$. Lassen sich die Quantenzahlen eindeutig bestimmen? [2 P]

Die Quantenzahlen lassen sich nicht eindeutig bestimmen. Folgende Kombinationen $n = (n_x, n_y, n_z)$ sind möglich:

$$n_1 = (2, 1, 1), \quad n_2 = (1, 2, 1), \quad n_3 = (1, 1, 2)$$

- (d) Geben Sie die Formel für die Wahrscheinlichkeit an, daß sich ein Elektron in einem würfelförmigen Raumbereich genau in der Mitte des Quantenpunkts befindet, dessen Volumen einem Achtel des gesamten Quantenpunkts entspricht? Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit muss **nicht** berechnet werden! [1 P]

$$p = \int_a^b \int_a^b \int_a^b \psi^*(x, y, z) \psi(x, y, z) dz dy dx$$

Wegen $\psi(x, y, z) = \psi_x \psi_y \psi_z$ gilt:

$$p = \int_{\frac{1}{4}L}^{\frac{3}{4}L} \psi_x^* \psi_x dx \cdot \underbrace{\int_{\frac{1}{4}L}^{\frac{3}{4}L} \psi_y^* \psi_y dy}_{\hat{=} 1. Integral} \cdot \underbrace{\int_{\frac{1}{4}L}^{\frac{3}{4}L} \psi_z^* \psi_z dz}_{\hat{=} 1. Integral}$$

- (e) Beim Übergang eines Elektrons aus dem Zustand $n^* = (2, 1, 1)$ in den Zustand $n = (1, 1, 1)$ werde die frei werdende Energie in Form von infrarotem Licht emittiert. Die Quantenpunkte emittieren infrarotes Licht der Wellenlänge $\lambda = 3 \mu\text{m}$. Welche Kantenlänge L haben die Quantenpunkte? [1 P]

Die frei werdende Energie berechnet sich zu:

$$\Delta W = W_{x=2} - W_{x=1} = \frac{\hbar^2 \pi^2 (2^2 - 1^2)}{2mL^2}$$

Mit $\Delta W = h\nu$ und $c = \lambda\nu$ folgt:

$$L = 1,65 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

- (f) Beschreiben Sie den Prozess der Emission von Licht in einer Schicht Galliumarsenid. Welcher Parameter ist hier für die Wellenlänge des Lichts maßgeblich? [1 P]

In direkten Halbleitern wie Galliumarsenid kann ein Photon erzeugt werden, wenn ein Elektron-Lochpaar über die Bandlücke rekombiniert. Das ausgesandte Photon hat etwa die Energie der Bandlücke, da sich Elektronen und Löcher meistens in der Nähe der Extrema der Bänder aufhalten. Also legt in der GaAs-Schicht ein Materialparameter, nämlich die Bandlücke, die Emissionswellenlänge fest. Die Bandlücke kann nur begrenzt und mit hohem Aufwand verändert werden. Im Quantenpunkt dagegen legt die Geometrie die Emissionswellenlänge fest, man muss also „nur“ einen Punkt geeigneter Größe herstellen.

5. Elektronen in Kristallen

- (a) Nennen und beschreiben Sie zwei Methoden zur Herstellung von Halbleiterkristallen. [1 P]

Halbleiterkristalle können aus der Schmelze gezogen werden. Hierbei wird ein Kristallkeimling in geschmolzenes, hochreines Ausgangsmaterial getaucht und dann langsam aus dem Tiegel gezogen. Die Atome aus der Schmelze lagern sich geordnet an den Keimling an, so dass mit dessen Orientierung das Kristallgitter vorgegeben werden kann. Bei der Epitaxie werden die Ausgangsmaterialien in fester, flüssiger oder, in den meisten Fällen, in Gasphase an einem Substrat vorbeigeleitet. Die Atome lagern bilden Schicht für Schicht eine kristalline Dünnschicht.

- (b) Wie berechnet man in einem intrinsischen Halbleiter mit bekannten Materialparametern und unter bekannten Bedingungen (Druck, Temperatur...) im thermodynamischen Gleichgewicht die Ladungsträgerdichte im Leitungsband? Geben Sie die Formel an und beschreiben Sie die nötigen Schritte zu ihrer Herleitung. Welche Annahmen und Näherungen werden gemacht? [2 P]

Zur Berechnung der Ladungsträgerdichte wird die Anzahl der Zustände pro Energieintervall $g(W)$ und deren Besetzungswahrscheinlichkeit $f(W)$ benötigt. Dann muss über das gesamte Band integriert werden:

$$n = \int_{\text{Leitungsband}} g(W) f(W) dW \quad (4)$$

Im Fall von Elektronen oder Löchern gibt eine Fermiverteilung die Besetzungswahrscheinlichkeit an, hier gehen die Temperatur und das Fermi-niveau, das nur von thermodynamischen Zustandsgrößen und Materialparametern abhängt, ein. Die Zustandsdichte hängt von der Geometrie des Kristalls ab. Wir haben zu ihrer Berechnung eine Einzelelektronen-Näherung für ein Elektron im Potentialkasten mit periodischen Randbedingungen gemacht. Heraus kamen Zustände mit diskreten Wellenvektoren, die wir lediglich noch im Impulsraum abzählen mussten. Aus dem Zuwachs der Zustände pro Energieintervall ergab sich die Zustandsdichte.

- (c) Berechnen Sie die Ladungsträgerdichten in einem Silizium-Plättchen, das mit 10^{14} Bor-Atomen pro Kubikzentimeter dotiert ist für 300 K und für 470 K. Bor ist ein Element der 3. Hauptgruppe und bildet in Silizium ein Energieniveau, das 0,045 eV von der Bandkante entfernt liegt. Die effektive Masse der Elektronen im Leitungsband entspricht der Masse des freien Elektrons und die effektive Masse der Löcher $0,8 \cdot m_e$ bei 300 K, respektive $1,24 \cdot m_e$ und $0,88 \cdot m_e$ bei 470 K. Gehen Sie zunächst von einem Fermi-niveau in der Mitte der Bandlücke aus. Hinweis: $2 \left(\frac{kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} = 2,92 \cdot 10^{-70} m^{-3} kg^{-3/2}$ [4,5 P]

Zunächst betrachten wir den Fall bei 300 K. Wir müssen zunächst prüfen, wie viele Dotierstellen ionisiert sind und wie hoch die Ladungsträgerdichte im intrinsischen Halbleiter bei gleicher Temperatur ist. Für die Ionisationswahrscheinlichkeit bei 300 K ergibt sich mit der Bandlückenenergie von Silizium bei 1,1 eV:

$$n_A^- = n_A f_A(W_A) = \frac{n_A}{1 + 2e^{\frac{W_A - W_F}{k_B T}}} \approx n_A = 10^{14} \text{ cm}^{-3} \quad (5)$$

Somit sind schon bei 300 K alle Dotierstellen ionisiert, bei 470 K daher auch. Die intrinsische Ladungsträgerdichte bei 300 K errechnet sich zu:

$$n_i = \sqrt{N_L N_V} \cdot e^{-\frac{W_G}{2k_B T}} = 2 \left(\frac{kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot m_e^{3/4} (0,8 \cdot m_e)^{3/4} \cdot e^{-\frac{W_G}{2k_B T}} = 1,24 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3} \quad (6)$$

Die intrinsische Ladungsträgerdichte liegt also bei 300 K deutlich unter der Dichte der ionisierten Störstellen, weswegen intrinsische Elektronen und Löcher vernachlässigt werden können und die Ladungsträgerdichte 10^{14} cm^{-3} entspricht. Für 470 K ergibt sich die intrinsische Ladungsträgerdichte zu:

$$n_i = \sqrt{N_L N_V} \cdot e^{-\frac{W_G}{2k_B T}} = 2 \left(\frac{kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot (1,24 \cdot m_e)^{3/4} (0,88 \cdot m_e)^{3/4} \cdot e^{-\frac{W_G}{2k_B T}} = 6,75 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3} \quad (7)$$

Damit müssen zur Berechnung der Ladungsträgerdichte

$$p = \sqrt{\frac{n_A^2}{4} + n_i^2} + \frac{n_A}{2} = 1,34 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3} \quad (8)$$

und

$$n = \frac{n_i^2}{p} = 3,41 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3} \quad (9)$$

angesetzt werden

- (d) Berechnen Sie für 300 K die Lage des intrinsischen Fermineiveaus und des Fermineiveaus des dotierten Halbleiters. [1 P]

Mit

$$W_i = \frac{1}{2}(W_L + W_V) + \frac{1}{2}k_B T \ln\left(\frac{N_V}{N_L}\right) = \frac{1}{2}(W_L + W_V) + \frac{3}{4}k_B T \ln\left(\frac{m_{\text{eff,h}}}{m_{\text{eff,e}}}\right) \quad (10)$$

folgt $W_i = W_V + 0,5457 \text{ eV}$ für den intrinsischen Halbleiter. Für den Abstand des Fermineiveaus im dotierten Halbleiter vom intrinsischen Fermineau ergibt sich:

$$W_i - W_F = kT \ln n_a/n_i = 0,23 \text{ eV} \quad (11)$$

Damit liegt das Fermineau im dotierten Fall bei $W_F = W_V + 0,32 \text{ eV}$.

6. Ströme in Halbleitern

- (a) Beschreiben Sie die typischen Veränderungen der Beweglichkeit und der Ladungsträgerkonzentration mit der Temperatur in einem Halbleiter. Was folgt daraus für die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit? [1 P]

Die Beweglichkeit der Ladungsträger wird von zwei wichtigen Prozessen beeinflusst. Bei hohen Temperaturen überwiegt der Einfluss der Streuung an Phononen, die mit steigender Temperatur zunimmt und so die Beweglichkeit reduziert. Bei niedrigen Temperaturen spielt die Streuung an Störstellen (vor allem an Dotierungen im mäßig oder stark dotierten Halbleiter) eine dominierende Rolle, dieser Streuprozess ist bei steigenden Temperaturen weniger effizient.

Die Ladungsträgerkonzentration steigt im intrinsischen Halbleiter exponentiell mit der Temperatur, da freie Ladungsträger thermisch die Bandlücke überwinden müssen. Im dotierten Halbleiter überwiegt zunächst die Generation von Ladungsträger aus ionisierten Dotierstellen, die ebenfalls exponentiell mit der Temperatur steigt. Ist dieses Reservoir erschöpft, so bleibt die Ladungsträgerdichte zunächst konstant, bis die Generation über die Bandlücke wieder relevant wird. Die Leitfähigkeit ist proportional zu Beweglichkeit und Ladungsträgerdichte, weswegen beide oben beschriebenen Tendenzen sich überlagern.

- (b) Ein lateral gaußförmiger Laserstrahl wird in einem kubischen undotierten Galliumarsenid-Plättchen mit Kantenlänge L absorbiert (siehe Abbildung 7). Dadurch entsteht ein ebenfalls Gaußförmiges Profil von Elektronen-Loch-Paaren der Form $n(x, y) = p(x, y) = g_0 \exp\left(-\left(\frac{(x-L/2)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y-L/2)^2}{2\sigma_y^2}\right)\right)$. Berechnen Sie einen Ausdruck für den Diffusionsstrom in diesem Moment. [2 P]

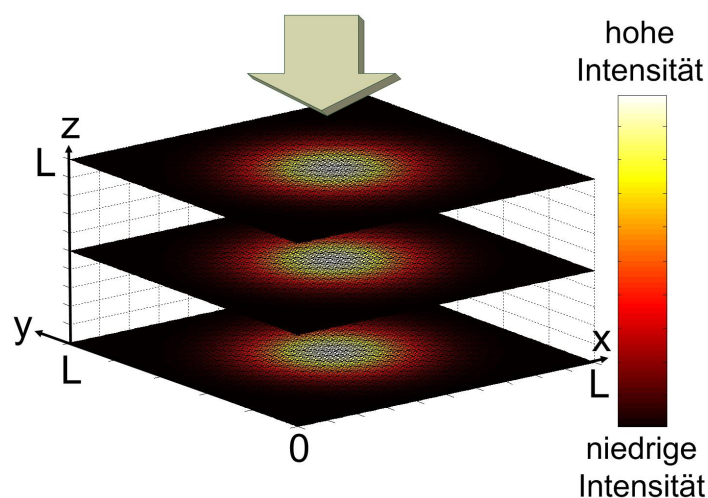


Abb. 7: Gaußscher Laserstrahl trifft auf Halbleiterklötzchen

Der Diffusionsstrom ergibt sich zu:

$$\vec{J}_D(x, y, z) = eD_n \nabla n(x, y) - eD_p \nabla p(x, y) = eD_n \begin{bmatrix} \frac{\partial n}{\partial x} \\ \frac{\partial n}{\partial y} \\ 0 \end{bmatrix} - eD_p \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Da in der z-Komponente die Ladungsträgerdichten konstant sind, fließt hier kein Diffusionsstrom. Führt man die partiellen Ableitungen aus und setzt ein, erhält man:

$$\begin{aligned} \vec{J}_D(x, y, z) = & eD_n g_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_x} (x - L/2) \exp - \left(\frac{(x-L/2)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y-L/2)^2}{2\sigma_y^2} \right) \\ \frac{1}{\sigma_y} (y - L/2) \exp - \left(\frac{(x-L/2)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y-L/2)^2}{2\sigma_y^2} \right) \\ 0 \end{bmatrix} \\ & - eD_p g_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_x} (x - L/2) \exp - \left(\frac{(x-L/2)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y-L/2)^2}{2\sigma_y^2} \right) \\ \frac{1}{\sigma_y} (y - L/2) \exp - \left(\frac{(x-L/2)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y-L/2)^2}{2\sigma_y^2} \right) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

- (c) Geben Sie die Gleichung an, mit der Sie die Entwicklung der freien Elektronendichten berechnen können. Erläutern Sie, wie die Entwicklung des Systems nach Ende des Pulses ablaufen könnte. [1,5 P]

Zur Berechnung der Entwicklung der Elektronendichte benutzen wir die Kontinuitätsgleichung für Elektronen:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{e} \nabla \cdot \vec{J} + g_n - r_n \quad (14)$$

Kurz nach Ende des Pulses ergibt sich ein Konzentrations-Ungleichgewicht beider Ladungsträgersorten im Halbleiter. Daher wird ein Diffusionsstrom von Löchern und Elektronen zum Rand des Plättchens auftreten. Die Ladungsverteilungen sind genau gleich zu Beginn und bleiben das auch, falls die Diffusionskonstanten und Rekombinationsraten beider Ladungsträgersorten gleich sind. Dann treten keine Felder auf und die Überschussladungsträger werden durch Rekombination abgebaut. Gleichzeitig erzeugt die Diffusion eine immer homogenere Verteilung der Ladungsträger. Im Falle ungleicher Konstanten kann es zu Ladungstrennung und damit verbundenen Feldern ähnlich der Situation im pn-Übergang kommen.

- (d) Nun wird ein p-dotiertes Plättchen mit einem kurzen Puls homogen beleuchtet, es herrsche Störstellenerschöpfung. Die erzeugte Elektronendichte ist $\Delta n_0 \ll p$. Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf der Minoritäts-Ladungsträgerdichte. Gehen Sie von einer Rekombinationsrate von $r_n = \Delta n / \tau_n$ aus. [2 P]

Wieder starten wir mit der Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{e} \nabla \cdot \vec{J} + g_n - r_n \quad (15)$$

Da wir die Situation ab dem Ende des Pulses betrachten, werden keine Elektronen-Lochpaare mehr durch Lichteinstrahlung erzeugt. Die Überschuss-Ladungsträger sind gleichmäßig verteilt und es existieren keine Raumladungen, somit werden keine Ströme fließen. Wir können eine Gleichung für die Überschussladungsträgerdichte aufstellen:

$$\frac{\partial \Delta n}{\partial t} = -\Delta n / \tau_n \quad (16)$$

Diese Differentialgleichung können wir einfach integrieren, wir setzen den Zeitpunkt des Pulsendes zu $t = 0$:

$$\ln(\Delta n) - \ln(\Delta n_0) = -\frac{t}{\tau_n} \rightarrow \Delta n = \Delta n_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right) \quad (17)$$

7. pn-Übergang

- (a) Skizzieren Sie das Raumladungsprofil in einem abrupten pn-Übergang ohne angelegte Spannung und bei Betrieb des pn-Übergangs in Vorwärtsrichtung. [1,5 P]

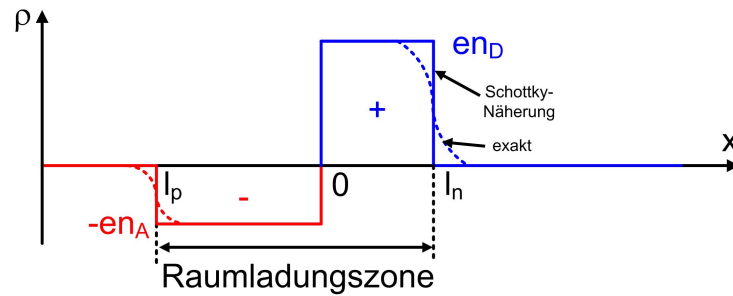


Abb. 8: Raumladungsprofil im pn-Übergang

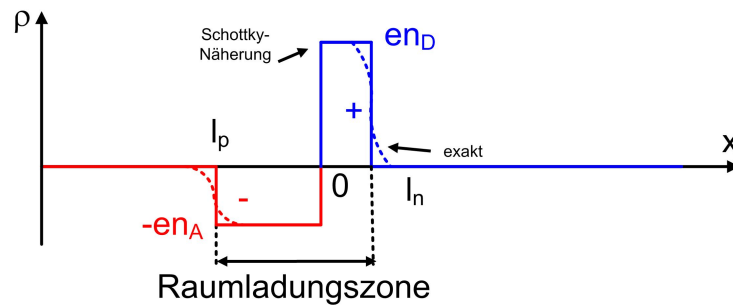


Abb. 9: Raumladungsprofil im pn-Übergang bei Durchlasspolung

- (b) Leiten Sie einen Ausdruck für das Potential im abrupten pn-Übergang ohne angelegte Spannung her. Die Dotierkonzentrationen seien n_A im p-Bereich und n_D im n-Bereich. Gehen Sie von Störstellenerschöpfung aus. [2,5 P]

Um das Potential herzuleiten, müssen wir, ausgehend von den bekannten Raumladungen, die Poisson-Gleichung lösen. Das Raumladungsprofil sieht wie folgt aus:

$$\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq -l_p \\ -en_A & \text{für } -l_p < x \leq 0 \\ +en_D & \text{für } 0 < x \leq +l_n \\ 0 & \text{für } x > l_n \end{cases} \quad (18)$$

Wir können die Gleichungen durch zweimaliges Integrieren lösen. Einmaliges Integrieren führt auf einen Ausdruck, der die erste Ableitung des elektrischen Potentials enthält. Dies ist aber gerade die Feldstärke im Halbleiter ($\vec{E} = -\nabla \phi$), wobei der Übergang zwischen den unterschiedlich dotierten Gebieten stetig sein muss und das Feld außerhalb der Raumladungszone Null ist. Aus der konstanten zweiten Ableitung des

Potentials erhalten wir erhalten eine lineare Abhängigkeit der Feldstärke vom Ort:

$$E(x) = -\frac{en_A}{\epsilon_r \epsilon_0}(x + l_p) \text{ für } -l_p < x < 0 \quad (19)$$

$$E(x) = +\frac{en_D}{\epsilon_r \epsilon_0}(x - l_n) \text{ für } 0 < x < +l_n \quad (20)$$

Zum Verlauf des Potentials gelangen wir durch eine weitere Integration. Wieder setzen wir einen stetigen Übergang des elektrischen Potentials zwischen den verschiedenen Bereichen an. Da das Feld einen linearen Verlauf hat, erwarten wir bei einer weiteren Integration quadratische Abhängigkeiten. Wie üblich können wir für das Potential ein Bezugsniveau frei wählen. Wir tun das zu $\phi = 0$ für den neutralen p -Bereich und erhalten so

$$\phi(x) = +\frac{en_A}{2\epsilon\epsilon_0}(x + l_p)^2 \quad (21)$$

für den Teil der Raumladungszone auf der p -Seite und

$$\phi(x) = -\frac{en_D}{2\epsilon\epsilon_0}(l_n - x)^2 + U_D \quad (22)$$

- (c) Skizzieren Sie die ideale U-I-Kennlinie einer pn-Diode. Erläutern Sie, was beim Anlegen von Durchlass- und Sperrspannung im Bauteil passiert. [2,5 P]

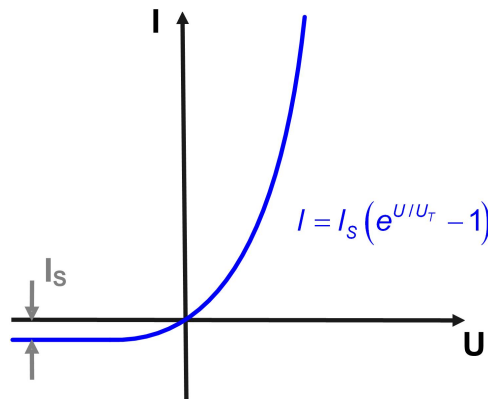


Abb. 10: U-I-Kennlinie der pn-Diode

Qualitativ können die Vorgänge im pn -Übergang in Durchlassrichtung folgendermaßen beschrieben werden. Durch die angelegte Spannung werden die freien Ladungsträger zunächst in die Raumladungszone gezogen. Diese können sie durchqueren und diffundieren dann in die neutrale Zone (die freien Elektronen diffundieren in das p -Gebiet, die Löcher in das n -Gebiet.) Dort treffen Sie auf freie Ladungsträger der jeweils anderen Sorte und rekombinieren. Die fehlenden Elektronen und Löcher werden über die Kontakte von der Quelle nachgeliefert. Der resultierende Strom steigt exponentiell an. Durch die Polung in Sperrrichtung werden freie Elektronen und Löcher weiter auseinander gezogen, die Ausdehnung der Raumladungszone nimmt zu. Bei endlicher Temperatur wird eine geringe Anzahl von Elektron-Loch-Paaren erzeugt, die durch

das innere Feld getrennt und über die Kontakte abgezogen werden, der nicht stark von der angelegten Spannung abhängt.

- (d) Warum ist es nicht möglich, die Diffusionsspannung an den Kontakten abzugreifen? Erläutern Sie den Sachverhalt mit einem Energie-Banddiagramm des pn-Übergangs einschließlich der Kontakte. [1 P]

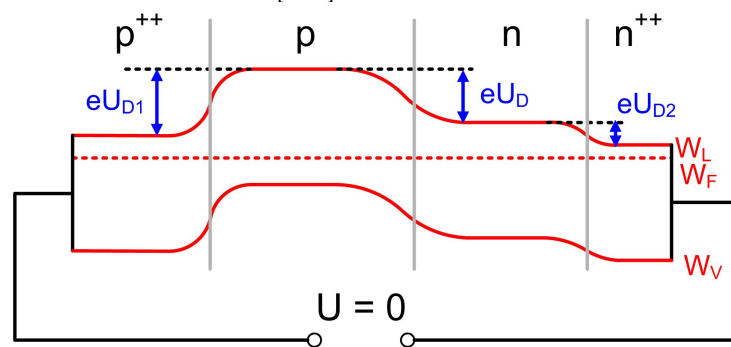


Abb. 11: Energie-Banddiagramm des pn-Übergangs

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$= 6,63 \cdot 10^{-34}$	J s
	$\hbar$	$= \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$	J s
Avogadro-Konstante	N_A	$= 6,02 \cdot 10^{23}$	mol ⁻¹
Bohrscher Radius	a_0	$= 5,29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$= 1,6 \cdot 10^{-19}$	A s
Atomare Masseneinheit	u	$= 1,66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$= 9,11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$= 1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$= 1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$= 8,85 \cdot 10^{-12}$	A s V ⁻¹ m ⁻¹
Permeabilitätskonstante	μ_0	$= 4\pi \cdot 10^{-7}$	V s A ⁻¹ m ⁻¹
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$= 3,0 \cdot 10^8$	m s ⁻¹
Boltzmann-Konstante	k_B	$= 1,38 \cdot 10^{-23}$	J K ⁻¹
Kreiszahl	π	$= 3,14$	
Euler'sche Zahl	e	$= 2,72$	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit → Kilogramm	$1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenvolt → Joule	$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$