Lichttechnisches Institut
Universität Karlsruhe (TH)
Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer
Engesserstraße 13
76131 Karlsruhe

Festkörperelektronik
Klausur
9. Oktober 2009

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

E-Mail-Adresse: ....

Erreichte Punktzahl: ....

Note: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Punkte								
Max	9	14	12	12	12	9	9	77

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteilte Formelsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 77, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 30.
- In Klammern angegebene Zahlen am Aufgabenende sind die erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Bitte schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf von der Universität gestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Versehen Sie bitte jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis und Ihre Immatrikulationsbescheinigung während der Klausur bereit.
- Bitte nur mit dokumentenechten Stiften schreiben. Verwenden Sie insbesondere keinen Bleistift und schreiben Sie nicht in roter Farbe.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle und mit den entsprechenden Einheiten anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. **Das freie Elektron**

a) In einem Elektronenmikroskop werden Elektronen mit einer Energie von $W = 10\,\mathrm{keV}$ verwendet. Berechnen sie die entsprechende de-Broglie Wellenlänge der Elektronen. Die nicht-relativistische Näherung sei gültig! [2P]

b) Gegeben sind folgende Dispersionsrelationen:

$$\omega_{\mathrm{Photon}}(k) = ck \tag{1}$$

$$\omega_{\mathrm{Elektron}}(k) = \frac{\hbar k^2}{2m_e} \tag{2}$$

Berechnen sie die Phasengeschwindigkeit v_{ph} und die Gruppengeschwindigkeit v_{g} in beiden Fällen. [4P]

c) Zeigen Sie durch Einsetzen in die zeitabhängige Schrödingergleichung, dass Gleichung 2 aus der Beschreibung freier Elektronen als ebene Wellen,

$$\psi(x) = A \exp(j(kx - \omega t)), \tag{3}$$

folgt. [3P]

2. **Potentialtopf mit endlich hohen Wänden**

Gegeben sei das Potential

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{für } x < -\frac{L}{2} \\ 0 & \text{für } -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ V_0 & \text{für } x > \frac{L}{2} \end{cases} \tag{4}$$

eines endlichen Potentialtopfes der Tiefe V_0.

a) Skizzieren Sie $V(x)$. [2P]

b) Zeichnen sie die zugehörigen Eigenfunktionen für $W < V_0$ und zwei Eigenfunktionen für $W > V_0$ ein. Gehen Sie davon aus, dass es genau drei gebundene Eigenzustände gibt. Worin unterscheiden sich die Wellenfunktionen für $W < V_0$ und $W > V_0$ qualitativ? [3P]

c) Welche Gleichung liefert die Lösung für die elektronischen Zustände in einem solchen System mit $W < V_0$? Machen Sie Lösungsansätze für die drei Bereiche mit konstantem Potential und stellen Sie die zur Lösung nötigen Rand- und Nebenbedingungen auf. Setzen Sie die Ansätze in die erhaltenen Bedingungen ein. Das explizite Lösen dieses Gleichungssystems ist **nicht** verlangt! [7P]

d) Zeigen und erklären Sie anhand einer Skizze, wie sich das Aussehen der Lösungen verändert, wenn $V_0 \to \infty$. [2P]

3. **Parabolisches Potential**

a) Geben Sie die stationäre Schrödingergleichung an und benennen Sie die einzelnen Komponenten der Gleichung. Erläutern Sie, warum man die stationäre Schrödingergleichung auch als eine Eigenwertgleichung bezeichnet. [4P]

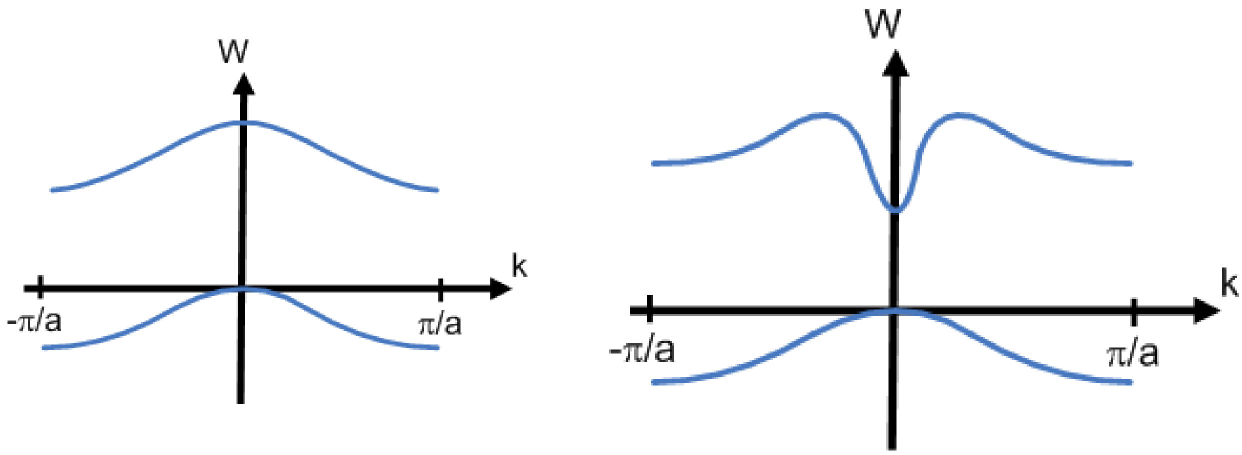
b) Der normierte Grundzustand des eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillators ist

$$\psi_0(x) = \frac{1}{b^{1/2}\sqrt{\pi^{1/2}}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \tag{5}$$

mit der Konstanten $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle \hat{W}_{\mathrm{kin}} \rangle$ für die kinetische Energie des harmonischen Oszillators im Grundzustand. [7P]

c) Bestimmen Sie mit dem Ergebnis des letzten Aufgabenteils den Erwartungswert der potentiellen Energie des Grundzustands und erläutern Sie Ihr Vorgehen. Falls Sie den Teil b) nicht lösen konnten, benutzen Sie $\langle \hat{W}_{kin} \rangle = K$. [1P]

4. **Bandstruktur**



(a) Halbleiter A (b) Halbleiter B

Abbildung 1: Eindimensionale schematische Darstellung der Bandstrukturen zweier Halbleiter.

In Abbildung 1 sind idealisierte Bandstrukturen zweier Halbleiter gegeben.

a) Beschriften Sie in den Abbildungen 1(a) und 1(b) jeweils Valenzband und Leitungsband. [2P]

b) Tragen Sie in die Abbildungen 1(a) und 1(b) jeweils die Energie der Bandlücke W_g ein. Bei welchem der Halbleiter handelt es sich um einen direkten, bei welchem um einen indirekten? [2P]

c) Skizzieren Sie in den Abbildungen 1(a) und 1(b) jeweils parabolische Näherungen im Valenzbandmaximum und im Leitungsbandminimum. [2P]

d) Die parabolische Näherung für das Leitungsband sei gegeben als $W_L(k) = +A \cdot k^2$, wobei $A = \frac{\hbar^2}{0{,}01 m_e}$. Berechnen Sie die effektive Masse der Elektronen im Leitungsband. [2P]

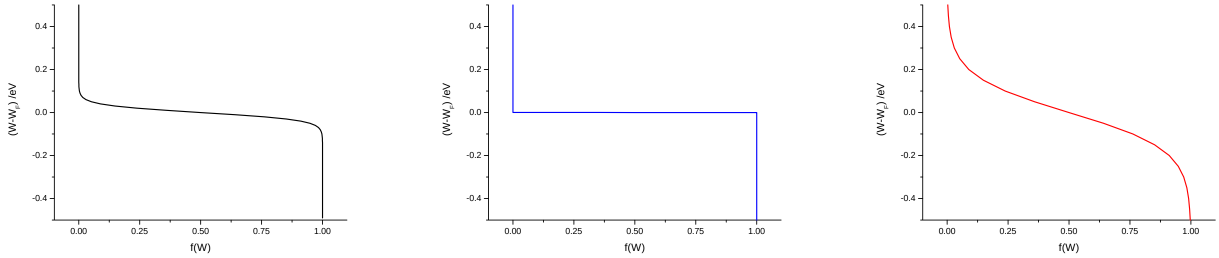
e) Für die Zustandsdichte in einem dreidimensionalen Halbleiterkristall gilt

$$g(W) = \frac{4\pi(2m_\mathrm{eff})^{\frac{3}{2}}}{h^3}\sqrt{W - W_L}$$

mit der Energie der Leitungsbandkante W_L. Der Halbleiterkristall sei würfelförmig mit der Kantenlänge $l = 1$ mm, die effektive Masse betrage $m_\mathrm{eff} = 0{,}01 m_e$. Berechnen Sie die Anzahl der Zustände im Kristall im Intervall $W_L + 1eV \leq W \leq W_L + 1{,}1eV$. [4P]

5. **Leitfähigkeit**

a) In Abbildung 2 ist die Fermi-Dirac-Funktion für Temperaturen von $T = 0$ K, $T = 200$ K und $T = 1000$ K aufgetragen. Ordnen Sie die Temperaturen den Verteilungen zu! [2P]



(a) T=................ (b) T=................ (c) T=................

Abbildung 2: Fermi-Dirac-Verteilung für verschiedene Temperaturen

b) Indium-Arsenid (InAs) hat eine Bandlücke von $0,35$ eV. Die effektive Masse der Elektronen und der Löcher entspreche $0,02m_e$. Bestimmen Sie die Ladungsträgerdichten von Elektronen und Löchern bei Raumtemperatur $T = 300$ K. [3P]

c) Bestimmen Sie die spezifische Leitfähigkeit eines Indium-Arsenid-Kristalls. Die Beweglichkeit der Elektronen sei $\mu_e = 1000\frac{cm^2}{Vs}$, die der Löcher $\mu_h = 100\frac{cm^2}{Vs}$. [2P]

Wenn Sie Aufgabenteil b) nicht lösen konnten verwenden Sie $n_i = 10^{14}\frac{1}{\text{cm}^3}$ als intrinsische Ladungsträgerdichte.

d) Wie groß ist die Leitfähigkeit des gleichen Kristalls bei $T = 0$K? [1P]

e) Der Halbleiter aus Aufgabenteil b) sei nun p-dotiert mit einer Akzeptorendichte von $n_A = 10^{18}\frac{1}{\text{cm}^3}$. Es herrsche Störstellenerschöpfung, die Temperatur betrage erneut $T = 300$ K. Berechnen Sie die Löcher- und Elektronendichten p und n. Hat sich die Leitfähigkeit im Vergleich zum intrinsischen Halbleiter erhöht? [4P]

Wenn Sie Aufgabenteil b) nicht lösen konnten verwenden Sie erneut $n_i = 10^{14}\frac{1}{\text{cm}^3}$.

6. **Halbleitergrundgleichungen**

   a) Durch Bestrahlung ist zu einem Zeitpunkt $t_0 = 0$ in einem Halbleiter ein Profil von Elektron-Loch-Paaren der Form

   $$n(x) = p(x) = g_0 e^{-\frac{x}{L}} \tag{6}$$

   erzeugt worden. Für die Diffusionskonstanten gelte $D_n = D_p$. Berechnen Sie die Diffusionsstromdichte $J(x_0)$ an der Stelle $x_0 = L/2$ in diesem Moment. [3P]

   b) Geben Sie die Kontinuitätsgleichung zur Beschreibung der Entwicklung der freien Elektronendichte in drei Dimensionen an. Welche physikalische Bedeutung haben die einzelnen Terme der Gleichung? [3P]

   c) Ein p-dotiertes Halbleiterstück wurde mit einem kurzen Lichtpuls homogen beleuchtet. Es herrsche Störstellenerschöpfung. Die durch Beleuchtung erzeugte Elektronendichte ist $\Delta n_0 << p$. Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf der Überschussladungsträgerdichte $\Delta n(t)$. Gehen Sie von einer Rekombinationsrate $r_n = \Delta n/\tau_n$ aus. [3P]

7. **pn-Übergang**

a) Skizzieren Sie das Raumladungsprofil in einem abrupten pn-Übergang ohne angelegte Spannung. Markieren Sie alle relevanten Längen. Wo befindet sich die Raumladungszone? Die Schottky-Näherung sei gültig. [3P]

b) Leiten Sie einen Ausdruck für das Potential im abrupten pn-Übergang ohne angelegte Spannung her. Die Dotierkonzentrationen seien n_A im p-Bereich und n_D im n-Bereich. Gehen Sie von Störstellenerschöpfung aus. Die Schottky-Näherung sei erneut gültig. [6P]

Konstanten

Planck'sches Wirkunkungsquantum	h	$=$	$6.63 \cdot 10^{-34}$	Js
	$\hbar$	$=$	$\frac{h}{2\pi} = 1.05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	N_A	$=$	$6.02 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
Bohr'scher Radius	a_0	$=$	$5.29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$=$	$1.6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	$=$	$1.66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$=$	$9.11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$=$	$1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$=$	$1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$=$	$8.85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	$=$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$=$	$3.0 \cdot 10^{8}$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	$=$	$1.38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	π	$=$	3.14	
Euler'sche Zahl	e	$=$	2.72	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit	$\rightarrow$ Kilogramm	$1\,\mathrm{u} = 1.66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Elektronenvolt	$\rightarrow$ Joule	$1\,\mathrm{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$

Integrale

$$\begin{aligned}
\int (\sin ax)^2 \, dx &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax \\
\int (\cos ax)^2 \, dx &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax \\
\int \sin ax \cos ax \, dx &= \frac{1}{2a}(\sin ax)^2 \\
\int x(\sin ax)^2 \, dx &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x\sin 2ax - \frac{1}{8a^2}\cos 2ax
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx &= 0 \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}
\end{aligned}$$