

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

E-Mail-Adresse:

Erreichte Punktzahl:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Punkte								
Max	9	14	12	12	12	9	9	77

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteilte Formelsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 77, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 30.
- In Klammern angegebene Zahlen am Aufgabenende sind die erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Bitte schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf von der Universität gestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Versehen Sie bitte jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis und Ihre Immatrikulationsbescheinigung während der Klausur bereit.
- Bitte nur mit dokumentenechten Stiften schreiben. Verwenden Sie insbesondere keinen Bleistift und schreiben Sie nicht in roter Farbe.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle und mit den entsprechenden Einheiten anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. Das freie Elektron

- a) In einem Elektronenmikroskop werden Elektronen mit einer Energie von $W = 10 \text{ keV}$ verwendet. Berechnen sie die entsprechende de-Broglie Wellenlänge der Elektronen. Die nicht-relativistische Näherung sei gültig! [2P]

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e W}} = 1.22 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

- b) Gegeben sind folgende Dispersionsrelationen:

$$\omega_{\text{Photon}}(k) = ck \quad (1)$$

$$\omega_{\text{Elektron}}(k) = \frac{\hbar k^2}{2m_e} \quad (2)$$

Berechnen sie die Phasengeschwindigkeit v_{ph} und die Gruppengeschwindigkeit v_g in beiden Fällen. [4P]

Für Photonen ergibt sich

$$v_{\text{ph}} = v_g = c,$$

für Elektronen folgt

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m_e} \quad \text{und} \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\hbar k}{m_e}$$

- c) Zeigen Sie durch Einsetzen in die zeitabhängige Schrödingergleichung, dass Gleichung 2 aus der Beschreibung freier Elektronen als ebene Wellen,

$$\psi(x) = A \exp(j(kx - \omega t)), \quad (3)$$

folgt. [3P]

$$\begin{aligned} j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t) \right) \psi(x, t) \\ j\hbar \frac{\partial}{\partial t} A \exp(j(kx - \omega t)) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi(x) A \exp(j(kx - \omega t)) \\ j\hbar(-j\omega) A \exp(j(kx - \omega t)) &= -\frac{\hbar^2}{2m} (j^2 k^2) \psi(x) A \exp(j(kx - \omega t)) \\ \hbar\omega &= \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \\ \omega &= \frac{\hbar k^2}{2m} \end{aligned}$$

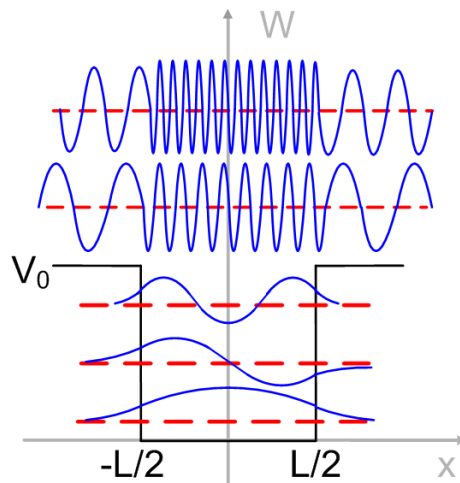
2. Potentialtopf mit endlich hohen Wänden

Gegeben sei das Potential

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{für } x < -\frac{L}{2} \\ 0 & \text{für } -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ V_0 & \text{für } x > \frac{L}{2} \end{cases} \quad (4)$$

eines endlichen Potentialtopfes der Tiefe V_0 .

a) Skizzieren Sie $V(x)$. [2P]



b) Zeichnen sie die zugehörigen Eigenfunktionen für $W < V_0$ und zwei Eigenfunktionen für $W > V_0$ ein. Gehen Sie davon aus, dass es genau drei gebundene Eigenzustände gibt. Worin unterscheiden sich die Wellenfunktionen für $W < V_0$ und $W > V_0$ qualitativ? [3P]

Die Lösungen mit $W > V_0$ haben die Form von ebenen Wellen und sind daher unendlich ausgedehnt. Außerdem gibt es hier zu jeder Energie eine Lösung. Die gebundenen Lösungen dagegen fallen in der Barriere exponentiell ab, sind also im Quantentopf lokalisiert. Zudem ist ihr Energiespektrum diskret.

c) Welche Gleichung liefert die Lösung für die elektronischen Zustände in einem solchen System mit $W < V_0$? Machen Sie Lösungsansätze für die drei Bereiche mit konstantem Potential und stellen Sie die zur Lösung nötigen Rand- und Nebenbedingungen auf. Setzen Sie die Ansätze in die erhaltenen Bedingungen ein. Das explizite Lösen dieses Gleichungssystems ist **nicht** verlangt! [7P]

Die stationäre Schroedingergleichung liefert die Energieeigenwerte dieses Problems. In unserem Fall zerfällt das Problem in drei Einzelprobleme mit jeweils konstantem

Potential. Damit ergibt sich:

$$\text{Gebiet 1: } \psi_1(x) = A \exp(-\kappa_1 x) + B \exp(\kappa_1 x)$$

$$\text{Gebiet 2: } \psi_2(x) = C \exp(-jk_2 x) + D \exp(jk_2 x)$$

$$\text{Gebiet 3: } \psi_3(x) = E \exp(-\kappa_3 x) + F \exp(\kappa_3 x)$$

Hier wurde schon ausgenutzt, dass die Wellenzahlen in der Barriere für $W < V_0$ imaginär sind und so die oszillierenden komplexen Exponentialfunktionen in reelle Exponentialfunktionen verwandeln. Daran knüpft die Forderung an, dass in den Gebieten 1 und 3 die Lösungen exponentiell abfallen müssen, weil sonst die Wellenfunktionen weit weg vom Topf divergieren. Wir folgern $A = F = 0$. Die restlichen vier Variablen können wir mit Hilfe der Stetigkeitsbedingungen an den Übergängen 1-2 und 2-3 bestimmen.

$$\text{Nebenbedingung 1: } \psi_1(x = -L/2) = \psi_2(x = -L/2)$$

$$\text{Nebenbedingung 2: } \psi'_1(x = -L/2) = \psi'_2(x = -L/2)$$

$$\text{Nebenbedingung 3: } \psi_2(x = +L/2) = \psi_3(x = +L/2)$$

$$\text{Nebenbedingung 4: } \psi'_2(x = +L/2) = \psi'_3(x = +L/2)$$

Damit haben wir vier unabhängige Nebenbedingungen, um vier Konstanten zu bestimmen, das Problem ist lösbar. Einsetzen liefert weiterhin:

$$1: \quad B \exp(-\kappa_1 L/2) = C \exp(+jk_2 L/2) + D \exp(-jk_2 L/2)$$

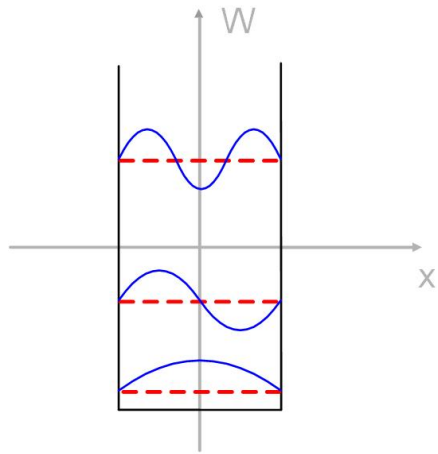
$$2: \quad B(\kappa_1) \exp(-\kappa_1 L/2) = C(-jk_2) \exp(+jk_2 L/2) + D(jk_2) \exp(-jk_2 L/2)$$

$$3: \quad C \exp(-jk_2 L/2) + D \exp(+jk_2 L/2) = E \exp(-\kappa_3 L/2)$$

$$4: \quad C(-jk_2) \exp(-jk_2 L/2) + D(jk_2) \exp(+jk_2 L/2) = E(-\kappa_3) \exp(-\kappa_3 L/2)$$

- d) Zeigen und erklären Sie anhand einer Skizze, wie sich das Aussehen der Lösungen verändert, wenn $V_0 \rightarrow \infty$. [2P]

Mit unendlich hohen Wänden wird der endliche zum unendlichen Potentialtopf. Dann ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in den Barrieren Null, die Wellenfunktion hat an der Grenze einen Knoten. Natürlich gibt es im unendlichen Potentialtopf auch keine ungebundenen Lösungen.



3. Parabolisches Potential

- a) Geben Sie die stationäre Schrödingergleichung an und benennen Sie die einzelnen Komponenten der Gleichung. Erläutern Sie, warum man die stationäre Schrödingergleichung auch als eine Eigenwertgleichung bezeichnet. [4P]

Die stationäre Schrödingergleichung lautet

$$\underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})\right)}_{\hat{H}} \psi(\vec{r}) = W\psi(\vec{r}).$$

Anwendung des Hamiltonoperators $\hat{H}$ auf den Eigenzustand/die Eigenfunktion/den Eigenvektor $\psi(x)$ liefert dabei erneut den Eigenzustand/die Eigenfunktion/den Eigenvektor $\psi(x)$, multipliziert mit einem Skalar, dem Energieeigenwert W . Diese Eigenschaft macht die stationäre Schrödingergleichung zu einer Eigenwertgleichung.

- b) Der normierte Grundzustand des eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillators ist

$$\psi_0(x) = \frac{1}{b^{1/2}\sqrt{\pi^{1/2}}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \quad (5)$$

mit der Konstanten $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle \hat{W}_{\text{kin}} \rangle$ für die kinetische Energie des harmonischen Oszillators im Grundzustand. [7P]

Die kinetische Energie ergibt sich zu $W_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m}$. In Operatorschreibweise setzen wir den Impulsoperator ein, also $\hat{p} = -j\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, somit erhalten wir für den Operator der kinetischen Energie:

$$\hat{W}_{\text{kin}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Für den Erwartungswert der kinetischen Energie erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{W}_{kin} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^* \hat{W} \psi_0 dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b^{1/2} \sqrt{\pi^{1/2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{1}{b^{1/2} \sqrt{\pi^{1/2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) dx \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right)\right) dx \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \left(-\frac{1}{b^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) + \frac{x^2}{b^4} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right)\right) dx \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{b^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) + \frac{x^2}{b^4} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right)\right) dx \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \left(-\frac{1}{b^2} \sqrt{b^2 \pi} + \frac{1}{2b^2} \sqrt{b^2 \pi}\right) \\
&= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \frac{1}{2b^2} \sqrt{b^2 \pi} = \frac{1}{4} \hbar \omega
\end{aligned}$$

- c) Bestimmen Sie mit dem Ergebnis des letzten Aufgabenteils den Erwartungswert der potentiellen Energie des Grundzustands und erläutern Sie Ihr Vorgehen. Falls Sie den Teil b) nicht lösen konnten, benutzen Sie $\langle \hat{W}_{kin} \rangle = K$. [1P]

Die Gesamtenergie des Grundzustands des harmonischen Oszillators ist $W_T = \frac{1}{2} \hbar \omega$. Die Gesamtenergie berechnet sich aus der Summe der potentiellen und kinetischen Energie, gleiches gilt auch für die Erwartungswerte. Mit dem Ergebnis der letzten Teilaufgabe erhalten wir $\langle \hat{W}_{pot} \rangle = \frac{1}{4} \hbar \omega$.

4. Bandstruktur

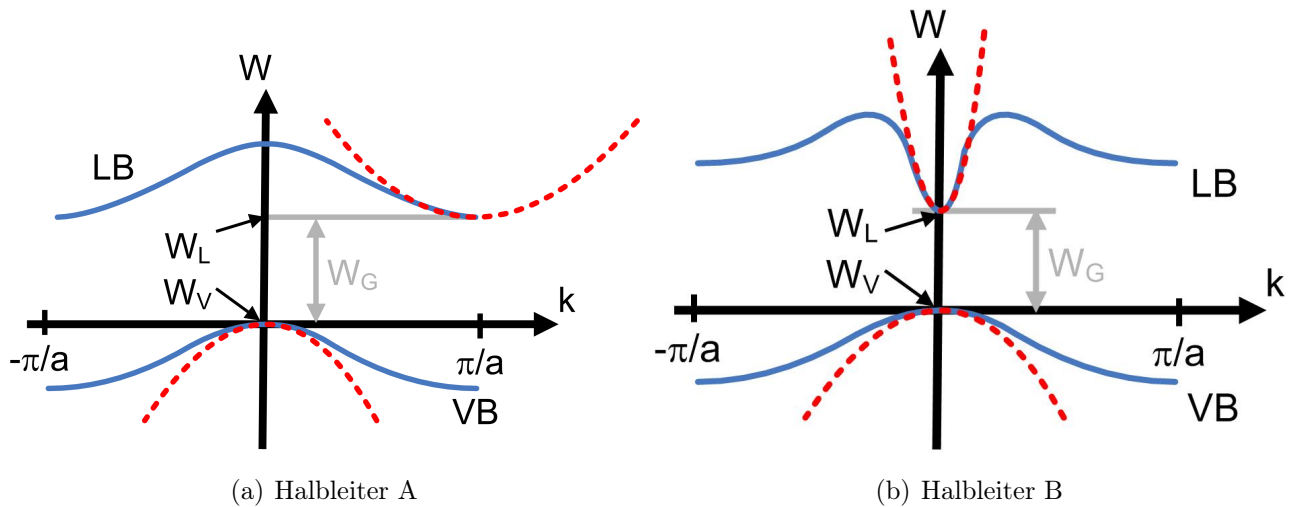


Abbildung 1: Eindimensionale schematische Darstellung der Bandstrukturen zweier Halbleiter.

In Abbildung 1 sind idealisierte Bandstrukturen zweier Halbleiter gegeben.

- Beschriften Sie in den Abbildungen 1(a) und 1(b) jeweils Valenzband und Leitungsband. [2P]
- Tragen Sie in die Abbildungen 1(a) und 1(b) jeweils die Energie der Bandlücke W_g ein. Bei welchem der Halbleiter handelt es sich um einen direkten, bei welchem um einen indirekten? [2P]
- Skizzieren Sie in den Abbildungen 1(a) und 1(b) jeweils parabolische Näherungen im Valenzbandmaximum und im Leitungsbandminimum. [2P]
- Die parabolische Näherung für das Leitungsband sei gegeben als $W_L(k) = +A \cdot k^2$, wobei $A = \frac{\hbar^2}{0,01m_e}$. Berechnen Sie die effektive Masse der Elektronen im Leitungsband. [2P]

$$m_{\text{eff}} = \hbar^2 \frac{1}{\partial^2 W / \partial k^2} = \hbar^2 \frac{1}{2A} = 0,005m_e = 4,55 \cdot 10^{-33} \text{ kg}$$

- Für die Zustandsdichte in einem dreidimensionalen Halbleiterkristall gilt

$$g(W) = \frac{4\pi(2m_{\text{eff}})^{\frac{3}{2}}}{h^3} \sqrt{W - W_L}$$

mit der Energie der Leitungsbandkante W_L . Der Halbleiterkristall sei würfelförmig mit der Kantenlänge $l = 1 \text{ mm}$, die effektive Masse betrage $m_{\text{eff}} = 0,01m_e$. Berechnen Sie die Anzahl der Zustände im Kristall im Intervall $W_L + 1\text{eV} \leq W \leq W_L + 1,1\text{eV}$. [4P]

Die Zustandsdichte beschreibt die Anzahl an Zuständen pro Energieintervall und pro Volumen. Die Anzahl der Zustände pro Volumen lässt sich durch Integration über das Energieintervall berechnen:

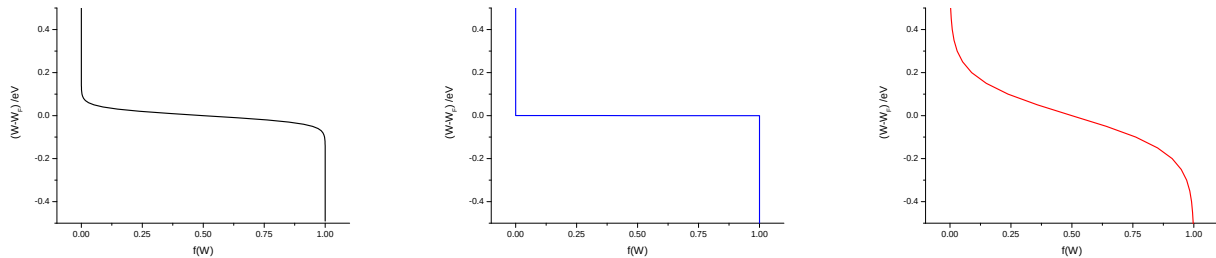
$$\begin{aligned}
 N(W)/V &= \int_{W_L+1\text{eV}}^{W_L+1,1\text{eV}} g(W) dW \\
 &= \int_{W_L+1\text{eV}}^{W_L+1,1\text{eV}} \frac{4\pi(2m_{\text{eff}})^{\frac{3}{2}}}{h^3} \sqrt{W - W_L} dW \\
 &= \left| \frac{4\pi(2m_{\text{eff}})^{\frac{3}{2}}}{h^3} \frac{2}{3} (W - W_L)^{\frac{3}{2}} \right|_{W_L+1\text{eV}}^{W_L+1,1\text{eV}} \\
 &= \frac{4\pi(2m_{\text{eff}})^{\frac{3}{2}}}{h^3} \frac{2}{3} \left((1,1\text{eV})^{\frac{3}{2}} - (1\text{eV})^{\frac{3}{2}} \right) = 6,999 \cdot 10^{23} \frac{1}{m^3}
 \end{aligned}$$

Die absolute Anzahl der Zustände ergibt sich schließlich durch Multiplikation mit dem Kristallvolumen:

$$N(W) = N(W)/V \cdot V = N(W)/V \cdot l^3 = 6,999 \cdot 10^{14}$$

5. Leitfähigkeit

- a) In Abbildung 2 ist die Fermi-Dirac-Funktion für Temperaturen von $T = 0$ K, $T = 200$ K und $T = 1000$ K aufgetragen. Ordnen Sie die Temperaturen den Verteilungen zu! [2P]



(a) $T = \dots\dots\dots$

(b) $T = \dots\dots\dots$

(c) $T = \dots\dots\dots$

Abbildung 2: Fermi-Dirac-Verteilung für verschiedene Temperaturen

(a) $T = 200$ K, (b) $T = 0$ K, (c) $T = 1000$ K

- b) Indium-Arsenid (InAs) hat eine Bandlücke von 0,35 eV. Die effektive Masse der Elektronen und der Löcher entspreche $0,02m_e$. Bestimmen Sie die Ladungsträgerdichten von Elektronen und Löchern bei Raumtemperatur $T = 300$ K. [3P]

Das Massenwirkungsgesetz lautet:

$$n \cdot p = N_{\text{eff}}^V N_{\text{eff}}^L \cdot e^{-\frac{w_L^n - w_V^n}{k_B T}}$$

Für einen intrinsischen Halbleiter wie Indium-Arsenid mit $n=p$ gilt bei $T=300$ K:

$$\begin{aligned} n_i = \sqrt{np} &= \sqrt{N_{\text{eff}}^V N_{\text{eff}}^L} \cdot e^{-\frac{w_L^n - w_V^n}{2k_B T}} \\ &= (m_e^* m_p^*)^{\frac{3}{4}} \cdot 2 \cdot \left(\frac{k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{w_g}{2k_B T}} \\ &= 8,15 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3} \\ &= 8,15 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3} \\ &(\quad 8,30 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3} \text{ mit den gegebenen Werten der Konstanten}) \end{aligned}$$

- c) Bestimmen Sie die spezifische Leitfähigkeit eines Indium-Arsenid-Kristalls. Die Beweglichkeit der Elektronen sei $\mu_e = 1000 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$, die der Löcher $\mu_h = 100 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$. [2P]

Wenn Sie Aufgabenteil b) nicht lösen konnten verwenden Sie $n_i = 10^{14} \frac{1}{\text{cm}^3}$ als intrinsische Ladungsträgerdichte.

Die Leitfähigkeit berechnet sich aus:

$$\sigma = e(n\mu_e + p\mu_h)$$

Mit $\mu_e = 1000 \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$ und $\mu_h = 100 \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$ folgt:

$$\sigma = 1.44 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\Omega \text{cm}}$$

d) Wie groß ist die Leitfähigkeit des gleichen Kristalls bei $T = 0 \text{ K}$? [1P]

$$\sigma = 0, \text{ da } n_i = 0$$

e) Der Halbleiter aus Aufgabenteil b) sei nun p-dotiert mit einer Akzeptorendichte von $n_A = 10^{18} \frac{1}{\text{cm}^3}$. Es herrsche Störstellenerschöpfung, die Temperatur betrage erneut $T = 300 \text{ K}$. Berechnen Sie die Löcher- und Elektronendichten p und n . Hat sich die Leitfähigkeit im Vergleich zum intrinsischen Halbleiter erhöht? [4P]

Wenn Sie Aufgabenteil b) nicht lösen konnten verwenden Sie erneut $n_i = 10^{14} \frac{1}{\text{cm}^3}$.

Da Störstellenerschöpfung gefordert ist, gilt

$$n_A^- = n_A = 10^{18} \frac{1}{\text{cm}^3}$$

Man sieht, dass damit $n_A^- \gg n_i$ und somit

$$p \approx n_A = 10^{18} \frac{1}{\text{cm}^3}$$

gilt.

Für die Elektronendichte finden wir mit Hilfe des Massenwirkungsgesetzes

$$n = \frac{n_i^2}{p} = \frac{(8,15 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3})^2}{10^{18} \frac{1}{\text{cm}^3}} = 6,6 \cdot 10^9 \frac{1}{\text{cm}^3}$$

Da die Löcherdichte im Vergleich zum intrinsischen Fall einen Faktor 10^4 größer ausfällt, hat sich die Leitfähigkeit im dotierten Halbleiter erhöht. (Rechnung nicht nötig)

6. Halbleitergrundgleichungen

- a) Durch Bestrahlung ist zu einem Zeitpunkt $t_0 = 0$ in einem Halbleiter ein Profil von Elektron-Loch-Paaren der Form

$$n(x) = p(x) = g_0 e^{-\frac{x}{L}} \quad (6)$$

erzeugt worden. Für die Diffusionskonstanten gelte $D_n = D_p$. Berechnen Sie die Diffusionsstromdichte $J(x_0)$ an der Stelle $x_0 = L/2$ in diesem Moment. [3P]

Der Diffusionsstrom ergibt sich zu:

$$J(x) = eD_n \frac{\partial n}{\partial x} - eD_p \frac{\partial p}{\partial x}$$

Führt man die partiellen Ableitungen aus und setzt ein, erhält man:

$$J(x) = -eD_n \frac{g_0}{L} \exp\left(-\frac{x}{L}\right) + eD_p \frac{g_0}{L} \exp\left(-\frac{x}{L}\right)$$

und damit

$$J(x_0) = -eD_n \frac{g_0}{L} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) + eD_p \frac{g_0}{L} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = -eD_n \frac{g_0}{L} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) + eD_n \frac{g_0}{L} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

- b) Geben Sie die Kontinuitätsgleichung zur Beschreibung der Entwicklung der freien Elektronendichte in drei Dimensionen an. Welche physikalische Bedeutung haben die einzelnen Terme der Gleichung? [3P]

Zur Berechnung der Entwicklung der Elektronendichte benutzen wir die Kontinuitätsgleichung für Elektronen:

$$\frac{\partial n(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{1}{e} \nabla \cdot \vec{J}(\vec{x}, t) + g_n(\vec{x}, t) - r_n(\vec{x}, t)$$

Sie beschreibt die zeitliche Änderung der Elektronendichte (linke Seite), welche sich zusammensetzt aus der Divergenz der Stromdichte, also einer Stromdichtenquellendichte (erster Summand), sowie der Generationsrate (2. Summand) und der subtrahierten Rekombinationsrate.

- c) Ein p-dotiertes Halbleiterstück wurde mit einem kurzen Lichtpuls homogen beleuchtet. Es herrsche Störstellenerschöpfung. Die durch Beleuchtung erzeugte Elektronendichte ist $\Delta n_0 \ll p$. Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf der Überschussladungsträgerdichte $\Delta n(t)$. Gehen Sie von einer Rekombinationsrate $r_n = \Delta n / \tau_n$ aus. [3P]

Wieder starten wir mit der Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} = \frac{1}{e} \nabla \cdot \vec{J} + g_n - r_n$$

Da wir die Situation ab dem Ende des Pulses betrachten, werden keine Elektronen-Lochpaare mehr durch Lichteinstrahlung erzeugt. Die Überschuss-Ladungsträger sind gleichmäßig verteilt und es existieren keine Raumladungen, somit werden keine Ströme fließen. Wir können eine Gleichung für die Überschussladungsträgerdichte aufstellen:

$$\frac{\partial \Delta n(t)}{\partial t} = -\Delta n(t)/\tau_n$$

Diese Differentialgleichung können wir einfach integrieren, wir setzen den Zeitpunkt des Pulsendes zu $t = 0$:

$$\ln(\Delta n)(t) - \ln(\Delta n_0) = -\frac{t}{\tau_n} \rightarrow \Delta n(t) = \Delta n_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right)$$

7. pn-Übergang

- a) Skizzieren Sie das Raumladungsprofil in einem abrupten pn -Übergang ohne angelegte Spannung. Markieren Sie alle relevanten Längen. Wo befindet sich die Raumladungszone? Die Schottky-Näherung sei gültig. [3P]

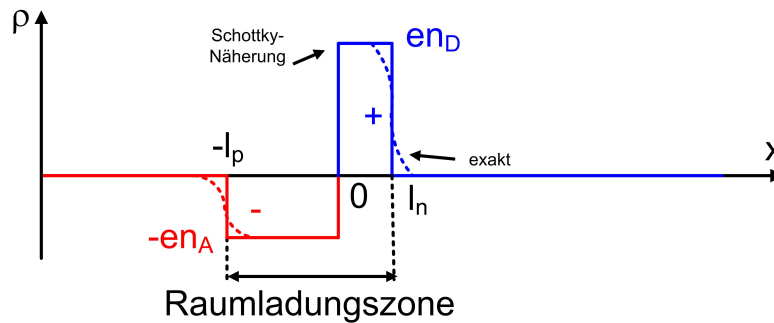


Abbildung 3: Raumladungsprofil im pn -Übergang

- b) Leiten Sie einen Ausdruck für das Potential im abrupten pn -Übergang ohne angelegte Spannung her. Die Dotierkonzentrationen seien n_A im p -Bereich und n_D im n -Bereich. Gehen Sie von Störstellenerschöpfung aus. Die Schottky-Näherung sei erneut gültig. [6P]

Um das Potential herzuleiten, müssen wir, ausgehend von den bekannten Raumladungen, die Poisson-Gleichung lösen. Das Raumladungsprofil sieht wie folgt aus:

$$\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq -l_p \\ -en_A & \text{für } -l_p < x \leq 0 \\ +en_D & \text{für } 0 < x \leq +l_n \\ 0 & \text{für } x > l_n \end{cases}$$

Wir können die Gleichungen durch zweimaliges Integrieren lösen. Einmaliges Integrieren führt auf einen Ausdruck, der die erste Ableitung des elektrischen Potentials enthält. Dies ist aber gerade die Feldstärke im Halbleiter ($\vec{E} = -\nabla \phi$), wobei der Übergang zwischen den unterschiedlich dotierten Gebieten stetig sein muss und das Feld außerhalb der Raumladungszone Null ist. Aus der konstanten zweiten Ableitung des Potentials erhalten wir erhalten eine lineare Abhängigkeit der Feldstärke vom Ort:

$$E(x) = -\frac{en_A}{\epsilon_r \epsilon_0} (x + l_p) \quad \text{für } -l_p < x < 0$$

$$E(x) = +\frac{en_D}{\epsilon_r \epsilon_0} (x - l_n) \quad \text{für } 0 < x < +l_n$$

Zum Verlauf des Potentials gelangen wir durch eine weitere Integration. Wieder setzen wir einen stetigen Übergang des elektrischen Potentials zwischen den verschiedenen Bereichen an. Da das Feld einen linearen Verlauf hat, erwarten wir bei

einer weiteren Integration quadratische Abhängigkeiten. Wie üblich können wir für das Potential ein Bezugsniveau frei wählen. Wir tun das zu $\phi = 0$ für den neutralen p -Bereich und erhalten so

$$\phi(x) = +\frac{en_A}{2\epsilon\epsilon_0} (x + l_p)^2$$

für $-l_p < x \leq 0$ und

$$\phi(x) = -\frac{en_D}{2\epsilon\epsilon_0} (l_n - x)^2 + U_D$$

für $0 < x \leq +l_n$. Für $x > l_n$ gilt $\phi(x) = U_D$.

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$=$	$6.63 \cdot 10^{-34}$	Js
	$\hbar$	$=$	$\frac{h}{2\pi} = 1.05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	N_A	$=$	$6.02 \cdot 10^{23}$	mol ⁻¹
Bohr'scher Radius	a_0	$=$	$5.29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$=$	$1.6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	$=$	$1.66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$=$	$9.11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$=$	$1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$=$	$1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$=$	$8.85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	$=$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$=$	$3.0 \cdot 10^8$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	$=$	$1.38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	π	$=$	3.14	
Euler'sche Zahl	e	$=$	2.72	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit $\rightarrow$ Kilogramm	$1 \text{ u} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenvolt $\rightarrow$ Joule	$1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Integrale

$$\begin{aligned}
 \int (\sin ax)^2 dx &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax \\
 \int (\cos ax)^2 dx &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax \\
 \int \sin ax \cos ax dx &= \frac{1}{2a} (\sin ax)^2 \\
 \int x (\sin ax)^2 dx &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x \sin 2ax - \frac{1}{8a^2} \cos 2ax
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx &= 0 \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}
 \end{aligned}$$