Lichttechnisches Institut
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer
Engesserstraße 13
76131 Karlsruhe

Festkörperelektronik
Klausur
7. Oktober 2010

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

E-Mail-Adresse: ....

Erreichte Punktzahl: ....

Note: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte									
Max	10	10	13	10	10	12	8	8	81

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 81, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 41.
- In Klammern angegebene Zahlen am Aufgabenende sind die erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Bitte schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf von der Universität gestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Bitte nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie bitte jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. **Allgemeine Fragen**

Hinweis: Beschränken Sie Ihre Antwort pro Teilaufgabe auf maximal drei Sätze.

a) Benennen und beschreiben Sie zwei Verfahren zur Herstellung von Halbleiter-Einkristallen! [2P]

b) Was ist der wesentliche Unterschied zwischen den Halbleitern Silizium und Galliumarsenid bei Betrachtung der Bandstruktur? [1P]

c) Welche chemische Bindung lässt sich nur mit Hilfe der Quantenmechanik erklären? [1P]

d) Was besagt das Pauli-Prinzip? [1P]

e) Was versteht man unter der Temperaturspannung U_{T}? [1P]

f) Wie viele ebene Wellen müssen Sie mindestens überlagern, um eine exakt im Ortsraum lokalisierte Wellenfunktion zu erhalten? [1P]

g) Kalium hat die Elektronenkonfiguration $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1$. Geben Sie die Quantenzahlen n, l, m, s des energetisch höchsten Elektrons an! [2P]

h) Was beschreibt der Begriff Auger-Rekombination? [1P]

2. **Photonen und Elektronen**

Ein Laserpointer strahlt grünes Licht der Wellenlänge 532 nm aus. Sie wollen diesen Laserpointer verwenden, um in einer Photozelle mit Magnesiumkathode ($W_a = 3{,}7$ eV) den Photoeffekt auszulösen.

a) Ist dies möglich? Falls ja, berechnen Sie die Geschwindigkeit der erzeugten Elektronen unter der Annahme, dass die nach der Erzeugung verbleibende Energie vollständig in kinetische Energie umgewandelt wird. [1P]

Im Laborschrank finden Sie auch eine Photozelle mit Natriumkathode ($W_a = 2{,}28$ eV). Sie beschließen, lieber mit dieser weiter zu experimentieren und bestrahlen sie ebenfalls mit dem grünen Laserpointer.

b) Welche Spannung U müssen Sie an die Kontakte der Photozelle anlegen, damit aus der Kathode herausgeschlagenen Elektronen nicht die Anode erreichen? Gehen Sie wiederum davon aus, dass die nach der Erzeugung verbleibende Energie vollständig in kinetische Energie umgewandelt wird. [2P]

Beim Betrachten des Experiments erinnern Sie sich an die Grundlagen der Quantenmechanik. Sie wollen zunächst die Dispersionsrelation von Elektronen berechnen.

c) Verwenden Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung, um die Dispersionsrelation des freien Elektrons herzuleiten. Gehen Sie dazu von der Beschreibung des freien Elektrons als ebene Welle aus: $\Psi(x) = A \exp\left(j(kx - \omega t)\right)$. [3P]

Nun fragen Sie sich, wie sich Elektronen und Photonen in Ihrem Dispersionsverhalten unterscheiden. Glücklicherweise fällt Ihnen noch ein, dass die Dispersionsrelation von Photonen im Vakuum gegeben ist durch $\omega_{\mathrm{Photon}}(k) = ck$.

d) Berechnen Sie jeweils für Photonen im Vakuum und freie Elektronen die Gruppengeschwindigkeit v_{G} sowie den Dispersionsparameter $\beta = \frac{1}{2}\frac{\partial v_{\mathrm{G}}}{\partial k}$. Falls Sie c) nicht lösen konnten, verwenden Sie für die Dispersionsrelation des freien Elektrons $\omega_{\mathrm{Elektron}}(k) = A \cdot k^2$. [4P]

3. **Potentialtopf**

a) Skizzieren Sie einen eindimensionalen Potentialtopf der Höhe V_0 (für Elektronen der Masse m), der räumlich zwischen 0 und +L ausgedehnt ist. Das energetische Nullniveau befinde sich dabei am Topfboden. Zeichnen Sie den Realteil der Wellenfunktionen von zwei Eigenfunktionen für Energien $W > V_0$ und die der niedrigenergetischsten drei Lösungen mit $W < V_0$ in Ihre Skizze ein. [3P]

Nun wird das Potential auf der linken Seite (auf der Ortsachse von $-\infty$ bis 0) auf ∞ erhöht.

b) Skizzieren Sie in einem neuen Koordinatensystem das so entstandene Potential. [1P]

c) Beschreiben Sie, wie sich nun qualitativ die Form des Realteils der Wellenfunktionen ändert. [1P]

d) Geben Sie für das Potential aus Teilaufgabe b) für $W < V_0$ die Lösungsansätze für die stationäre Schrödingergleichung in den zwei Bereichen mit endlichem Potential an und stellen Sie die zur Lösung nötigen Rand- und Nebenbedingungen auf. [4P]

e) Leiten Sie nun die implizite Eigenwertgleichung für die Eigenenergien W für $W < V_0$ her. [4P]

4. **Parabolisches Potential**

Im eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillator mit dem Potential $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ lauten die normierten Wellenfunktionen des Grundzustandes und des ersten angeregten Zustandes

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{b\sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \tag{1}$$

und

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{b^3\sqrt{\pi}}}\, x \;\exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \tag{2}$$

wobei $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

a) Berechnen Sie den Ortserwartungswert für ψ_0! [2P]

b) Ein Elektron sei in einem überlagerten Zustand $\psi_\mathrm{G} = a\psi_0 + \sqrt{0{,}3}\psi_1$.
Wie groß ist a ($a \in \Re$)? [1P]

c) Sie messen die Energie des Elektrons mit der Zustandsfunktion ψ_G aus b). Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Energie W_1, also der zur Zustandsfunktion ψ_1 gehörige Eigenwert, gemessen? [2P]

d) Die Eigenenergie des n-ten Zustands eines eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillators ist $W_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$. Was ist die Anzahl der Zustände pro Energieeinheit? [2P]

e) Wir betrachten nun einen halben harmonischen Oszillator mit

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } \; x < 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2x^2 & \text{für } \; 0 \leq x. \end{cases}$$

Berechnen Sie den Impulserwartungswert des Grundzustandes dieses neuen Systems! [3P]

5. **Bandstruktur**

a) Erklären sie kurz, wie es zur Entstehung von Bandstrukturen in kristallinen Festkörpern kommt! Gehen sie bei Ihrer Argumentation vom Bild eines einzelnen Quantentopfes/Atoms aus und machen Sie dann den Transfer zu gekoppelten, periodisch angeordneten Quantentöpfen/Atomen. [2P]

b) Wie lauten die Definitionen der effektiven Masse und der Gruppengeschwindigkeit eines Elektrons in einem Kristallpotential $W(k)$? [2P]

c) Zeigen Sie rechnerisch, dass vollständig besetzte symmetrische, stetig differenzierbare Energiebänder nicht zum Stromtransport beitragen! [3P]

d) Wie ist die Gesamt-Leitfähigkeit in einem Halbleiter definiert? [1P]

e) Wir betrachten einen n-dotierten Halbleiter, in dem der Beitrag der Löcher zum Ladungstransport vernachlässigt werden kann. Die effektive Masse der Elektronen ist $0{,}067m_e$, die Beweglichkeit 10^6 $\mathrm{cm^2V^{-1}s^{-1}}$. Wie groß ist die mittlere Streuzeit der Elektronen? [2P]

6. **Zustandsdichte**

a) Beschreiben Sie, was man unter dem Begriff „Zustandsdichte“ versteht! [2P]

b) Leiten Sie einen Ausdruck für die Zustandsdichte $g_{1\mathrm{D}}(W)$ für einen eindimensionalen Quantendraht der Länge L her. Die parabolische Näherung für das Leitungsband sei gültig. Gehen Sie von einem eindimensionalen k-Raum aus! [4P]

c) Die Zustandsdichte im Leitungsband eines dreidimensionalen Halbleiterquaders lautet $g_{3\mathrm{D}}(W) = \frac{4\pi(2m_{\mathrm{eff}})^{3/2}}{h^3}\sqrt{W - W_L}$. Wie viele Zustände gibt es bei der Energie $W = W_\mathrm{L} + 0{,}01$ eV, wenn der Festkörperblock ein Volumen von 1 mm^3 hat? Es gelte $m_{\mathrm{eff}} = m_e$. [2P]

d) Wie lautet die Formel für die Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion $f(W,T)$ und was beschreibt diese? [2P]

e) Wie berechnet man bei gegebener Verteilungsfunktion $f(W,T)$ und Zustandsdichte $g(W)$ die (wahrscheinliche) Ladungsträgerdichte für Elektronen $n(T)$ bzw. Löcher $p(T)$ bei einer bestimmten Temperatur T im Leitungs- bzw. Valenzband? Die Angabe des formalen Ansatzes genügt. [2P]

7. **Kontinuitätsgleichung**

In einem stark n-dotierten Halbleiter wird durch Minoritätsladungsträgerinjektion an der Stelle $x = 0$ bei $T = 400$ K eine Überschussladungsträgerdichte p_0 aufrecht erhalten. Die Ladungsträger seien in Richtung des Inneren des Halbleiters entsprechend

$$p(x) = p_0 \exp\left(-\frac{x}{L_\mathrm{D}}\right)$$

verteilt.

a) Leiten Sie mittels der Kontinuitätsgleichung den Zusammenhang zwischen Diffusionslänge L_D, Diffusionskonstante D_p und Lebensdauer τ_p der Löcher her! Gehen Sie davon aus, dass zur Stromdichte nur Diffusionsanteile beitragen. [6P]

b) Berechnen Sie nun die Diffusionslänge L_D bei einer Beweglichkeit $\mu = 10^4\ \mathrm{cm^2V^{-1}s^{-1}}$ und einer Lebensdauer $\tau_\mathrm{p} = 10^{-7}$ s der überschüssigen Ladungsträger. Falls Sie a) nicht lösen konnten, verwenden Sie $D_\mathrm{p} = \frac{1}{4}\frac{{L_\mathrm{D}}^2}{\tau_\mathrm{p}}$ für den Zusammenhang zwischen L_D, D_p und τ_p. [2P]

8. **pin-Diode**

Um beispielsweise die Ansprechempfindlichkeit einer Photodiode zu verbessern, werden sogenannte pin-Dioden anstelle gewöhnlicher pn-Dioden verwendet. Dabei wird zwischen p-dotierter und n-dotierter Schicht eine zusätzliche intrinsische Schicht belassen. Ohne angelegte Spannung ergibt sich nach der Dotierung für den im Folgenden betrachteten Halbleiter in Schottky-Näherung der in Abbildung 1 A) gezeigte abrupte Raumladungsdichteverlauf.

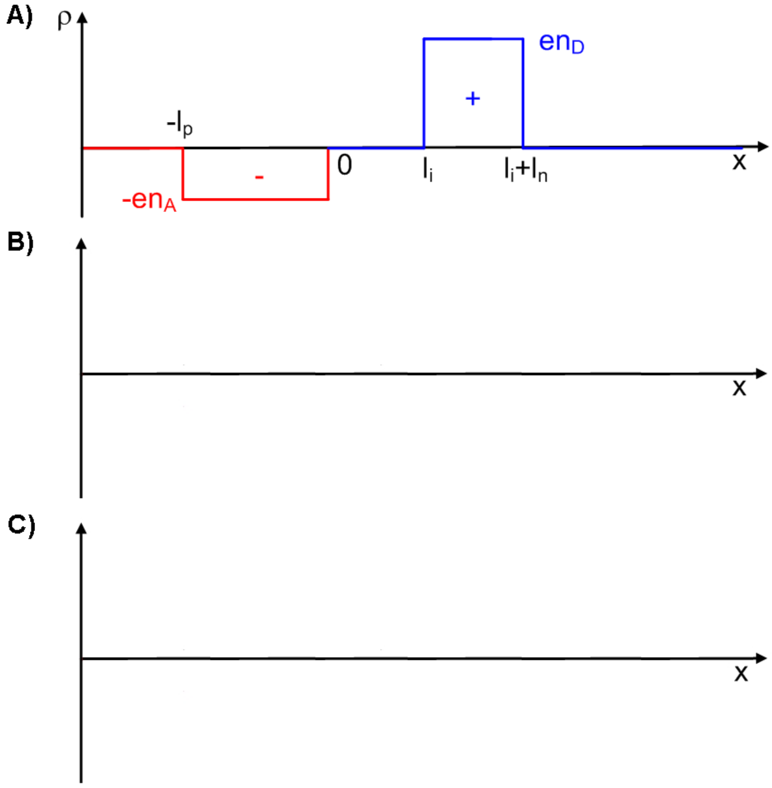

Abbildung 1: pin-Diode

a) Leiten Sie einen Ausdruck für das elektrische Feld im abrupten pin-Übergang ohne angelegte Spannung her. Wie in Abbildung 1 A) gezeigt seien die Dotierkonzentrationen n_{A} im p-Bereich und n_{D} im n-Bereich. Gehen Sie von Störstellenerschöpfung und der Gültigkeit der Schottky-Näherung aus und verwenden Sie die in Abbildung 1 A) angegebenen Koordinaten auf der x-Achse. Zeichnen Sie abschließend den von Ihnen berechneten Feldverlauf qualitativ in Abbildung 1 B) ein. Beschriften Sie Ihre Achsen sinnvoll. [6P]

b) Zeichnen Sie nun qualitativ (keine weitere Rechnung notwendig) den Verlauf des Potentials Φ in Abbildung 1 C) ein. Gehen Sie dabei davon aus, dass $\Phi(x \to \infty) = 0$. Beschriften Sie wiederum Ihre Achsen aussagekräftig. [2P]

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$=$	$6.63 \cdot 10^{-34}$	Js
	$\hbar$	$=$	$\frac{h}{2\pi} = 1.05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	N_A	$=$	$6.02 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
Bohr'scher Radius	a_0	$=$	$5.29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$=$	$1.6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	$=$	$1.66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$=$	$9.11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$=$	$1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$=$	$1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$=$	$8.85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	$=$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$=$	$3.0 \cdot 10^{8}$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	$=$	$1.38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	π	$=$	3.14	
Euler'sche Zahl	e	$=$	2.72	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit	$\rightarrow$ Kilogramm	$1\,\mathrm{u} = 1.66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Elektronenvolt	$\rightarrow$ Joule	$1\,\mathrm{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$

Formeln und Integrale (Bitte beachten Sie auch die Rückseite!)

$$\exp(jkx) + \exp(-jkx) = 2\cos(kx)$$
$$\exp(jkx) - \exp(-jkx) = 2j\sin(kx)$$

$$\int (\sin ax)^2 \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax$$
$$\int (\cos ax)^2 \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax$$
$$\int \sin ax \cos ax \, dx = \frac{1}{2a}(\sin ax)^2$$
$$\int x (\sin ax)^2 \, dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x\sin 2ax - \frac{1}{8a^2}\cos 2ax$$

Fortsetzung umseitig!

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_{0}^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_{0}^{\infty} x e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_{0}^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a^2}
\end{aligned}
$$