

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

E-Mail-Adresse:

Erreichte Punktzahl:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte									
Max	10	10	13	10	10	12	8	8	81

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 81, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 41.
- In Klammern angegebene Zahlen am Aufgabenende sind die erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Bitte schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf von der Universität gestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Bitte nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie bitte jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. Allgemeine Fragen

Hinweis: Beschränken Sie Ihre Antwort pro Teilaufgabe auf maximal drei Sätze.

- a) Benennen und beschreiben Sie zwei Verfahren zur Herstellung von Halbleiter-Einkristallen! [2P]

- **Czochralski-Verfahren:** Hochreines polykristallines Vorläufermaterial wird unter Schutzgas geschmolzen. An einem Impfkristall, welcher unter Drehen aus der Schmelze gezogen wird, lagern sich Atome aus der Schmelze in geordneter Form an.
- **Molekularstrahlepitaxie:** Halbleitermaterial wird im Ultrahochvakuum aus Quelle verdampft und kondensiert auf erhitztem Substrat.
- **Zonenziehverfahren:** Ein hochreiner Stab aus polykristallinem Silizium wird durch eine Heizspule an einem Keim beginnend stückweise kristallisiert.

- b) Was ist der wesentliche Unterschied zwischen den Halbleitern Silizium und Galliumarsenid bei Betrachtung der Bandstruktur? [1P]

Silizium ist ein indirekter Halbleiter, d.h. dass neben ausreichender Energie auch ausreichend entsprechender Impuls zur Erzeugung eines angeregten Zustandes zur Verfügung stehen muss. Galliumarsenid ist dagegen ein direkter Halbleiter, bei dem durch ein Photon ohne zusätzlichen Impulsbeitrag ein angeregter Zustand erzeugt werden kann.

- c) Welche chemische Bindung lässt sich nur mit Hilfe der Quantenmechanik erklären? [1P]

Hier ist nach der kovalenten Bindung gefragt.

- d) Was besagt das Pauli-Prinzip? [1P]

Das Pauli-Prinzip besagt, dass zwei Fermionen (also beispielsweise Elektronen) nicht den gleichen Quantenzustand (inklusive Spin) besetzen dürfen.

- e) Was versteht man unter der Temperaturspannung U_T ? [1P]

U_T beschreibt die Spannung über einem pn-Übergang in Abhängigkeit von der Temperatur: $U_T = \frac{kT}{e}$.

- f) Wie viele ebene Wellen müssen Sie mindestens überlagern, um eine exakt im Ortsraum lokalisierte Wellenfunktion zu erhalten? [1P]

Auf Grund der Heisenbergschen Unschärferelation sind unendlich viele ebene Wellen erforderlich, um eine exakt im Ortsraum lokalisierte Wellenfunktion zu erhalten.

- g) Kalium hat die Elektronenkonfiguration $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1$. Geben Sie die Quantenzahlen n, l, m, s des energetisch höchsten Elektrons an! [2P]

Die gefragten Quantenzahlen sind $\{n, l, m, s\} = \{4, 0, 0, \pm \frac{1}{2}\}$.

h) Was beschreibt der Begriff Auger-Rekombination? [1P]

Dies ist eine Art Rekombination, bei der die freiwerdende Energie nichtstrahlend auf ein weiteres Teilchen übertragen wird, welches dadurch angeregt wird und dann ebenfalls nichtstrahlend relaxiert.

2. Photonen und Elektronen

Ein Laserpointer strahlt grünes Licht der Wellenlänge 532 nm aus. Sie wollen diesen Laserpointer verwenden, um in einer Photozelle mit Magnesiumkathode ($W_a = 3,7$ eV) den Photoeffekt auszulösen.

- a) Ist dies möglich? Falls ja, berechnen Sie die Geschwindigkeit der erzeugten Elektronen unter der Annahme, dass die nach der Erzeugung verbleibende Energie vollständig in kinetische Energie umgewandelt wird. [1P]

$$W_{\text{Laser}} = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = 2,33 \text{ eV} < 3,7 \text{ eV}$$

Da die Energie des Anregungslasers geringer ist als die Austrittsarbeit kann der Photoeffekt nicht ausgelöst werden.

Im Laborschrank finden Sie auch eine Photozelle mit Natriumkathode ($W_a = 2,28$ eV). Sie beschließen, lieber mit dieser weiter zu experimentieren und bestrahlen sie ebenfalls mit dem grünen Laserpointer.

- b) Welche Spannung U müssen Sie an die Kontakte der Photozelle anlegen, damit aus der Kathode herausgeschlagenen Elektronen nicht die Anode erreichen? Gehen Sie wiederum davon aus, dass die nach der Erzeugung verbleibende Energie vollständig in kinetische Energie umgewandelt wird. [2P]

$$W_{\text{Laser}} = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = 2,33 \text{ eV} > 2,28 \text{ eV}$$

Diesmal kann der Photoeffekt ausgelöst werden. Die Energiedifferenz beträgt 0,05 eV. Damit sind 0,05 V angelegte Spannung nötig, um die Elektronen abzubremesen.

Beim Betrachten des Experiments erinnern Sie sich an die Grundlagen der Quantenmechanik. Sie wollen zunächst die Dispersionsrelation von Elektronen berechnen.

- c) Verwenden Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung, um die Dispersionsrelation des freien Elektrons herzuleiten. Gehen Sie dazu von der Beschreibung des freien Elektrons als ebene Welle aus: $\Psi(x) = A \exp(j(kx - \omega t))$. [3P]

$$\begin{aligned} j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t) \right) \psi(x, t) \\ j\hbar \frac{\partial}{\partial t} A \exp(j(kx - \omega t)) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) A \exp(j(kx - \omega t)) \\ j\hbar(-j\omega) A \exp(j(kx - \omega t)) &= -\frac{\hbar^2}{2m} (j^2 k^2) A \exp(j(kx - \omega t)) \\ \hbar\omega &= \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \\ \omega &= \frac{\hbar k^2}{2m} \end{aligned}$$

Nun fragen Sie sich, wie sich Elektronen und Photonen in Ihrem Dispersionsverhalten unterscheiden. Glücklicherweise fällt Ihnen noch ein, dass die Dispersionsrelation von Photonen im Vakuum gegeben ist durch $\omega_{\text{Photon}}(k) = ck$.

- d) Berechnen Sie jeweils für Photonen im Vakuum und freie Elektronen die Gruppengeschwindigkeit v_G sowie den Dispersionsparameter $\beta = \frac{1}{2} \frac{\partial v_G}{\partial k}$. Falls Sie c) nicht lösen konnten, verwenden Sie für die Dispersionsrelation des freien Elektrons $\omega_{\text{Elektron}}(k) = A \cdot k^2$. [4P]

Zunächst ist allgemein $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$.

Für Photonen ergibt sich

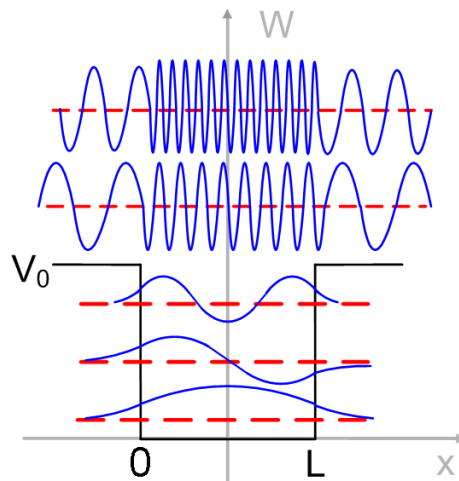
$$v_g = c \text{ und } \beta = 0,$$

für Elektronen folgt

$$v_g = \frac{\hbar k}{m_e} \text{ und } \beta = \frac{\hbar}{2m_e}.$$

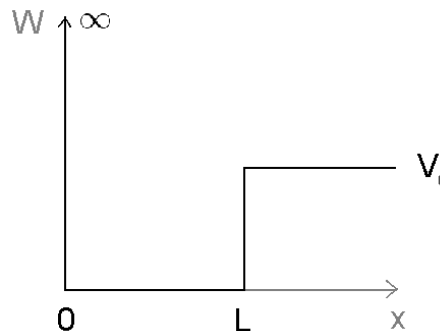
3. Potentialtopf

- a) Skizzieren Sie einen eindimensionalen Potentialtopf der Höhe V_0 (für Elektronen der Masse m), der räumlich zwischen 0 und $+L$ ausgedehnt ist. Das energetische Nullniveau befinde sich dabei am Topfboden. Zeichnen Sie den Realteil der Wellenfunktionen von zwei Eigenfunktionen für Energien $W > V_0$ und die der niedrigenergetischsten drei Lösungen mit $W < V_0$ in Ihre Skizze ein. [3P]



Nun wird das Potential auf der linken Seite (auf der Ortsachse von $-\infty$ bis 0) auf ∞ erhöht.

- b) Skizzieren Sie in einem neuen Koordinatensystem das so entstandene Potential. [1P]



- c) Beschreiben Sie, wie sich nun qualitativ die Form des Realteils der Wellenfunktionen ändert. [1P]

Bei $x = 0$ ergeben sich Knoten der Wellenfunktionen, es ist kein Eindringen in den Bereich $x < 0$ mehr möglich.

- d) Geben Sie für das Potential aus Teilaufgabe b) für $W < V_0$ die Lösungsansätze für die stationäre Schrödingergleichung in den zwei Bereichen mit endlichem Potential an und stellen Sie die zur Lösung nötigen Rand- und Nebenbedingungen auf. [4P]

Durch Betrachten des in Aufgabenteil b) skizzierten Potentials ist direkt klar, dass im Bereich $0 < x < L$ eine schwingende Welle, im Bereich $x > L$ eine exponentiell abklingende Welle vorliegen muss. Damit ergibt sich für die Lösungsansätze:

$$\begin{aligned} 0 < x < L : \Psi_1(x) &= A \exp(jk_1x) + B \exp(-jk_1x) \\ x > L : \Psi_2(x) &= C \exp(-\kappa_2x) \end{aligned}$$

Dabei gilt für k_1 bzw. κ_2 durch Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung als Eigenwertproblem (kann auch erst für den nächsten Aufgabenteil berechnet werden):

$$\begin{aligned} k_1 &= \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}} \\ \kappa_2 &= \sqrt{\frac{2m(V_0 - W)}{\hbar^2}} \end{aligned}$$

Drei Rand- und Nebenbedingungen lassen sich aufstellen:

$$\begin{aligned} \Psi_1(0) &= 0 \\ \Psi_1(L) &= \Psi_2(L) \\ \Psi_1'(L) &= \Psi_2'(L) \end{aligned}$$

- e) Leiten Sie nun die implizite Eigenwertgleichung für die Eigenenergien W für $W < V_0$ her. [4P]

Wir wenden zunächst die erste Bedingung an:

$$\begin{aligned} \Psi_1(0) = A + B = 0 &\Rightarrow B = -A \\ \Rightarrow \Psi_1(x) &= A \exp(jk_1x) - A \exp(-jk_1x) \end{aligned}$$

Damit gilt (z.B. unter Zuhilfenahme des Formelblattes am Ende der Klausur)

$$\Psi_1(x) = 2j \sin(k_1x)$$

Aus Bedingungen zwei und drei folgt damit

$$\begin{aligned} 2Aj \sin(k_1L) &= C \exp(-\kappa_2L) \\ 2Ak_1j \cos(k_1L) &= -C\kappa_2 \exp(-\kappa_2L). \end{aligned}$$

Teilen wir die beiden Gleichungen durcheinander, erhalten wir

$$\frac{k_1}{\kappa_2} = -\tan(k_1L)$$

und schließlich damit durch Einsetzen der Energien mit dem Zwischenergebnis aus Aufgabenteil b)

$$\sqrt{\frac{W}{V_0 - W}} = -\tan\left(\sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}L\right).$$

4. Parabolisches Potential

Im eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillator mit dem Potential $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ lauten die normierten Wellenfunktionen des Grundzustandes und des ersten angeregten Zustandes

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{b\sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \quad (1)$$

und

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{b^3\sqrt{\pi}}} x \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \quad (2)$$

wobei $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

- a) Berechnen Sie den Ortserwartungswert für ψ_0 ! [2P]

Der Ortserwartungswert $\langle x \rangle$ der quantenmechanischen Zustandsfunktion ψ_0 berechnet sich aus

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x)^* \cdot x \cdot \psi_0(x) dx = \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{b^2}\right) dx = 0$$

Das heißt, dass sich das Elektron im Mittel im Zentrum des parabolischen Potentials aufhält. Dies lässt sich auch anhand von Symmetrie-Überlegungen begründen, ohne explizit zu rechnen.

- b) Ein Elektron sei in einem überlagerten Zustand $\psi_G = a\psi_0 + \sqrt{0,3}\psi_1$. Wie groß ist a ($a \in \mathbb{R}$)? [1P]

Der überlagerte Zustand ψ_G muss normiert sein, d.h.

$$\begin{aligned} 1 &\stackrel{!}{=} |\psi_G|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(a^* \psi_0^* a \psi_0 + a^* \psi_0^* \sqrt{0,3} \psi_1 + \sqrt{0,3}^* \psi_1^* a \psi_0 + \sqrt{0,3}^* \psi_1^* \sqrt{0,3} \psi_1 \right) dx \\ &= |a|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0|^2 dx + 0,3 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_1|^2 dx \\ &= |a|^2 + 0,3 \\ &\Leftrightarrow a = \pm \sqrt{0,7} \end{aligned}$$

wobei der Parameter x der Einfachheit halber weggelassen wurde.

Die Integrale, die $\int \psi_0 \psi_1 dx$ enthalten, entfallen, da die Ursprungszustandsfunktionen ψ_0 und ψ_1 orthogonal (d.h. linear unabhängig) zueinander sind.

- c) Sie messen die Energie des Elektrons mit der Zustandsfunktion ψ_G aus b). Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Energie W_1 , also der zur Zustandsfunktion ψ_1 gehörige Eigenwert, gemessen? [2P]

Die Wahrscheinlichkeit W_1 zu messen beträgt $(\sqrt{0,3})^2 = 30\%$.

-
- d) Die Eigenenergie des n -ten Zustandes eines eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillators ist $W_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$. Was ist die Anzahl der Zustände pro Energieeinheit? [2P]

Die Anzahl der Zustände pro Energieeinheit $D(E)$ lässt sich analog zu der allgemeinen Zustandsdichte aus der Vorlesung mittels $D(W) = 2 \cdot \frac{dn(W)}{dW}$ berechnen:

$$W_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \Leftrightarrow n = \frac{W_n}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow D(W) = 2 \cdot \frac{dn(W)}{dW} = 2 \cdot \frac{1}{\hbar\omega}$$

- e) Wir betrachten nun einen halben harmonischen Oszillator mit

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie den Impulserwartungswert des Grundzustandes dieses neuen Systems! [3P]

Da dies ein neues System ist, gibt es auch neue Zustandsfunktionen. Allerdings ist leicht einsehbar, dass alle Zustandsfunktionen des normalen harmonischen Oszillators mit einem Knoten in der Mitte gerade die Lösungen des halben Oszillators für $x \geq 0$ sind, während die Zustandsfunktionen für $x < 0$ verschwinden, da die Zustandsfunktionen in den Knotenpunkten gerade 0 sind, was die Stetigkeitsbedingung im halben harmonischen Oszillator direkt erfüllt. Somit ist der Grundzustand $\psi_{0,halb}(x)$ des halben Oszillators

$$\psi_{0,halb}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \sqrt{2}\psi_1(x) & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

wobei der Vorfaktor $\sqrt{2}$ aus der neuen Normierung folgt.

Für die Berechnung des Impulserwartungswertes muss man den Impulsoperator $-j\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ verwenden:

$$\begin{aligned}
\langle p \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{0,halb}(x)^* (-j\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \psi_{0,halb}(x) dx \\
&= -j\hbar 2 \int_0^{\infty} \psi_1(x)^* (\frac{\partial}{\partial x} \psi_1(x)) dx \\
&= -j\hbar 2 \left(\frac{2}{b^3 \sqrt{\pi}} \right) \int_0^{\infty} x \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[x \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \right] \right\} dx \\
&= -j\hbar 2 \left(\frac{2}{b^3 \sqrt{\pi}} \right) \left[\int_0^{\infty} x \exp\left(-\frac{x^2}{b^2}\right) dx - \frac{1}{b^2} \int_0^{\infty} x^3 \exp\left(-\frac{x^2}{b^2}\right) dx \right] \\
&= -j\hbar 2 \left(\frac{2}{b^3 \sqrt{\pi}} \right) \left[\frac{b^2}{2} - \frac{1}{b^2} \frac{b^4}{2} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

5. Bandstruktur

- a) Erklären sie kurz, wie es zur Entstehung von Bandstrukturen in kristallinen Festkörpern kommt! Gehen sie bei Ihrer Argumentation vom Bild eines einzelnen Quantentopfes/Atoms aus und machen Sie dann den Transfer zu gekoppelten, periodisch angeordneten Quantentöpfen/Atomen. [2P]

In einem isolierten Atom/Quantentopf sind die Wellenfunktionen lokalisiert und die Eigenenergien der Elektronen besitzen diskrete Werte. Bringt man nun N solcher abgeschlossenen Elektronen-Potentialtöpfe zusammen, so überlappen die Wellenfunktionen und ändern ihre Form, die einzelnen Energieniveaus spalten jeweils in N neue Energien auf. Da N typischerweise groß ist ($\approx 10^{23}$), kommt es zu einer extrem feinen Aufspaltung der einzelnen Energieniveaus - es entstehen Bereiche von sehr nahe beieinander liegenden, quasi kontinuierlich verteilten Energieniveaus, die sogenannten Energiebänder. Nur innerhalb eines solchen Bandes liegen erlaubte Zustände, außerhalb der Bänder gibt es keine elektronischen Zustände. Diese unerlaubten Bereiche sind die Bandlücken.

- b) Wie lauten die Definitionen der effektiven Masse und der Gruppengeschwindigkeit eines Elektrons in einem Kristallpotential $W(k)$? [2P]

Die effektive Masse m_{eff} ist wie folgt definiert

$$m_{\text{eff}} := \hbar^2 \left(\frac{\partial^2 W(k)}{\partial k^2} \right)^{-1}$$

Die Gruppengeschwindigkeit v_g ist wie folgt definiert

$$v_g := \frac{1}{\hbar} \frac{\partial W(k)}{\partial k}$$

- c) Zeigen Sie rechnerisch, dass vollständig besetzte symmetrische, stetig differenzierbare Energiebänder nicht zum Stromtransport beitragen! [3P]

Ein Elektron trägt einen Anteil $\Delta j \propto v_G$ proportional zu seiner Gruppengeschwindigkeit v_G zur Gesamtstromdichte bei. Um die Gesamtstromdichte in einem voll besetzten Band zu ermitteln, müssen wir über die gesamte erste Brillouinzone summieren:

$$j \propto \sum_{k=-\pi/a}^{\pi/a} v_G(k) \quad (3)$$

Die Gruppengeschwindigkeit errechnet sich gemäß $v_G(k) = 1/\hbar \partial W(k)/\partial k$ aus der Bandstruktur. Da das Gitter im k -Raum um $k = 0$ symmetrisch ist, folgt $W(-k) = W(k)$ und daraus weiterhin:

$$v_G(-k) = 1/\hbar \partial W(-k)/\partial k = -1/\hbar \partial W(k)/\partial k = -v_G(k) \quad (4)$$

Dieses Ergebnis eingesetzt in die Gleichung der Stromdichte ergibt:

$$j \propto \sum_{k=-\pi/a}^{\pi/a} v_G(k) = \sum_{k=-\pi/a}^0 v_G(k) + \sum_{k=0}^{\pi/a} v_G(k) - \underbrace{v_G(0)}_{=0, \text{ da } W'(0)=0} \quad (5)$$

$$= \sum_{k=0}^{\pi/a} v_G(-k) + \sum_{k=0}^{\pi/a} v_G(k) \quad (6)$$

$$= \sum_{k=0}^{\pi/a} (v_G(-k) + v_G(k)) \quad (7)$$

$$= \sum_{k=0}^{\pi/a} (-v_G(k) + v_G(k)) \quad (8)$$

$$= 0 \quad (9)$$

Die Stromdichte in voll besetzten Bändern verschwindet also, da ebenso viele Ladungsträger in positive wie in negative Richtung zum Stromfluss beitragen. In der Herleitung haben wir benutzt, dass stets $v_G(0) = 0$ für $k = 0$ gilt, da dort ein Bandminimum oder Bandmaximum auftritt, also $W'(0) = 0$ gilt.

- d) Wie ist die Gesamt-Leitfähigkeit in einem Halbleiter definiert? [1P]

Die Gesamt-Leitfähigkeit ist definiert als

$$\sigma := e(p\mu_p + n\mu_n).$$

Hierbei ist e die Elementarladung, p bzw. n die Löcher- bzw. Elektronendichte und μ_p bzw. μ_n die Löcher- bzw. Elektronenbeweglichkeit.

- e) Wir betrachten einen n-dotierten Halbleiter, in dem der Beitrag der Löcher zum Ladungstransport vernachlässigt werden kann. Die effektive Masse der Elektronen ist $0,067m_e$, die Beweglichkeit $10^6 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1}\text{s}^{-1}$. Wie groß ist die mittlere Streuzeit der Elektronen? [2P]

Die Ladungsträgerbeweglichkeit lässt sich mittels $\mu = \frac{e\tau}{m_{\text{eff}}}$ berechnen. Damit folgt für die Streuzeit

$$\tau = \frac{\mu m_e}{e} = 3,81 \cdot 10^{-11} \text{ s} = 38,1 \text{ ps}.$$

6. Zustandsdichte

- a) Beschreiben Sie, was man unter dem Begriff „Zustandsdichte“ versteht! [2P]

Der Begriff Zustandsdichte bezieht sich auf eine Dichte pro Energieintervall. Das heißt, die Zustandsdichte gibt an, wie viele erlaubte Zustände in einem System in einem infinitesimalen Gebiet zwischen W und $W + dW$ auftreten. Meist wird die Zustandsdichte auf das Volumen des Systems normiert, d.h. wir haben es mit einer Größe der Einheit «Zustände pro Energie und pro Volumen» zu tun. Meistens meint man im Rahmen der Vorlesung die Zustandsdichte von Elektronen, man kann aber auch für andere (Quasi-)Teilchen Zustandsdichten bestimmen, z.B. für die Quanten der Gitterschwingungen, die sogenannten Phononen.

- b) Leiten Sie einen Ausdruck für die Zustandsdichte $g_{1D}(W)$ für einen eindimensionalen Quantendraht der Länge L her. Die parabolische Näherung für das Leitungsband sei gültig! Gehen Sie von einem eindimensionalen k -Raum aus. [4P]

Gemäß der parabolischen Näherung gilt zwischen Eigenenergie W , Leitungsbandkante W_L und Wellenzahl k im eindimensionalen Fall folgende Beziehung

$$W - W_L = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (10)$$

Die Länge eines Zustands im eindimensionalen k -Raum ist

$$L_{\text{Zustand}} = \frac{2\pi}{L}. \quad (11)$$

Alle Zustände mit einer Energie kleiner W liegen maximal $k_R = \sqrt{\frac{2m(W - W_L)}{\hbar^2}}$ vom Ursprung entfernt. So erhalten wir für die Zahl der Zustände:

$$N(W) = \frac{L_{\text{Strecke}}}{L_{\text{Zustand}}} = \frac{2k_R}{\frac{2\pi}{L}} = \frac{\sqrt{2m(W - W_L)}L}{\pi\hbar} \quad (12)$$

Der Zuwachs wird

$$D(W) = \frac{dN(W)}{dW} = \frac{\sqrt{m}L}{\pi\hbar\sqrt{2(W - W_L)}} \quad (13)$$

und für die Zustandsdichte folgt

$$g(W)_{1D} = 2\frac{1}{L}D(W) = \frac{\sqrt{2m}}{\pi\hbar} \frac{1}{\sqrt{W - W_L}} \quad (14)$$

mit einer Abhängigkeit von der Energie gemäß $1/\sqrt{(W - W_L)}$.

-
- c) Die Zustandsdichte im Leitungsband eines dreidimensionalen Halbleiterquaders lautet $g_{3D}(W) = \frac{4\pi(2m_{\text{eff}})^{3/2}}{h^3} \sqrt{W - W_L}$. Wie viele Zustände gibt es bei der Energie $W = W_L + 0,01 \text{ eV}$, wenn der Festkörperblock ein Volumen von 1 mm^3 hat? Es gelte $m_{\text{eff}} = m_e$. [2P]

Durch Einsetzen der Größen in die Formel für die Zustandsdichte erhält man

$$g_{3D}(W = W_L + 0,01 \text{ eV}) = 4,25 \cdot 10^{45} \frac{1}{\text{m}^3}$$

Zustände pro Volumen mit einer Energie $W = W_L + 0,01 \text{ eV}$ (Achtung: Viele Taschenrechner haben begrenzten Speicher und können daher nicht beliebig hohe Zehnerpotenzen verarbeiten. Geschicktes Kürzen vorher kann hier helfen). Mit dem Volumen von $V = 1 \text{ mm}^3$ erhält man

$$N(W = W_L + 0,01 \text{ eV}) = 4,25 \cdot 10^{36}$$

Zustände in diesem Halbleiterwürfel.

- d) Wie lautet die Formel für die Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion $f(W, T)$ und was beschreibt diese? [2P]

Die Formel für die Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion lautet

$$f(W, T) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{W - W_F}{k_B T}\right)}.$$

Sie beschreibt die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Elektron einen Zustand einer bestimmten Energie W bei einer Temperatur T besetzt.

- e) Wie berechnet man bei gegebener Verteilungsfunktion $f(W, T)$ und Zustandsdichte $g(W)$ die (wahrscheinliche) Ladungsträgerdichte für Elektronen $n(T)$ bzw. Löcher $p(T)$ bei einer bestimmten Temperatur T im Leitungs- bzw. Valenzband? Die Angabe des formalen Ansatzes genügt. [2P]

Man berechnet die wahrscheinliche Elektronen- bzw. Löcherdichte mittels

$$n(T) = \int_{W_L}^{\infty} f(W, T) g(W) dW$$

bzw.

$$p(T) = \int_{-\infty}^{W_V} (1 - f(W, T)) g(W) dW.$$

7. Kontinuitätsgleichung

In einem stark n-dotierten Halbleiter wird durch Minoritätsladungsträgerinjektion an der Stelle $x = 0$ bei $T = 400$ K eine Überschussladungsträgerdichte p_0 aufrecht erhalten. Die Ladungsträger seien in Richtung des Inneren des Halbleiters entsprechend

$$p(x) = p_0 \exp\left(-\frac{x}{L_D}\right)$$

verteilt.

- a) Leiten Sie mittels der Kontinuitätsgleichung den Zusammenhang zwischen Diffusionslänge L_D , Diffusionskonstante D_p und Lebensdauer τ_p der Löcher her! Gehen Sie davon aus, dass zur Stromdichte nur Diffusionsanteile beitragen. [6P]

Die Kontinuitätsgleichung für unseren Fall lautet:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{e} \nabla j - r_p \stackrel{1-dim}{=} -\frac{1}{e} \frac{\partial j}{\partial x} - r_p$$

Der Diffusionsstrom j berechnet sich nach Aufgabenstellung aus:

$$j = -e D_p \frac{\partial p}{\partial x} = -e D_p \frac{\partial}{\partial x} \left(p_0 \exp\left(-\frac{x}{L_D}\right) \right)$$

Für die Rekombinationsrate r_p gilt

$$r_p = \frac{p}{\tau_p},$$

denn wenn p Teilchen eine Lebensdauer von τ_p haben, dann „zerfallen“ statistisch auch genau p Teilchen in einer Zeitspanne τ_p .

Da laut Aufgabenstellung die Ladungsträgerdichte erhalten wird, gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= 0 \\ -\frac{1}{e} \frac{\partial j}{\partial x} - r_p &= 0 \\ -\frac{1}{e} \frac{\partial}{\partial x} \left(e D_p \frac{p_0}{L_D} \exp\left(-\frac{x}{L_D}\right) \right) - \frac{p_0}{\tau_p} \exp\left(-\frac{x}{L_D}\right) &= 0 \\ D_p \frac{p_0}{L_D^2} \exp\left(-\frac{x}{L_D}\right) - \frac{p_0}{\tau_p} \exp\left(-\frac{x}{L_D}\right) &= 0 \\ \frac{D_p}{L_D^2} - \frac{1}{\tau_p} &= 0 \\ \Rightarrow L_D &= \sqrt{D_p \tau_p} \end{aligned}$$

- b) Berechnen Sie nun die Diffusionslänge L_D bei einer Beweglichkeit $\mu = 10^4 \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$ und einer Lebensdauer $\tau_p = 10^{-7} \text{ s}$ der überschüssigen Ladungsträger. Falls Sie a) nicht lösen konnten, verwenden Sie $D_p = \frac{1}{4} \frac{L_D^2}{\tau_p}$ für den Zusammenhang zwischen L_D , D_p und τ_p . [2P]

Mit Hilfe der Einsteinbeziehung $D = k_B T \mu / e$ erhalten wir für die angegebenen Werte

$$L_D = \sqrt{D_p \tau_p} = \sqrt{\frac{k_B T \mu}{e} \tau_p} = 58,7 \text{ } \mu\text{m}$$

bzw. für die Alternativlösung

$$L_D = 2\sqrt{D_p \tau_p} = 2\sqrt{\frac{k_B T \mu}{e} \tau_p} = 117,4 \text{ } \mu\text{m}.$$

8. pin-Diode

Um beispielsweise die Ansprechempfindlichkeit einer Photodiode zu verbessern, werden sogenannte pin-Dioden anstelle gewöhnlicher pn-Dioden verwendet. Dabei wird zwischen p-dotierter und n-dotierter Schicht eine zusätzliche intrinsische Schicht belassen. Ohne angelegte Spannung ergibt sich nach der Dotierung für den im Folgenden betrachteten Halbleiter in Schottky-Näherung der in Abbildung 1 A) gezeigte abrupte Raumladungsdichteverlauf.

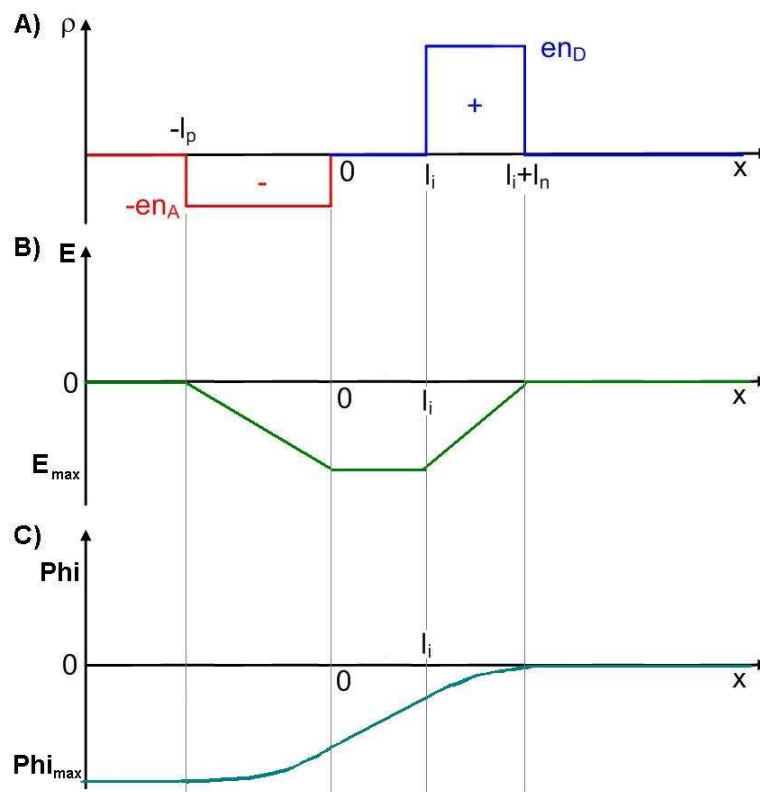


Abbildung 1: pin-Diode

- a) Leiten Sie einen Ausdruck für das elektrische Feld im abrupten pin-Übergang ohne angelegte Spannung her. Wie in Abbildung 1 A) gezeigt seien die Dotierkonzentrationen n_A im p-Bereich und n_D im n-Bereich. Gehen Sie von Störstellenerschöpfung und der Gültigkeit der Schottky-Näherung aus und verwenden Sie die in Abbildung 1 A) angegebenen Koordinaten auf der x-Achse. Zeichnen Sie abschließend den von Ihnen berechneten Feldverlauf qualitativ in Abbildung 1 B) ein. Beschriften Sie Ihre Achsen sinnvoll. [6P]

Bekanntermaßen steht die Raumladungsverteilung im Zusammenhang mit der zweiten Ableitung des Potentials:

$$\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq -l_p \\ -en_A & \text{für } -l_p < x \leq 0 \\ 0 & \text{für } 0 < x \leq l_i \\ +en_D & \text{für } l_i < x \leq l_i + l_n \\ 0 & \text{für } l_i + l_n < x \end{cases}$$

Wir können die Gleichungen durch Integrieren lösen. Einmaliges Integrieren führt auf einen Ausdruck, der die erste Ableitung des elektrischen Potentials enthält. Dies ist aber gerade die Feldstärke im Halbleiter ($\vec{E} = -\nabla\phi$), wobei der Übergang zwischen den unterschiedlich dotierten Gebieten stetig sein muss und das Feld außerhalb der Raumladungszone Null ist. Aus der konstanten zweiten Ableitung des Potentials erhalten wir erhalten eine lineare Abhängigkeit der Feldstärke vom Ort:

$$E(x) = \begin{cases} -\frac{en_A}{\epsilon_r \epsilon_0}(x + l_p) & \text{für } -l_p < x < 0 \\ -\frac{en_A}{\epsilon_r \epsilon_0}l_p & \text{für } 0 < x < l_i \\ \frac{en_D}{\epsilon_r \epsilon_0}(x - (l_n + l_i)) & \text{für } l_i < x < l_i + l_n \end{cases}$$

Skizze bereits in Abbildung 1 B) eingetragen.

- b) Zeichnen Sie nun qualitativ (keine weitere Rechnung notwendig) den Verlauf des Potentials Φ in Abbildung 1 C) ein. Gehen Sie dabei davon aus, dass $\Phi(x \rightarrow \infty) = 0$. Beschriften Sie wiederum Ihre Achsen aussagekräftig. [2P]

Skizze bereits in Abbildung 1 C) eingetragen.

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$=$	$6.63 \cdot 10^{-34}$	Js
	$\hbar$	$=$	$\frac{h}{2\pi} = 1.05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	N_A	$=$	$6.02 \cdot 10^{23}$	mol ⁻¹
Bohr'scher Radius	a_0	$=$	$5.29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$=$	$1.6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	$=$	$1.66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$=$	$9.11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$=$	$1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$=$	$1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$=$	$8.85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	$=$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$=$	$3.0 \cdot 10^8$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	$=$	$1.38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	π	$=$	3.14	
Euler'sche Zahl	e	$=$	2.72	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit $\rightarrow$ Kilogramm	$1 \text{ u} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenvolt $\rightarrow$ Joule	$1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Formeln und Integrale

$$\exp(jkx) + \exp(-jkx) = 2 \cos(kx)$$

$$\exp(jkx) - \exp(-jkx) = 2j \sin(kx)$$

$$\int (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int (\cos ax)^2 dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int \sin ax \cos ax dx = \frac{1}{2a} (\sin ax)^2$$

$$\int x (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x \sin 2ax - \frac{1}{8a^2} \cos 2ax$$

Fortsetzung umseitig!

$$\begin{array}{ll}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx &= 0 \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \\
\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a^2}
\end{array}$$