Lichttechnisches Institut
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer
Engesserstraße 13
76131 Karlsruhe

Festkörperelektronik
Klausur
7. Oktober 2011

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

E-Mail-Adresse: ....

Erreichte Punktzahl: ....

Note: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Punkte								
Max	9	5	10	7,5	7	5,5	10	54

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 54, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 27.
- In Klammern angegebene Zahlen am Aufgabenende sind die erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Bitte schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf von der Universität gestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Bitte nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie bitte jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. **Allgemeine Fragen**

Hinweis: Beschränken Sie Ihre Antwort pro Teilaufgabe auf maximal drei Sätze.

a) Was versteht man unter dem Begriff „Einheitszelle"? [1P]

b) Geben Sie den Abstand zwischen zwei nächsten Nachbaratomen in einem einfachen kubischen Gitter als Vielfaches der Gitterkonstante a an. [1P]

c) Was versteht man unter dem „Superpositionsprinzip" der Quantenmechanik? [1P]

d) Welche Prozesse können zur zeitlichen Änderung der Ladungsträgerkonzentration in einem Halbleiter beitragen? Nennen Sie zwei. [1P]

e) Was ist die „effektive Masse" eines Ladungsträgers? [1P]

f) Was versteht man unter „Störstellenreserve"? [1P]

g) Was versteht man unter Orthogonalität in der Quantenmechanik? [1P]

h) Wieso kommt es beim Stern-Gerlach-Versuch mit Silber-Atomen zur Aufspaltung in *zwei* Richtungen? [1P]

i) Warum ist Glas optisch transparent? [1P]

2. Wellenfunktionen

Betrachten Sie ein 1-dimensionales System im Zustand Ψ, der in der Ortsdarstellung durch $\Psi(x) = A \cdot e^{-\alpha|x|/2}$ gegeben ist, wobei α reell und positiv sei.

a) Normieren Sie Ψ durch geeignete Wahl von A. [1P]

b) Berechnen Sie den Ortserwartungswert $< x >$ und die Standardabweichung Δx. [1,5P]

c) Berechnen Sie $\tilde{\Psi}(p)$ in der Impulsdarstellung und bestimmen Sie damit den Impulserwartungswert $< p >$. [2,5P]

3. Dreidimensionaler Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden

Betrachten Sie den Potentialtopf $V(x, y, z) = V_x(x) + V_y(y) + V_z(z)$ mit

$$V_x(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases} \qquad V_y(y) = \begin{cases} 0, & 0 < y < b \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases} \qquad V_z(z) = \begin{cases} 0, & 0 < z < c \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die stationären Lösungen der Schrödinger-Gleichung sowie die zugehörigen Energieeigenwerte E_{xyz}. Verwenden Sie dazu einen Produktansatz $\phi_{n_x n_y n_z}(x, y, z) = \phi_{n_x}(x) \cdot \phi_{n_y}(y) \cdot \phi_{n_z}(z)$. [5P]

b) Wir betrachten den Fall $b^2 = c^2 = \frac{a^2}{10}$. Berechnen Sie die niedrigsten 8 Energieeigenwerte $E_{n_x n_y n_z}$. Um welche Quantenstruktur handelt es sich? [2P]

c) Nun gehen wir davon aus, dass $a = b = c$ gelte. Die Quantenzahlen lassen sich damit für große n zu $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = n^2$ zusammenfassen. Berechnen Sie nun die Anzahl N der Zustände mit der Energie $E \leq E_n$ in Abb. 1. [1,5P]

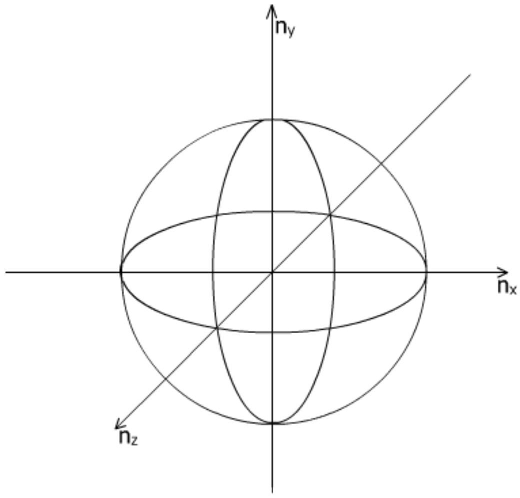

Abbildung 1

d) Leiten Sie einen Ausdruck für die Zustandsdichte $D(E)$ her und skizzieren Sie Ihr Ergebnis. [1,5P]

4. **Kristallmikroskopie**

Sie interessieren sich für das Gitter von Molybdän und möchten dieses gerne mikroskopisch betrachten.

a) Molybdän kristallisiert in einem bcc-Gitter mit einatomiger Basis und hat eine Dichte von $10,28\, g/cm^3$ und eine molare Masse von $95,94 g/mol$. Zeichnen Sie das Kristallgitter und berechnen Sie die Gitterkonstante a. [2,5P]

b) Ihnen steht ein Rastertunnelmikroskop und ein Transmissionselektronenmikroskop zur Verfügung. Skizzieren Sie das Messprinzip des Rastertunnelmikroskops. Welche Distanzen können typischerweise durchtunnelt werden? Wodurch ist die Auflösung dieses Mikroskops begrenzt? [2,5P]

c) Sie entscheiden sich für ein Transmissionselektronenmikroskop. Dessen Beschleunigungsspannung können Sie zwischen $1\, kV$ und $100\, kV$ variieren. Bestimmen Sie die Auflösungsgrenze, die sich - analog zum Lichtmikroskop - mit $\Delta x = \frac{\lambda}{2A}$ berechnen lässt, wobei die numerische Apertur der Linsen des Mikroskops ca. $A = 10^{-2}$ erreicht. Ist dies ausreichend, um das Gitter abzubilden? [2,5P]

5. **Ladungsträgerverteilungen**

a) Ein Halbleiter werde mit einer Störstellenkonzentration $N \gg n_i$ dotiert und alle Störstellen seien ionisiert. Es gelte $p = n_i^2/N$. Sind die Störstellen Akzeptoren oder Donatoren? Begründen Sie. [1P]

b) Ein Silizium-Wafer sei durch das Einbringen von Bor gleichmäßig mit einer Störstellenkonzentration von $N = 10^{15}/\mathrm{cm}^3$ dotiert. Geben Sie Ladungsträgerkonzentrationen für Elektronen n und Löcher p bei $T = 0K$ an. [1P]

c) Zeigen Sie rechnerisch, dass das Maximum der Ladungsträgerverteilung $n(E)$ in einem intrinsischen, nicht-entarteten Halbleiter $k_BT/2$ über der Leitungsbandkante E_C liegt. Gehen Sie von der Parabelnäherung für das Leitungsbandminimum aus. [2,5P]

d) Ein Silizium-Wafer sei mit $N_A = 10^{14}/cm^3$ dotiert. Wo liegt das Ferminiveau E_F bei $T = 0K$? Erläutern Sie Ihre Aussage. Nun werde die Temperatur erhöht. Skizzieren Sie den Verlauf des Ferminiveaus über der Temperatur im Banddiagramm. [2,5P]

6. **Diffusion**

Betrachten Sie die stationäre Löcherverteilung

$$p(x) = p_0 \, e^{-\frac{x}{L_D}}$$

in einem stark n-dotierten Halbleiter bei Raumtemperatur.

a) Beschreiben Sie die Ursache für einen Drift- und einen Diffusionsstrom jeweils per Formel und mit Worten. [2P]

b) Aus geeigneten Messungen seien nun die Lebensdauer τ_p und die Diffusionslänge L_D der Löcher bekannt. Leiten Sie einen Ausdruck zur Berechnung der Diffusionskonstanten in Abhängigkeit von τ_p und L_D für die Löcher unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung her. Es werde kein äußeres elektrisches Feld angelegt. Für die Rekombinationsrate können Sie $r_p = p/\tau_p$ annehmen. Nehmen Sie ferner an, dass Generationsprozesse im entsprechenden Raumbereich vernachlässigbar sind. [3,5P]

7. Banddiagramm

Wir betrachten Bor- und Phosphor-dotiertes Silizium bei Raumtemperatur.

a) Zeichnen sie für beide Halbleiter je folgende Diagramme:

- Energie über dem Ort. Zeichnen Sie Ferminiveau, Störstellenniveau, Leitungs- und Valenzband. [2P]
- Energie über der Besetzungswahrscheinlichkeit für Fermionen. [2P]
- Energie über der Zustandsdichte und Ladungsträgerdichte. [4P]

b) Zeichnen Sie das Banddiagramm, wenn beide Halbleiter in Kontakt gebracht werden...

- ...ohne äußere Vorspannung. [1P]
- ...mit einer äußeren Vorspannung $+U_D$ (Diffusionsspannung). [1P]

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$=$	$6.63 \cdot 10^{-34}$	Js
	$\hbar$	$=$	$\frac{h}{2\pi} = 1.05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	N_A	$=$	$6.02 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
Bohr'scher Radius	a_0	$=$	$5.29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$=$	$1.6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	$=$	$1.66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$=$	$9.11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$=$	$1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$=$	$1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$=$	$8.85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	$=$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$=$	$3.0 \cdot 10^{8}$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	$=$	$1.38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	π	$=$	3.14	
Euler'sche Zahl	e	$=$	2.72	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit	$\rightarrow$ Kilogramm	$1\,\mathrm{u} = 1.66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Elektronenvolt	$\rightarrow$ Joule	$1\,\mathrm{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$

Formeln und Integrale (Bitte beachten Sie auch die Rückseite!)

$$\begin{aligned} \exp(jkx) + \exp(-jkx) &= 2\cos(kx) \\ \exp(jkx) - \exp(-jkx) &= 2j\sin(kx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int (\sin ax)^2\ dx &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax \\ \int (\cos ax)^2\ dx &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax \\ \int \sin ax \cos ax\, dx &= \frac{1}{2a}(\sin ax)^2 \\ \int x(\sin ax)^2\ dx &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x\sin 2ax - \frac{1}{8a^2}\cos 2ax \end{aligned}$$

Fortsetzung umseitig!

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a^2} \\
\int_0^{\infty} x^n \cdot e^{-ax}\, dx &= \frac{n!}{a^{n+1}}\,(a > 0, n = 0, 1, 2, ...)
\end{aligned}
$$