

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

E-Mail-Adresse:

Erreichte Punktzahl:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Punkte								
Max	9	5	10	7,5	7	5,5	10	54

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 54, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 27.
- In Klammern angegebene Zahlen am Aufgabenende sind die erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Bitte schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf von der Universität gestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Bitte nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie bitte jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. Allgemeine Fragen

Hinweis: Beschränken Sie Ihre Antwort pro Teilaufgabe auf maximal drei Sätze.

- a) Was versteht man unter dem Begriff „Einheitszelle“? [1P]

Die Einheitszelle ist eine kleine Einheit eines Kristalls, die benutzt werden kann um den kompletten Kristall zu reproduzieren.

- b) Geben Sie den Abstand zwischen zwei nächsten Nachbaratomen in einem einfachen kubischen Gitter als Vielfaches der Gitterkonstante a an. [1P]

1.

- c) Was versteht man unter dem „Superpositionsprinzip“ der Quantenmechanik? [1P]

Der Gesamtzustand Ψ eines quantenmechanischen Systems lässt sich als lineare Überlagerung der Einzelzustände beschreiben oder anders formuliert: Die Summe von Wellenfunktionen, die die Schrödingergleichung eines Systems lösen, löst ebenfalls die Schrödingergleichung.

- d) Welche Prozesse können zur zeitlichen Änderung der Ladungsträgerkonzentration in einem Halbleiter beitragen? Nennen Sie zwei. [1P]

Siehe Kontinuitätsgleichung: Generation, Rekombination, Änderung des Stromflusses (Drift-, Diffusionsströme).

- e) Was ist die „effektive Masse“ eines Ladungsträgers? [1P]

Sie bezeichnet die scheinbare Masse eines Teilchens in einem Kristall im Rahmen einer semiklassischen Beschreibung. Elektronen und Löcher verhalten sich in einem Kristall im Einfluss elektrischer bzw. magnetischer Felder ähnlich wie freie Elektronen mit einer entsprechend modifizierten Masse.

- f) Was versteht man unter „Störstellenreserve“? [1P]

Im n -dotierten Halbleiter gibt es für sehr niedrige Temperaturen nur wenige freie Ladungsträger, die Elektronen sitzen im Valenzband und an den Dotieratomen. Mit steigender Temperatur können die Donatoren ionisiert werden, die Zahl der freien Elektronen steigt. Diesen Temperaturbereich nennt man Störstellenreserve. Entsprechendes gilt für p -Halbleiter.

- g) Was versteht man unter Orthogonalität in der Quantenmechanik? [1P]

In der Quantenmechanik sucht man im Allgemeinen eine orthogonale Basis für den Hilbertraum, die die Schrödingergleichung für die relevanten Observablen löst.

- h) Wieso kommt es beim Stern-Gerlach-Versuch mit Silber-Atomen zur Aufspaltung in zwei Richtungen? [1P]

Bei Silber trägt nur das $5s$ -Elektron mit $l = 0$ und $s = \frac{1}{2}$ zum Gesamtdrehimpuls bei, da sich die Spins und Drehimpulse der restlichen Elektronen nach der Hundschen

Regel aufheben. Es gibt also eine Aufspaltung für Atome mit „spin-up“ und „spin-down“.

i) Warum ist Glas optisch transparent? [1P]

Es existieren keine Energieübergänge im sichtbaren Spektralbereich, da die Bandlücke größer als die Photonenenergie von sichtbarem Licht ist.

2. Wellenfunktionen

Betrachten Sie ein 1-dimensionales System im Zustand Ψ , der in der Ortsdarstellung durch $\Psi(x) = A \cdot e^{-\alpha|x|/2}$ gegeben ist, wobei α reell und positiv sei.

- a) Normieren Sie Ψ durch geeignete Wahl von A .

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx &= A^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|} dx = 2A^2 \cdot \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = 2A^2 \alpha^{-1} \stackrel{!}{=} 1 \\ \Rightarrow A &= \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

[1P]

- b) Berechnen Sie den Ortserwartungswert $\langle x \rangle$ und die Standardabweichung Δx .
[1,5P]

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= A^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\alpha|x|} dx = 0 \quad [0,5P] \\ \langle x^2 \rangle &= A^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\alpha|x|} dx \stackrel{\text{Formelsammlung}}{=} \frac{2}{\alpha^2} \quad [0,5P] \\ \Rightarrow \Delta x &= \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \quad [0,5P] \end{aligned}$$

- c) Berechnen Sie $\tilde{\Psi}(p)$ in der Impulsdarstellung und bestimmen Sie damit den Impulserwartungswert $\langle p \rangle$. [2,5P]

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(p) &= A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar} e^{-\alpha|x|/2} dx \quad [0,5P] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} A \left(\int_{-\infty}^0 e^{(\frac{\alpha}{2} - i\frac{p}{\hbar})x} dx + \int_0^{\infty} e^{-(\frac{\alpha}{2} + i\frac{p}{\hbar})x} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} A \left(\frac{1}{\frac{\alpha}{2} - i\frac{p}{\hbar}} + \frac{1}{\frac{\alpha}{2} + i\frac{p}{\hbar}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\hbar}} \frac{\alpha^{3/2}}{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{p^2}{\hbar^2}} \quad [1P] \\ \langle p \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} p |\tilde{\Psi}(p)|^2 dp = 0 \quad [1P] \end{aligned}$$

3. Elektronen im dreidimensionalen Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden

Betrachten Sie den Potentialtopf $V(x, y, z) = V_x(x) + V_y(y) + V_z(z)$ mit

$$V_x(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases} \quad V_y(y) = \begin{cases} 0, & 0 < y < b \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases} \quad V_z(z) = \begin{cases} 0, & 0 < z < c \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

- a) Bestimmen Sie die stationären Lösungen der Schrödinger-Gleichung sowie die zugehörigen Energieeigenwerte E_{xyz} . Verwenden Sie dazu einen Produktansatz $\phi_{n_x n_y n_z}(x, y, z) = \phi_{n_x}(x) \cdot \phi_{n_y}(y) \cdot \phi_{n_z}(z)$.

Die Schrödinger-Gleichung lautet gemäß Aufgabenstellung:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V_x(x) + V_y(y) + V_z(z) \right] \phi_{n_x n_y n_z}(x, y, z) = E_{n_x n_y n_z} \cdot \phi_{n_x n_y n_z}(x, y, z)$$

Damit erhalten wir drei unabhängige Gleichungen:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{n_x}(x) \right) \phi_x(x) &= E_{n_x} \phi_{n_x}(x) \\ \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + V_{n_y}(y) \right) \phi_y(y) &= E_{n_y} \phi_{n_y}(y) \\ \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V_{n_z}(z) \right) \phi_z(z) &= E_{n_z} \phi_{n_z}(z) \end{aligned}$$

[0,5P]

Berechnen wir beispielhaft die Lösung für die x-Komponente für $0 < x < a$, sonst ist $\phi_{n_x}(x) = 0$ [0,5P]:

$$\phi_{n_x}(x) = \alpha \sin(k_x x) + \beta \cos(k_x x) \text{ mit } k_x = \sqrt{2mE_x}/\hbar \text{ [0,5P]}$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \phi_{n_x}(0) &\stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \beta = 0 \text{ [0,5P]} \\ \phi_{n_x}(a) &\stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow k_x a = \pi n_x, \text{ mit } n_x = 1, 2, \dots \text{ [0,5P]} \end{aligned}$$

$$\text{Normierung: } 1 \stackrel{!}{=} \int_0^a |\alpha|^2 \sin^2(\pi n_x x/a) dx = |\alpha|^2 \frac{a}{2} \text{ [0,5P].}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \phi_{n_x}(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n_x x}{a}\right), \text{ (einsetzen in Schrödingergleichung) [0,5P]} \\ \Rightarrow E_{n_x} &= \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n_x}{a}\right)^2 \text{ [0,5P]} \end{aligned}$$

...und analog:

$$\phi_{n_y}(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{\pi n_y y}{b}\right),$$

$$E_{n_y} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n_y}{b}\right)^2,$$

$$\phi_{n_z}(z) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sin\left(\frac{\pi n_z z}{c}\right),$$

$$E_{n_z} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n_z}{c}\right)^2,$$

...und somit:

$$\phi_{n_x n_y n_z} = \frac{2^{3/2}}{\sqrt{abc}} \sin\left(\frac{\pi n_x x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n_y y}{b}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n_z z}{c}\right) \quad [0,5P]$$

$$E_{n_x n_y n_z} = E_{n_x} + E_{n_y} + E_{n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right) \cdot [0,5P]$$

- b) Wir betrachten den Fall $b^2 = c^2 = \frac{a^2}{10}$. Berechnen Sie die niedrigsten 8 Energieeigenwerte $E_{n_x n_y n_z}$. Um welche Quantenstruktur handelt es sich?

$$\begin{aligned} E_{n_x n_y n_z} &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right) \\ &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_x^2 + 10n_y^2 + 10n_z^2}{a^2} \right) \quad [0,5P] \end{aligned}$$

...und somit:

$$E_{111} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \cdot 21$$

$$E_{211} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \cdot 24$$

$$E_{311} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \cdot 29$$

$$E_{411} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \cdot 36$$

$$E_{511} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \cdot 45$$

$$E_{121} = E_{112} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \cdot 51$$

$$E_{221} = E_{212} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \cdot 54$$

[1P]

Es handelt sich also um einen Quantendraht. [0,5P]

- c) Nun gehen wir davon aus, dass $a = b = c$ gelte. Die Quantenzahlen lassen sich damit für große n zu $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = n^2$ zusammenfassen. Berechnen Sie nun die Anzahl N der Zustände mit der Energie $E \leq E_n$ in Abb. ??.

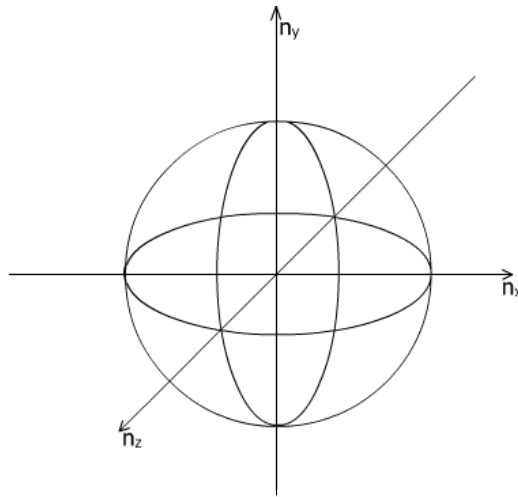


Abbildung 1

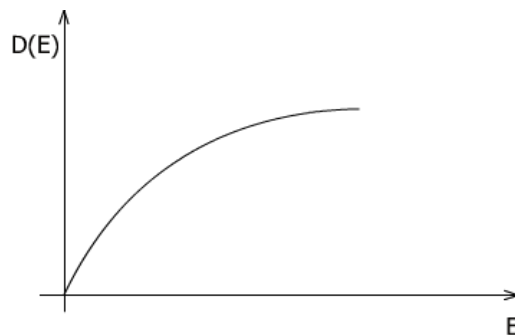
Zunächst gilt nun $n = \frac{a\sqrt{2m}}{\pi\hbar} \cdot \sqrt{E_n}$. [0,5P]

Die Kugel hat das Volumen $V = \frac{4}{3}\pi n^3$. Beachten wir noch, dass jeder Zustand auf Grund des Spins doppelt besetzt werden kann und das Kugelvolumen nur für positive n_x , n_y und n_z physikalisch Sinn ergibt, müssen wir für die Anzahl der Zustände korrigieren:

$$N = \frac{4}{3}\pi n^3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{2^{3/2}}{3} \frac{m^{3/2} a^3}{\pi^2 \hbar^3} E_n^{3/2} \quad [1P]$$

- d) Leiten Sie einen Ausdruck für die Zustandsdichte $D(E)$ her und skizzieren Sie Ihr Ergebnis.

$$D(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{2^{1/2} m^{3/2} a^3}{\pi^2 \hbar^3} \cdot \sqrt{E} \quad [1P]$$

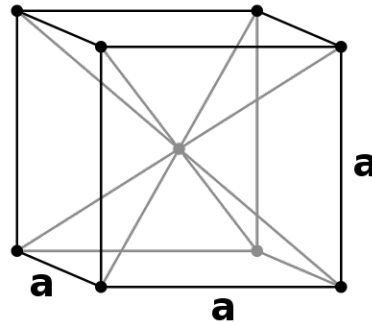


[0,5P]

4. Kristallmikroskopie

Sie interessieren sich für das Gitter von Molybdän und möchten dieses gerne mikroskopisch betrachten.

- a) Molybdän kristallisiert in einem bcc-Gitter mit einatomiger Basis und hat eine Dichte von $10,28 \text{ g/cm}^3$ und eine molare Masse von $95,94 \text{ g/mol}$. Zeichnen Sie das Kristallgitter und berechnen Sie die Gitterkonstante a .



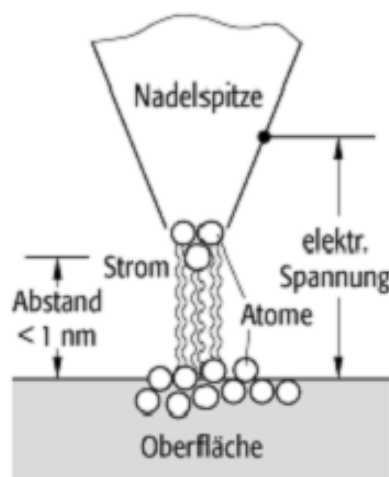
[1P]

Mit einer einatomigen Basis beträgt die Gitterkonstante a :

$$a = \sqrt[3]{V} \underbrace{=}_{\rho=m/V} \sqrt[3]{m/\rho} \underbrace{=}_{m=2 \cdot 95,94u} \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 95,94u}{10,28 \text{ g/cm}^3}} \quad [1P]$$

$$= 0,314 \text{ nm} \quad [0,5P]$$

- b) Ihnen steht ein Rastertunnelmikroskop und ein Transmissionselektronenmikroskop zur Verfügung. Skizzieren Sie das Messprinzip des Rastertunnelmikroskops. Welche Distanzen können typischerweise durchtunnelt werden? Wodurch ist die Auflösung dieses Mikroskops begrenzt?



[1P]

Typischerweise liegt der Abstand zwischen Tip und Probe im Nanometer-Bereich $[0,5P]$. Die Auflösungsgrenze ist durch den Krümmungsradius der Spitze determiniert. [1P]

- c) Sie entscheiden sich für ein Transmissionselektronenmikroskop. Dessen Beschleunigungsspannung können Sie zwischen 1 kV und 100 kV variieren. Bestimmen Sie die Auflösungsgrenze, die sich - analog zum Lichtmikroskop - mit $\Delta x = \frac{\lambda}{2A}$ berechnen lässt, wobei die numerische Apertur der Linsen des Mikroskops ca. $A = 10^{-2}$ erreicht. Ist dies ausreichend, um das Gitter abzubilden?

Klassisch können wir ausrechnen:

$$v_{\text{klassisch}} = \sqrt{\frac{2eU_B}{m_0}} = \sqrt{\frac{2e \cdot 100\text{ kV}}{m_0}} = 187.553.730\text{ m/s} \approx c_0/2! \text{ [1P]}$$

Eigentlich müsste man also relativistisch rechnen, klassisch sei hier aber ausnahmsweise auch noch ok. Der Vollständigkeit halber:

$$v_{\text{rel}} = c \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{eU_B}{m_0c^2}\right)^2}} = 164.352.482\text{ m/s}$$

Und damit:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2A} = \frac{h}{2A \cdot mv} = \begin{array}{l} 0,194\text{ nm, klassisch [1P]} \\ 0,221\text{ nm, relativistisch} \end{array}$$

Die Auflösungsgrenze ist also ausreichend. $[0,5P]$

5. Ladungsträgerverteilungen

- a) Ein Halbleiter werde mit einer Störstellenkonzentration $N \gg n_i$ dotiert und alle Störstellen seien ionisiert. Es gelte $p = n_i^2/N$. Sind die Störstellen Akzeptoren oder Donatoren? Begründen Sie.

Beim Einbau von Donatoren gilt $n \approx N$ und damit $p = n_i^2/n = n_i^2/N$ [0,5P]. Es wurden also Donatoren eingebaut. [0,5P]

- b) Ein Silizium-Wafer sei durch das Einbringen von Bor gleichmäßig mit einer Störstellenkonzentration von $N = 10^{15}/\text{cm}^3$ dotiert. Geben Sie Ladungsträgerkonzentrationen für Elektronen n und Löcher p bei $T = 0K$ an.

Durch den Einbau von Bor ist das Silizium p-dotiert. Bei $T = 0K$ frieren die Ladungsträger aus [0,5P], sowohl n als auch p gehen gegen 0 [0,5P].

- c) Zeigen Sie rechnerisch, dass das Maximum der Ladungsträgerverteilung $n(E)$ in einem intrinsischen, nicht-entarteten Halbleiter $k_B T/2$ über der Leitungsbandkante E_C liegt. Gehen Sie von der Parabelnäherung für das Leitungsbandminimum aus.

Die Verteilung der Elektronen im Leitungsband ist gegeben durch das Produkt aus Zustandsdichte und Besetzungswahrscheinlichkeit $g_c(E) \cdot f(E)$ [0,5P]:

$$\begin{aligned} n(E) = g_c(E) \cdot f(E) &= \frac{m_n^* \sqrt{2m_n^*(E - E_C)}}{\pi^2 \hbar^3} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + e^{(E-E_F)/k_B T}}}_{\approx e^{-(E-E_F)/k_B T} \text{ [0,5P]}} \quad [0,5P] \\ &= \alpha \sqrt{E - E_C} e^{-(E-E_F)/k_B T} \quad \text{mit } \alpha = \frac{m_n^* \sqrt{2m_n^*}}{\pi^2 \hbar^3} \end{aligned}$$

Für die Extremwertbildung leiten wir ab:

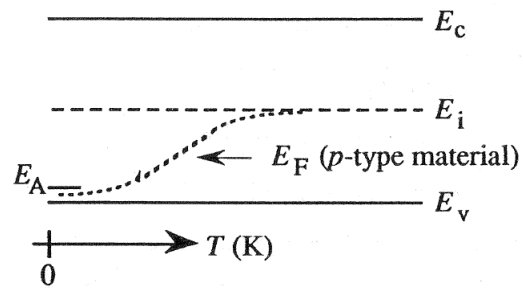
$$\begin{aligned} \frac{d}{dE} [g_c(E) \cdot f(E)] &= \frac{\alpha}{2\sqrt{E - E_C}} e^{-(E-E_F)/k_B T} - \frac{\alpha \sqrt{E - E_C}}{k_B T} e^{-(E-E_F)/k_B T} \\ &\stackrel{!}{=} 0 \quad [0,5P] \\ \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{E_{\text{peak}} - E_C}} &= \frac{\sqrt{E_{\text{peak}} - E_C}}{k_B T} \\ \Leftrightarrow E_{\text{peak}} &= E_C + k_B T/2 \quad [0,5P] \end{aligned}$$

- d) Ein Silizium-Wafer sei mit $N_A = 10^{14}/\text{cm}^3$ dotiert. Wo liegt das Fermi-niveau E_F bei $T = 0K$? Erläutern Sie Ihre Aussage. Nun werde die Temperatur erhöht. Skizzieren Sie den Verlauf des Fermi-niveaus über der Temperatur im Banddiagramm.

Bei $T = 0K$ befinden sich alle Elektronen unterhalb von E_F [0,5P]. Ferner geht $p \xrightarrow{T=0K} 0$, d.h. die Akzeptoren werden entleert. Damit liegt E_F tiefer als E_A und

gleichzeitig auch höher als E_V , da sonst $p = 0$ nicht gegeben wäre. Also: $E_V < E_F < E_A$ [1P].

Mit zunehmender Temperatur nähert sich E_F dem intrinsischen Fermi-niveau E_i :



[1P]

6. Diffusion

Betrachten Sie die stationäre Löcherverteilung

$$p(x) = p_0 e^{-\frac{x}{L_D}}$$

in einem stark n-dotierten Halbleiter bei Raumtemperatur.

- a) Beschreiben Sie die Ursache für einen Drift- und einen Diffusionsstrom jeweils per Formel und mit Worten.

Die Ursache für einen Driftstrom ist ein angelegtes elektrisches Feld [0,5P]:

$$\vec{j}_{n,Drift} = en\mu_n \vec{E} \quad [0,5P]$$

Die Ursache für einen Diffusionsstrom ist ein Ladungsträgergradient [0,5P]:

$$\vec{j}_{n,Diff} = eD_n \nabla n \quad [0,5P]$$

- b) Aus geeigneten Messungen seien nun die Lebensdauer τ_p und die Diffusionslänge L_D der Löcher bekannt. Leiten Sie einen Ausdruck zur Berechnung der Diffusionskonstanten in Abhängigkeit von τ_p und L_D für die Löcher unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung her. Es werde kein äußeres elektrisches Feld angelegt. Für die Rekombinationsrate können Sie $r_p = p/\tau_p$ annehmen. Nehmen Sie ferner an, dass Generationsprozesse im entsprechenden Raumbereich vernachlässigbar sind.

Die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{e} \frac{\partial j_p}{\partial x} - r_p + \underbrace{g_p}_{\approx 0} \quad [1P]$$

Der Diffusionsstrom j_p berechnet sich aus:

$$j = -eD_p \frac{\partial p}{\partial x} = -eD_p \frac{\partial}{\partial x} \left(p_0 e^{-\frac{x}{L_D}} \right) \quad [1P]$$

Für die Rekombinationsrate r_p gilt:

$$r_p = \frac{p}{\tau_p}$$

(Wenn p Teilchen eine Lebensdauer von τ_p haben, dann „zerfallen“ p Teilchen in einer Zeitspanne τ_p .)

Da laut Aufgabenstellung die Ladungsträgerdichte erhalten ist, gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0 &= -\frac{1}{e} \frac{\partial j}{\partial x} - r_p [0,5P] \\
&= -\frac{1}{e} \frac{\partial}{\partial x} \left(e D_p \frac{p_0}{L_D} \exp \left(-\frac{x}{L_D} \right) \right) - \frac{p_0}{\tau_p} \exp \left(-\frac{x}{L_D} \right) \\
&= D_p \frac{p_0}{L_D^2} \exp \left(-\frac{x}{L_D} \right) - \frac{p_0}{\tau_p} \exp \left(-\frac{x}{L_D} \right) \\
&= \frac{D_p}{L_D^2} - \frac{1}{\tau_p} \\
\Leftrightarrow D_p &= \frac{L_D^2}{\tau_p} [1P]
\end{aligned}$$

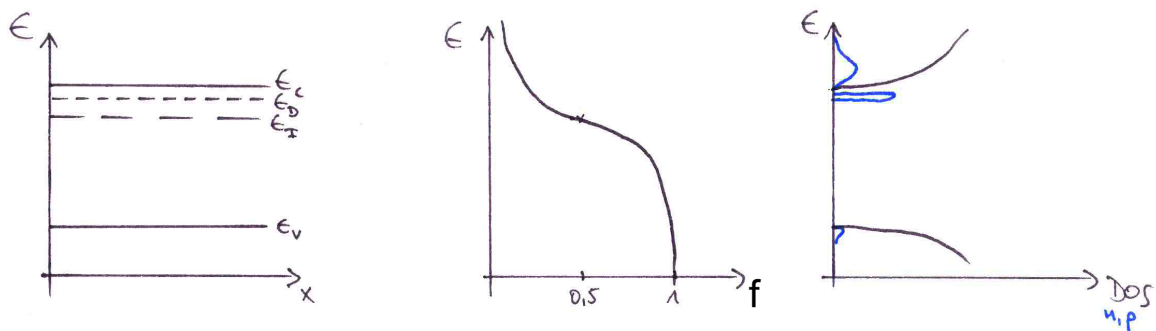
7. Banddiagramm

Wir betrachten Bor- und Phosphor-dotiertes Silizium bei Raumtemperatur.

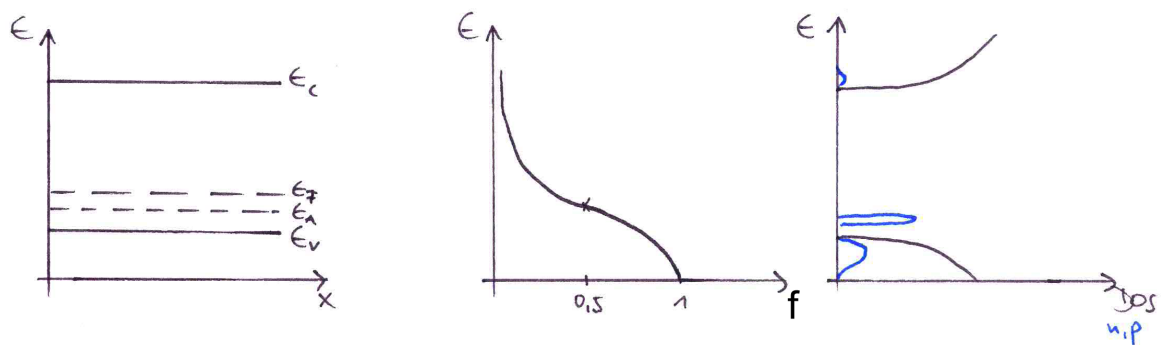
a) Zeichnen sie für beide Halbleiter je folgende Diagramme:

- Energie über dem Ort. Zeichnen Sie Fermi-niveau, Störstellenniveau, Leitungs- und Valenzband.
- Energie über der Besetzungswahrscheinlichkeit für Fermionen.
- Energie über der Zustandsdichte und Ladungsträgerdichte.

n-dotiert (Phosphor) $2x[1P] + 1x[2P]$:



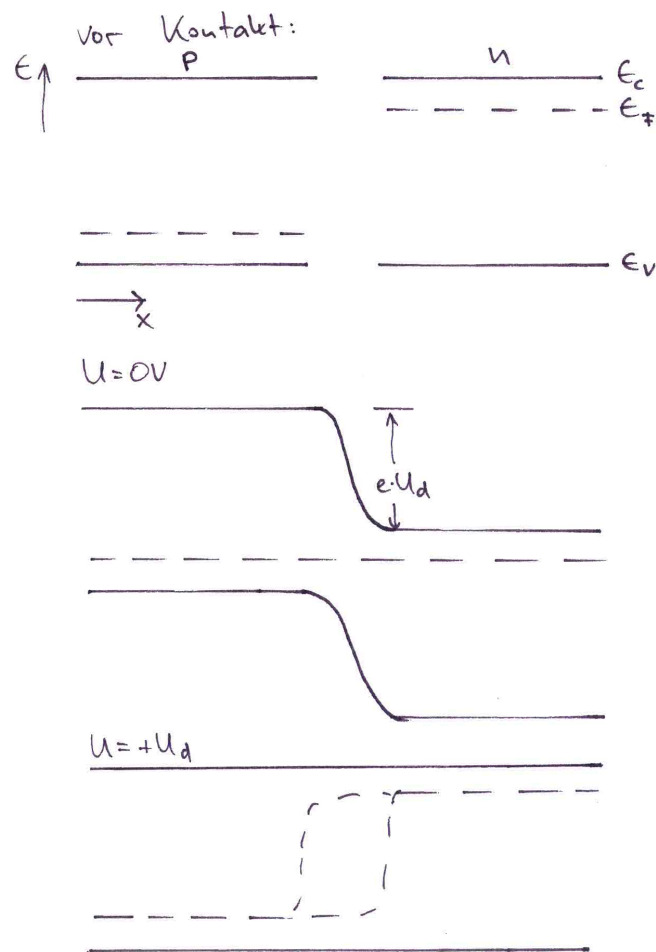
p-dotiert (Bor) $2x[1P] + 1x[2P]$:



b) Zeichnen Sie das Banddiagramm, wenn beide Halbleiter in Kontakt gebracht werden...

- ...ohne äußere Vorspannung.
- ...mit einer äußeren Vorspannung $+U_D$ (Diffusionsspannung).

$2x[1P]$



Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$= 6.63 \cdot 10^{-34}$	Js
	$\hbar$	$= \frac{h}{2\pi} = 1.05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	N_A	$= 6.02 \cdot 10^{23}$	mol ⁻¹
Bohr'scher Radius	a_0	$= 5.29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$= 1.6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	$= 1.66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$= 9.11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$= 1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$= 1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$= 8.85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	$= 4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$= 3.0 \cdot 10^8$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	$= 1.38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	π	$= 3.14$	
Euler'sche Zahl	e	$= 2.72$	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit $\rightarrow$ Kilogramm	$1 \text{ u} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenvolt $\rightarrow$ Joule	$1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Formeln und Integrale (Bitte beachten Sie auch die Rückseite!)

$$\exp(jkx) + \exp(-jkx) = 2 \cos(kx)$$

$$\exp(jkx) - \exp(-jkx) = 2j \sin(kx)$$

$$\int (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int (\cos ax)^2 dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int \sin ax \cos ax dx = \frac{1}{2a} (\sin ax)^2$$

$$\int x (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x \sin 2ax - \frac{1}{8a^2} \cos 2ax$$

Fortsetzung umseitig!

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = 0$$

$$\int_0^{\infty} x^n \cdot e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a > 0, n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2}$$