

Name, Vorname: .....

Matrikelnummer: .....

E-Mail-Adresse: .....

Erreichte Punktzahl: .....

Note: .....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\Sigma$
Punkte									
Max	6,5	10	5	9	5	6	4,5	8	54

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 54, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 27.
- In Klammern angegebene Zahlen am Aufgabenende sind die erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Bitte schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf von der Universität gestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Bitte nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie bitte jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.



## 1. Melone im Paralleluniversum

In einem Paralleluniversum gelten die gleichen Naturgesetze wie in unserem und die Naturkonstanten seien bis auf ein geändertes Plank'sches Wirkungsquantum  $\hbar' = 10^{-3} J \cdot s$  identisch. Auf einem dortigen Planeten wachsen Melonen mit sehr harten Schalen und einem Durchmesser  $d_M = 20 \text{ cm}$ . Wie irdische Melonen bestehen sie fast ausschließlich aus Wasser und enthalten Kerne mit einem Gewicht  $m_K = 1 \text{ g}$ .

- a) Warum wäre es unangenehm, eine solche Melone aufzuschneiden? Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch anhand der geänderten Heisenberg'schen Unschärferelation. [2,5P]
- b) Betrachten Sie einen elastischen Stoß eines Photons der Wellenlänge  $\lambda_P = 628 \text{ nm}$  mit einer Melone. Welche Geschwindigkeit hat die Melone nach dem Stoß? [4P]



## 2. Wellenfunktionen

- a) Ein Teilchen der Masse  $m$  sei durch die Wellenfunktion  $\psi(x, t) = A \cdot e^{-a[(mx^2/\hbar)+it]}$  mit den positiven, reellen Konstanten  $A$  und  $a$  beschrieben. Für welches Potential  $V(x)$  löst diese Wellenfunktion die Schrödingergleichung? [2P]
- b) Die Wellenfunktion eines Systems zur Zeit  $t = 0$  sei durch die Wellenfunktion

$$\Psi(x, t = 0) = \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$$

gegeben. Überprüfen Sie hierfür die Heisenberg'sche Unschärferelation, indem Sie die Orts- und Impulsunschärfe berechnen. [3,5P]

- c) Ein Teilchen der Masse  $m$  bewege sich in einem eindimensionalen harmonischen Potential und befinde sich im Zustand

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\psi_6(x)$$

, wobei  $\psi_i(x)$  die normierten Eigenzustände des stationären harmonischen Oszillators sind. Welche Werte  $E_i$  werden bei einer Messung der Energie des Teilchens gemessen und mit welchen Wahrscheinlichkeiten  $P_i$ ? Wie groß ist der Erwartungswert  $\langle E \rangle$  der Energie in diesem Zustand? [4,5P]



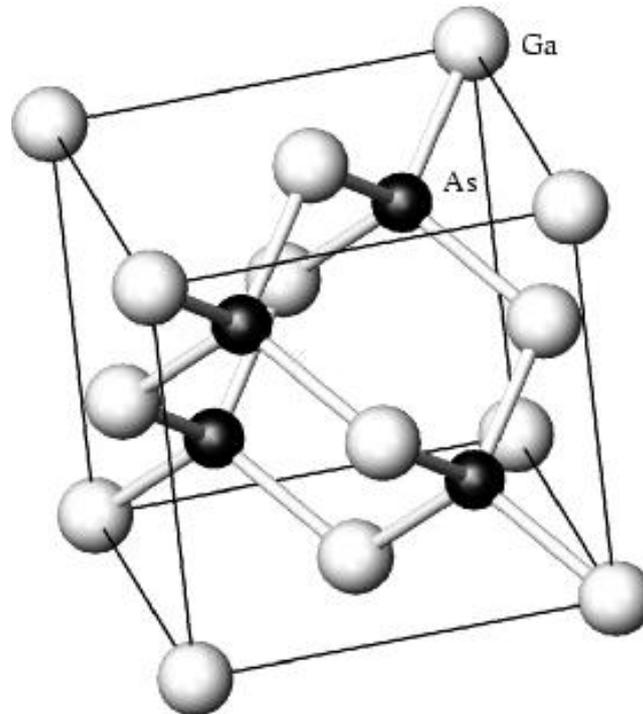
Name:

Matrikel-Nr.:

---

### 3. Kubische Gitter

Betrachten Sie das Kristallgitter von GaAs.



- Zu welchem Raumgittertyp gehört dieses Kristallgitter? Welche Atome befinden sich in der Basis? [1P]
- Wie viele Atome eines jeden Elements befinden sich in der Einheitszelle? [1P]
- Beschreiben Sie ein Experiment zur Bestimmung der Kristallstruktur. [1,5P]
- Wir gehen nun von einem kubisch flächenzentriertem Gitter mit einatomiger Basis aus. Wie groß ist die Gitterlänge  $a$  dieses Gitters, wenn es mit dicht gepackten, gleich großen Kugeln mit dem Radius  $R$  gefüllt wird? [1,5P]

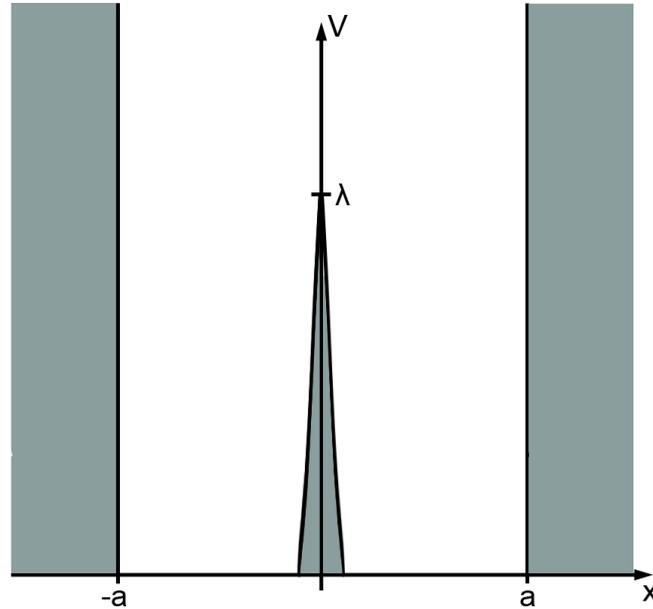
Name:

Matrikel-Nr.:

---

#### 4. Potentialtopf mit $\delta$ -Peak

In der Mitte eines unendlichen Potentialtopfes der Breite  $2a$  befinde sich eine  $\delta$ -Barriere der Form  $\lambda\delta(x)$  mit  $\lambda > 0$ , wie in der folgenden Abbildung gezeigt.



- Gehen Sie von freien Wellen  $\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$  aus und stellen Sie die Randbedingungen auf. Um die Randbedingung bei  $x = 0$  zu erhalten, gehen Sie wie folgt vor: Integrieren Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung für das Delta-Potential von  $x = -\epsilon$  bis  $x = +\epsilon$  mit  $\epsilon > 0$ . Dann führen Sie die Grenzwertbildung  $\epsilon \rightarrow 0$  durch. Damit erhalten Sie eine Aussage über das Verhalten der ersten Ableitung der Wellenfunktion am Punkt  $x = 0$ . [2,5P]
- Bestimmen Sie die Wellenfunktion und deren Koeffizienten. Werten Sie dazu die Randbedingungen aus a) aus und führen Sie eine Fallunterscheidung für alle erlaubten Wellenzahlen  $k$  durch. [4,5P]
- Normieren Sie die Wellenfunktion. [2P]

Name:

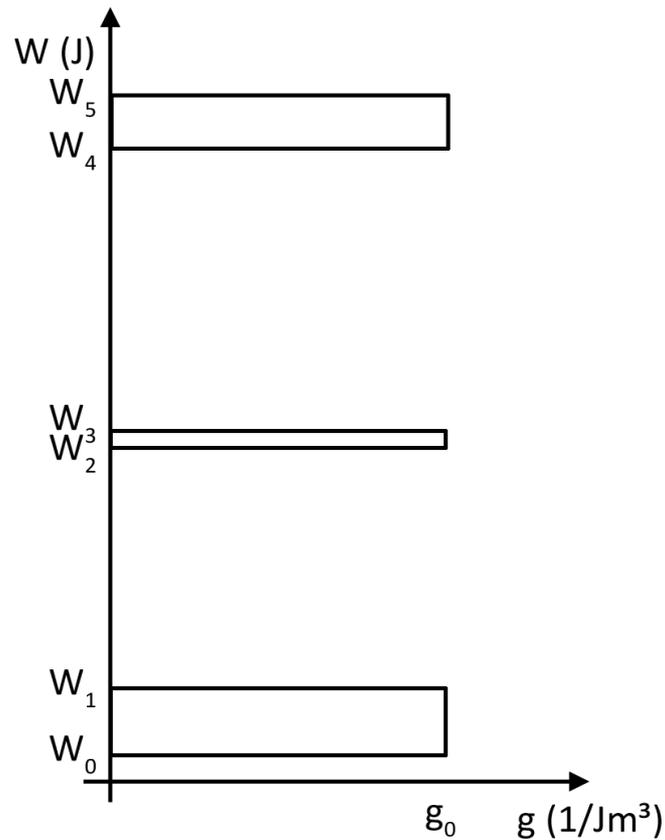
Matrikel-Nr.:

---

---

## 5. Fermie-Energie

Die Zustandsdichte eines unbekanntes Materials ist in folgender Abbildung gegeben.



Ferner seien

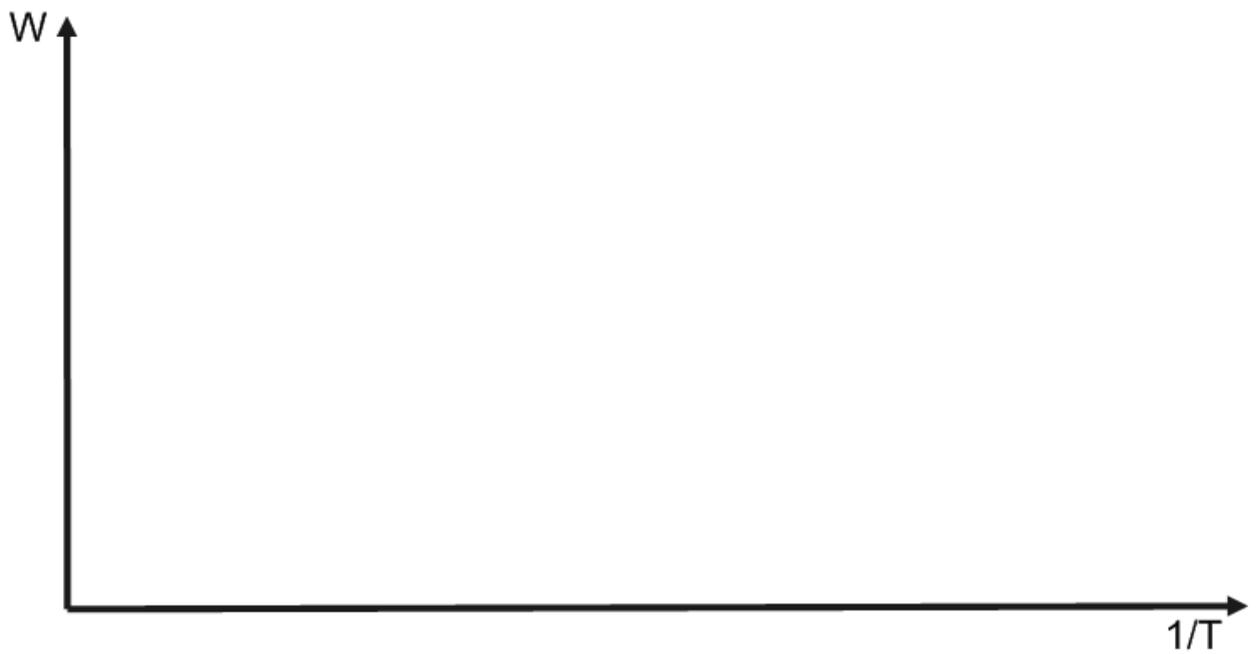
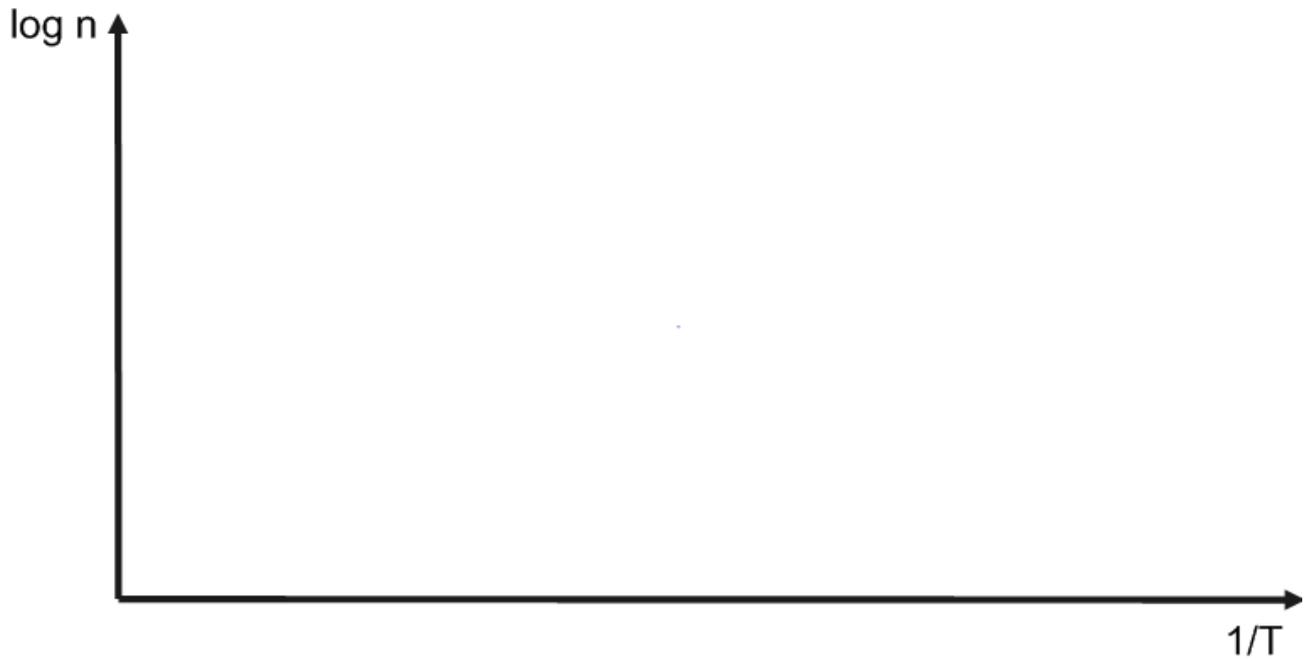
$$\begin{aligned}
 g_0 &= 3,0 \cdot 10^{47} \frac{1}{J \cdot m^3} \\
 W_0 &= 9,0 \cdot 10^{-20} J \\
 W_1 &= 1,3 \cdot 10^{-19} J \\
 W_2 &= 2,0 \cdot 10^{-19} J \\
 W_3 &= 2,1 \cdot 10^{-19} J \\
 W_4 &= 3,0 \cdot 10^{-19} J \\
 W_5 &= 3,3 \cdot 10^{-19} J
 \end{aligned}$$

Die gesamte Elektronendichte sei  $n_{gesamt} = 1,5 \cdot 10^{28} \frac{1}{m^3}$ .

- Berechnen Sie, welche Bänder bei  $T = 0 K$  gefüllt sind und geben Sie die Lage des Fermineaus an. [2P]
- Handelt es sich um ein Metall, einen Halbleiter oder einen Isolator? [1P]
- Abschließend betrachten wir die Elektronenkonzentration  $n$  im Leitungsband eines n-dotierten Halbleiters und das Fermineau  $W_F$  als Funktion der Temperatur. Skizzieren Sie die temperaturabhängige Elektronenkonzentration  $n$  schematisch in das

---

dafür vorgesehene Schaubild. Tragen Sie darunter die Valenz- und Leitungsbandkanten  $W_V$  bzw.  $W_L$ , sowie das Dotierniveau  $W_D$  und die temperaturabhängige Fermienergie  $W_F$  in das zweite Schaubild ein. [2P]



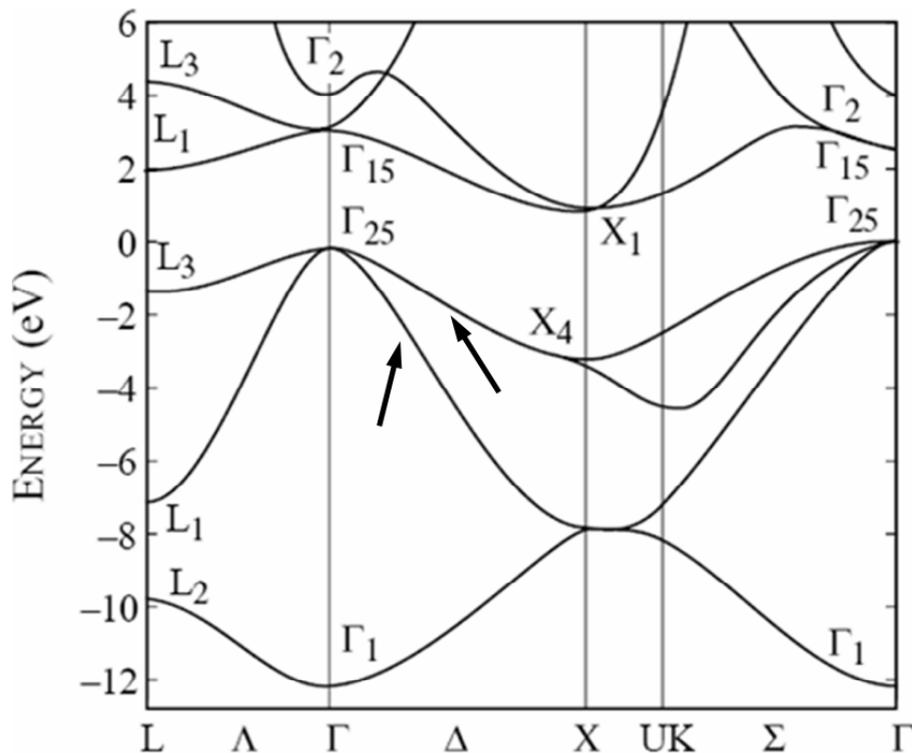
Name:

Matrikel-Nr.:

---

## 6. Bandstruktur

Betrachten Sie die abgebildete Bandstruktur eines Halbleiters.



- Handelt es sich um einen direkten oder indirekten Halbleiter? Begründen Sie Ihre Antwort. [1P]
- Lesen Sie die Bandlücke  $W_G$  ab. Um welchen Halbleiter könnte es sich handeln? [1P]
- Nehmen Sie an, man könnte die Gitterschwingungen komplett ausschalten. Welche Wellenlänge müssten Photonen mindestens besitzen um absorbiert werden zu können? [1,5P]
- Gehen Sie vom Newton'schen Gesetz  $\dot{p} = m \cdot a$  aus und leiten Sie mit Hilfe der Gruppengeschwindigkeit  $v_g = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k}$  einen Ausdruck für die effektive Masse  $m^*$  her. [1,5P]
- Erklären Sie anhand des Ergebnisses aus Aufgabenteil d) den Begriff schwerer und leichter Löcher. Welche Kurve gehört demnach zu welchen Löchern? Beschriften Sie entsprechend die Pfeile in der obigen Abbildung. [1P]

Name:

Matrikel-Nr.:

---

---

## 7. Teilchenströme

- a) Leiten Sie aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}j(x,t) = 0$$

mit der Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$  einen Ausdruck für die eindimensionale quantenmechanische Teilchenstromdichte  $j(x,t)$  her. [2,5P]

- b) Berechnen Sie die Stromdichten freier Wellen, die beschrieben werden durch

$$\psi_1(x) = e^{ikx}, \quad \psi_2(x) = e^{-ikx}.$$

Welche Größe erhalten Sie? Interpretieren Sie das Ergebnis. [2P]

Name:

Matrikel-Nr.:

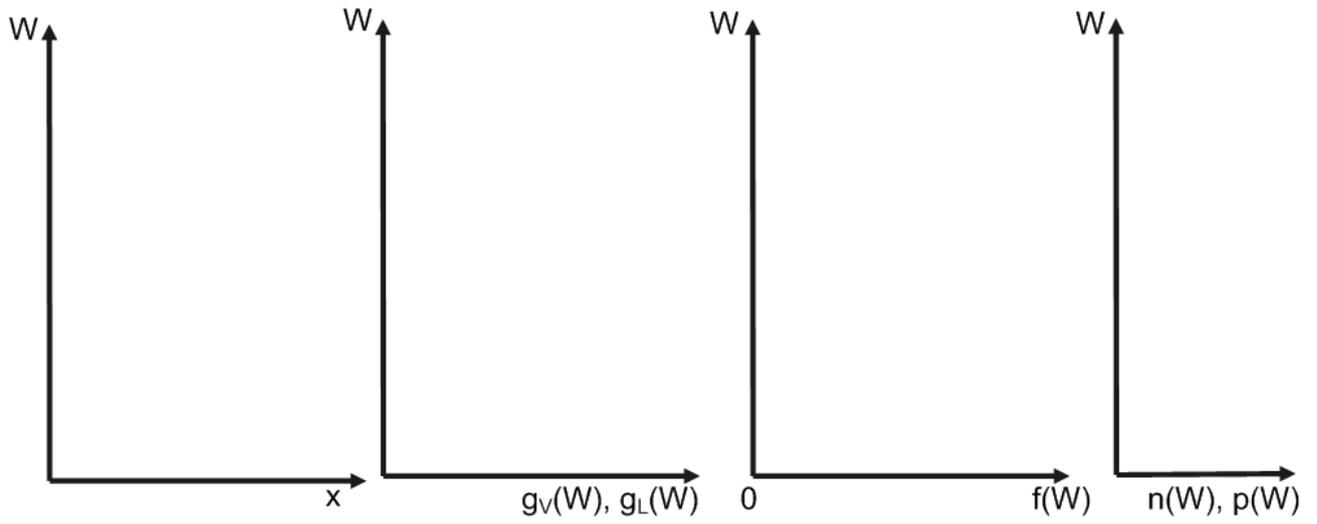
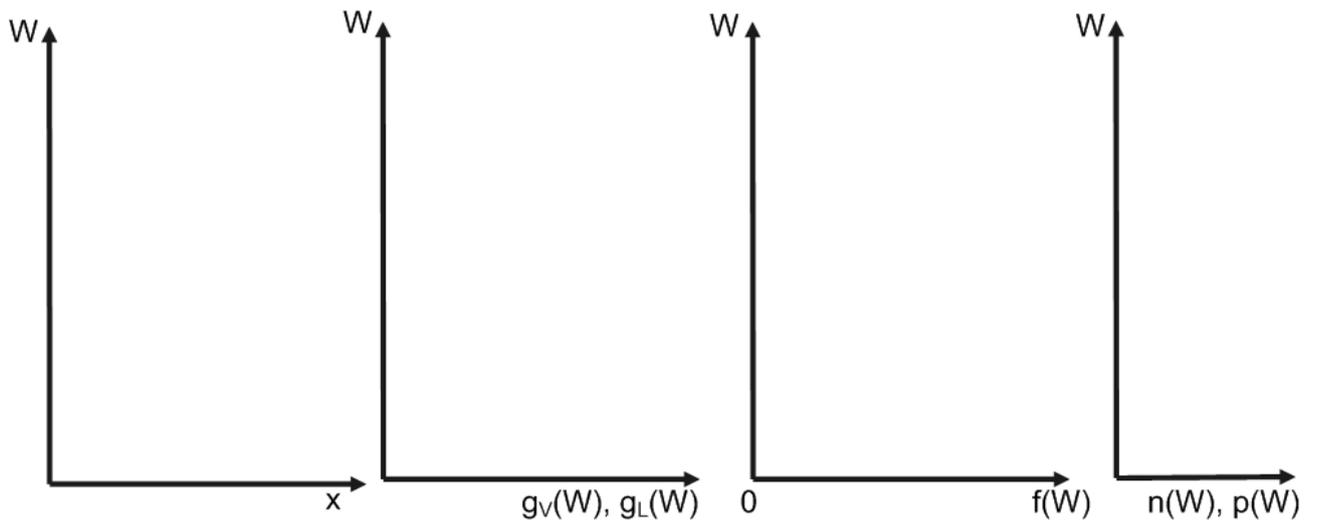
---

---

## 8. Banddiagramm

Wir betrachten Phosphor-dotiertes Silizium und Bor-dotiertes Silizium bei Raumtemperatur.

- a) Zeichnen sie für beide Halbleiter die folgenden Zusammenhänge in die dafür vorgesehenen Schaubilder **auf der nächsten Seite**:
- Das vereinfachte Banddiagramm. Zeichnen Sie Fermienergie, Störstellenniveau, Leitungs- und Valenzbandkanten ein [1P].
  - Energie und Zustandsdichte ( $g(W)$ ) [1P].
  - Energie und Besetzungswahrscheinlichkeit für Fermionen (Fermi-Dirac-Verteilung,  $f(W)$ ) [1P].
  - Energie und Ladungsträgerdichte ( $n(W)$  und  $p(W)$ ) [1P].
- b) Skizzieren Sie das Banddiagramm einschließlich Fermienergie, wenn beide Halbleiter in Kontakt gebracht werden...
- ...ohne äußere Vorspannung. [2P]
  - ...mit einer äußeren Vorspannung  $U$ , wobei  $-U_D < U < 0 V$  sei. [2P]

Abbildung 1: *Phosphor-dotiert*Abbildung 2: *Bor-dotiert*



**Konstanten**

Planck'sches Wirkungsquantum	$h$	$= 6.63 \cdot 10^{-34}$	Js
	$\hbar$	$= \frac{h}{2\pi} = 1.05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	$N_A$	$= 6.02 \cdot 10^{23}$	mol <sup>-1</sup>
Bohr'scher Radius	$a_0$	$= 5.29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	$e$	$= 1.6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	$u$	$= 1.66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	$m_e$	$= 9.11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	$m_p$	$= 1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	$m_n$	$= 1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	$\epsilon_0$	$= 8.85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	$\mu_0$	$= 4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$c$	$= 3.0 \cdot 10^8$	m/s
Boltzmann-Konstante	$k_B$	$= 1.38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	$\pi$	$= 3.14$	
Euler'sche Zahl	$e$	$= 2.72$	

**Konversion von Einheiten**

Atomare Masseneinheit → Kilogramm	$1 \text{ u} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenvolt → Joule	$1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

**Formeln und Integrale (Bitte beachten Sie auch die Rückseite!)**

$$\exp(jkx) + \exp(-jkx) = 2 \cos(kx)$$

$$\exp(jkx) - \exp(-jkx) = 2j \sin(kx)$$

$$\int (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int (\cos ax)^2 dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int \sin ax \cos ax dx = \frac{1}{2a} (\sin ax)^2$$

$$\int x (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x \sin 2ax - \frac{1}{8a^2} \cos 2ax$$

**Fortsetzung umseitig!**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx = 0 \qquad \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = 0 \qquad \int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2}$$

$$\int_0^{\infty} x^n \cdot e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a > 0, n = 0, 1, 2, \dots)$$

13 III. Hauptgruppe	14 IV. Hauptgruppe	15 V. Hauptgruppe
5 10,81 2,0 <b>B</b> Bor	6 12,01 2,5 <b>C</b> Kohlenstoff	7 14,007 3,0 <b>N</b> Stickstoff
13 26,98 1,5 <b>Al</b> Aluminium	14 28,09 1,8 <b>Si</b> Silicium	15 30,97 2,1 <b>P</b> Phosphor
31 69,72 1,6 <b>Ga</b> Gallium	32 72,59 1,8 <b>Ge</b> Germanium	33 74,92 2,0 <b>As</b> Arsen
49 114,82 1,7 <b>In</b> Indium	50 118,69 1,8 <b>Sn</b> Zinn	51 121,75 1,9 <b>Sb</b> Antimon
81 204,38 1,8 <b>Tl</b> Thallium	82 207,2 1,8 <b>Pb</b> Blei	83 208,98 1,9 <b>Bi</b> Bismut