

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

E-Mail-Adresse:

Erreichte Punktzahl:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte									
Max	6,5	10	5	9	5	6	4,5	8	54

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 54, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 27.
- In Klammern angegebene Zahlen am Aufgabenende sind die erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Bitte schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf von der Universität gestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Bitte nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie bitte jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. Melone im Paralleluniversum

In einem Paralleluniversum gelten die gleichen Naturgesetze wie in unserem und die Naturkonstanten seien bis auf ein geändertes Plank'sches Wirkungsquantum $\hbar' = 10^{-3} J \cdot s$ identisch. Auf einem dortigen Planeten wachsen Melonen mit sehr harten Schalen und einem Durchmesser $d_M = 20 \text{ cm}$. Wie irdische Melonen bestehen sie fast ausschließlich aus Wasser und enthalten Kerne mit einem Gewicht $m_K = 1 \text{ g}$.

- a) Warum wäre es unangenehm, eine solche Melone aufzuschneiden? Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch anhand der geänderten Heisenberg'schen Unschärferelation. [2,5P]

Wir benötigen die Heisenberg'sche Unschärferelation $\Delta p \cdot \Delta x \approx \hbar'/2$:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Delta p &= \frac{\hbar'}{2 \cdot \Delta x} = \frac{10^{-3} J s}{2 \cdot 0,1 \text{ m}} = 5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \\ \Rightarrow \Delta v &= \frac{\Delta p}{m_K} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}}\end{aligned}$$

Die mittlere Geschwindigkeit beim Austritt ist also recht hoch und damit unangenehm für den Beobachter.

- b) Betrachten Sie einen elastischen Stoß eines Photons der Wellenlänge $\lambda_P = 628 \text{ nm}$ mit einer Melone. Welche Geschwindigkeit hat die Melone nach dem Stoß? [4P]

$$\begin{aligned}p_P &= \frac{h'}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 10^{-3} J s}{628 \text{ nm}} \approx 10.000 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \\ E_P &= h'\nu = pc = 3 \cdot 10^{12} J \\ m_M &= \frac{4\pi}{3} \cdot R_M^3 \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 4,2 \text{ kg}\end{aligned}$$

Geht man von einem elastischen Stoß aus:

$$\begin{aligned}p_M &= 2 \cdot p_P = 20.000 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \\ \Rightarrow v &= \frac{p}{m} = \frac{20.000 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}}{4,2 \text{ kg}} = 4.760 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 17.140 \frac{\text{km}}{\text{h}}\end{aligned}$$

Die getroffene Melone wäre also extrem schnell und könnte damit einerseits kaum beobachtet werden und andererseits wäre es für den Beobachter recht gefährlich.

2. Wellenfunktionen

- a) Ein Teilchen der Masse m sei durch die Wellenfunktion $\psi(x, t) = A \cdot e^{-a[(mx^2/\hbar)+it]}$ mit den positiven, reellen Konstanten A und a beschrieben. Für welches Potential $V(x)$ löst diese Wellenfunktion die Schrödingergleichung? [2P]

Zeitabh. Schrödingergleichung:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right) \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t)$$

mit $\psi' = -\frac{2amx}{\hbar}\psi$, $\psi'' = -\frac{2am}{\hbar}(1 - \frac{2am}{\hbar}x^2)\psi$ und $\dot{\psi} = -ia\psi$ können wir einsetzen:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \left[-\frac{2am}{\hbar} \left(1 - \frac{2am}{\hbar} x^2 \right) \right] \psi(x, t) + V(x)\psi(x, t) &= i\hbar(-ia)\psi(x, t) \\ \hbar a \psi(x, t) - 2a^2 m x^2 \psi + V(x)\psi(x, t) &= \hbar a \psi(x, t) \\ \Rightarrow V &= 2a^2 m x^2 \end{aligned}$$

Es handelt sich also um ein harmonisches Potential.

- b) Die Wellenfunktion eines Systems zur Zeit $t = 0$ sei durch die Wellenfunktion

$$\Psi(x, t = 0) = \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$$

gegeben. Überprüfen Sie hierfür die Heisenberg'sche Unschärferelation, indem Sie die Orts- und Impulsunschärfe berechnen. [3,5P]

Zunächst normieren wir:

$$\begin{aligned} 1 &\stackrel{!}{=} N \int \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx \stackrel{\text{Anhang}}{=} \sqrt{\pi} \cdot a \\ \Rightarrow \Psi(x, t = 0) &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot a} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \end{aligned}$$

Zu berechnen ist $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ und $\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$:

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}a} \int x^2 \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx \stackrel{\text{Anhang}}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}a} \cdot \frac{\sqrt{\pi}a^3}{2} = \frac{a^2}{2} \\ \langle x \rangle^2 &= 0 \\ \langle p^2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}a} \int \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) dx \\ &= -\frac{\hbar^2}{\sqrt{\pi}a} \int \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \left(-\frac{1}{a^2} + \frac{x^2}{a^4}\right) dx \stackrel{\text{Anhang}}{=} \frac{\hbar^2}{a^2} - \frac{\hbar^2 \cdot a^2}{a^4 \cdot 2} = \frac{\hbar^2}{2a^2} \\ \langle p \rangle^2 &= 0 \\ \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta p &= \sqrt{\frac{\hbar^2}{4}} = \frac{\hbar}{2} \geq \frac{\hbar}{2} \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

- c) Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem eindimensionalen harmonischen Potential und befinde sich im Zustand

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\psi_6(x)$$

, wobei $\psi_i(x)$ die normierten Eigenzustände des stationären harmonischen Oszillators sind. Welche Werte E_i werden bei einer Messung der Energie des Teilchens gemessen und mit welchen Wahrscheinlichkeiten P_i ? Wie groß ist der Erwartungswert $\langle E \rangle$ der Energie in diesem Zustand? [4,5P]

Die Energie-Messwerte $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ sind:

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}, \quad E_1 = 3\frac{\hbar\omega}{2}, \quad E_6 = 13\frac{\hbar\omega}{2}.$$

Zur Verteilung des Messwerte müssen wir zunächst die Normierung des Zustandes überprüfen:

$$N^2 = \int \psi^*(x)\psi(x)dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow \psi_{\text{norm}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi(x)$$

Damit folgt:

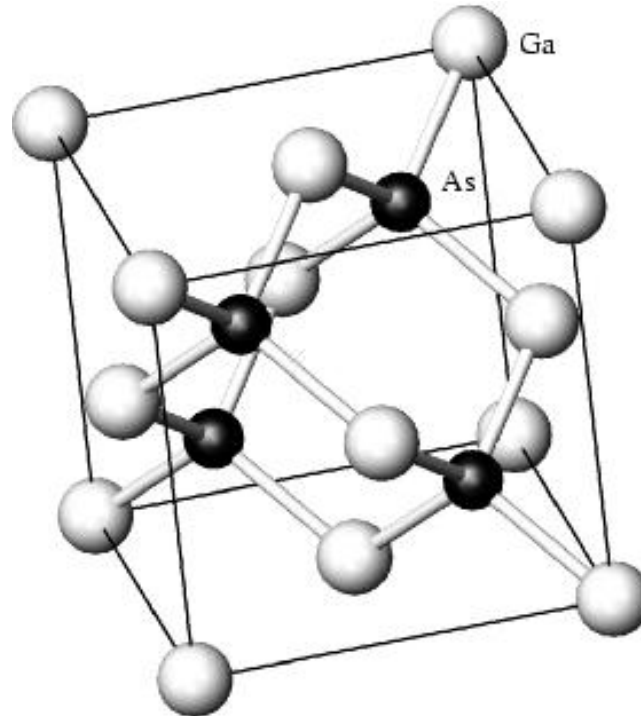
$$\psi = \sum c_n \psi_{\text{norm},n} \Rightarrow P_n = |c_n|^2 \Rightarrow P_0 = \frac{1}{2}, \quad P_1 = P_6 = \frac{1}{4}.$$

Der Energie-Erwartungswert beträgt:

$$\langle E \rangle = \sum E_n |c_n|^2 = \frac{\hbar\omega}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{13}{4} \right) = \frac{9}{4}\hbar\omega.$$

3. Kubische Gitter

Betrachten Sie das Kristallgitter von GaAs.



- a) Zu welchem Raumgittertyp gehört dieses Kristallgitter? Welche Atome befinden sich in der Basis? [1P]

Es handelt sich um ein fcc-Gitter, dessen Basis aus einem Ga- und einem As-Atom besteht.

- b) Wie viele Atome eines jeden Elements befinden sich in der Einheitszelle? [1P]

Die As-Atome befinden sich vollständig in der Einheitszelle, also gibt es 4 As-Atome. Es sitzen 8 Ga-Atome auf den Ecken und 6 Ga-Atome auf den Flächen, also insgesamt $8 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 4$ Ga-Atome.

- c) Beschreiben Sie ein Experiment zur Bestimmung der Kristallstruktur. [1,5P]

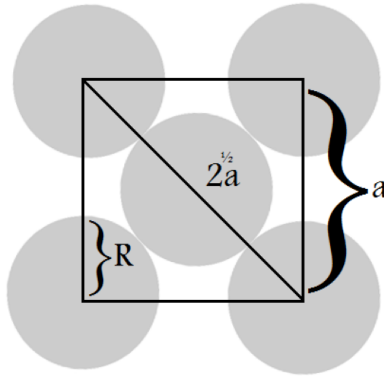
Die Kristallstruktur kann mit Beugungs-Experimenten untersucht werden. Hierzu wird ein Kristall mit Röntgenstrahlung oder Elektronen bestrahlt und das Beugungsmuster untersucht. Im Fall eines Kristalls können die Atome einzelnen Schichten des Abstands d zugeordnet werden. Wird die Beugungsbedingung erfüllt, ist also Δx

$$\Delta x = 2d \sin \Phi$$

ein Vielfaches n der Wellenlänge λ , so folgt konstruktive Interferenz des unter dem Winkel Φ eingestrahlen Lichtes. Aus dem Beugungsmuster sind Rückschlüsse auf die Kristallstruktur möglich.

- d) Wir gehen nun von einem kubisch flächenzentriertem Gitter mit einatomiger Basis aus. Wie groß ist die Gitterlänge a dieses Gitters, wenn es mit dicht gepackten, gleich großen Kugeln mit dem Radius R gefüllt wird? [1,5P]

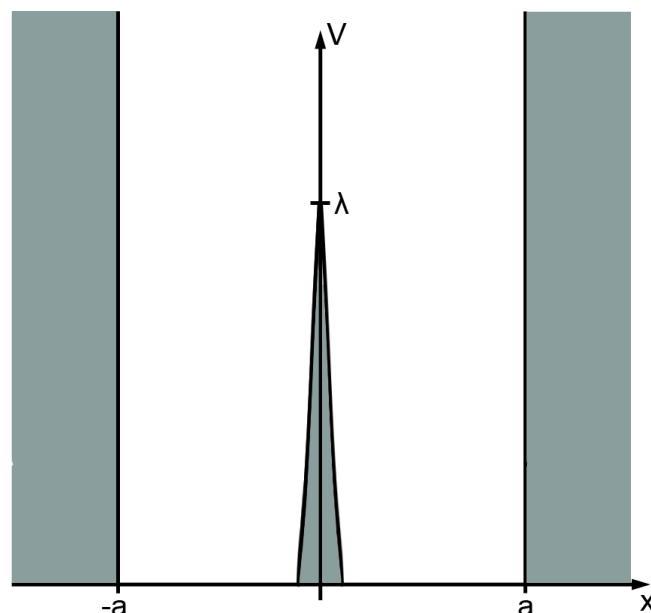
Es befinden sich $8 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 4$ Kugeln in der Einheitszelle, die wie folgt angeordnet sind:



Betrachtet man die Diagonale, kann man die Beziehung $4R = \sqrt{2}a$ ableiten und damit auf die Gitterlänge schließen: $a = 4R/\sqrt{2}$.

4. Potentialtopf mit δ -Peak

In der Mitte eines unendlichen Potentialtopfes der Breite $2a$ befinde sich eine δ -Barriere der Form $\lambda\delta(x)$ mit $\lambda > 0$, wie in der folgenden Abbildung gezeigt.



- a) Gehen Sie von freien Wellen $\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ aus und stellen Sie die Randbedingungen auf. Um die Randbedingung bei $x = 0$ zu erhalten, gehen Sie wie folgt vor: Integrieren Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung für das Delta-Potential von $x = -\epsilon$ bis $x = +\epsilon$ mit $\epsilon > 0$. Dann führen Sie die Grenzwertbildung $\epsilon \rightarrow 0$ durch. Damit erhalten Sie eine Aussage über das Verhalten der ersten Ableitung der Wellenfunktion am Punkt $x = 0$. [2,5P]

Wir teilen das Potentialproblem in zwei Bereiche I ($x < 0$) und II ($x > 0$) auf. Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}\psi_I &= A_I e^{ikx} + B_I e^{-ikx} \\ \psi_{II} &= A_{II} e^{ikx} + B_{II} e^{-ikx}\end{aligned}$$

Die Randbedingungen lauten:

$$\psi_I(-a) = \psi_{II}(a) = 0 \quad (1)$$

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \quad (2)$$

Für die Randbedingung an der Stelle $x = 0$ betrachten wir die Schrödingergleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + \lambda \delta(x) \psi(x) = W \psi(x)$$

Die Integration von $x = -\epsilon$ bis $x = \epsilon$ wird durchgeführt:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \overbrace{\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) dx}^{=\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)} + \overbrace{\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \lambda \delta(x) \psi(x) dx}^{=\lambda \psi(0)} = \overbrace{\int_{-\epsilon}^{\epsilon} W \psi(x) dx}^{=0}$$

Die Stammfunktion der zweiten Ableitung ist die erste Ableitung, so ergibt sich der erste Term. Der zweite folgt aus den Eigenschaften der Dirac-Distribution. Auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens wird die Wellenfunktion über einen 2ϵ -Bereich um $x = 0$ integriert. Wenn wir nun die Grenzwertbildung $\epsilon \rightarrow 0$ ausführen, verschwindet dieser Term (wenn die Wellenfunktion nicht divergiert, was vorausgesetzt werden kann), weil die Fläche unter der Wellenfunktion gegen Null geht.

Wir erhalten also insgesamt als Randbedingungen an der Stelle $x = 0$:

$$\psi'_{II}(0) - \psi'_I(0) = \frac{2m}{\hbar^2} \lambda \psi(0) \quad (3)$$

- b) Bestimmen Sie die Wellenfunktion und deren Koeffizienten. Werten Sie dazu die Randbedingungen aus a) aus und führen Sie eine Fallunterscheidung für alle erlaubten Wellenzahlen k durch. [4,5P]

Aus Randbedingung 1 folgt zunächst:

$$\begin{aligned} A_I e^{-ika} + B_I e^{ika} &= 0 \Rightarrow B_I = -A_I e^{-2ika} \\ A_{II} e^{ika} + B_{II} e^{-ika} &= 0 \Rightarrow B_{II} = -A_{II} e^{2ika} \end{aligned}$$

und damit:

$$\begin{aligned} \psi_I &= A_I (e^{ikx} - e^{-2ika} e^{-ikx}) = A_I e^{-ika} (e^{ikx+ika} - e^{-ikx-ika}) \\ &= 2i A_I e^{-ika} \sin(k(x+a)) = C_I \sin(k(x+a)) \end{aligned}$$

und analog:

$$\psi_{II} = 2i A_{II} e^{ika} \sin(k(x-a)) = C_{II} \sin(k(x-a)).$$

Bedingung 3 ergibt:

$$C_{II} k \cos(ka) - C_I k \cos(ka) = \frac{2m\lambda}{\hbar^2} C_I \sin(ka). \quad (4)$$

Randbedingung 2 liefert schließlich:

$$C_I \sin(ka) = C_{II} \sin(-ka). \quad (5)$$

Diese Gleichung kann in zwei Fällen gelöst werden:

1. Fall: $k = \frac{n\pi}{a}, n \in \mathbb{N}$

Gleichung 5 ist damit erfüllt: $0 = 0$. In Gleichung 4 eingesetzt folgt damit:

$$C_{II} k (-1)^n - C_I k (-1)^n = 0 \Rightarrow C_I = C_{II}$$

Dies setzen wir ein und erhalten:

$$\psi_I = C_I \sin\left(\frac{n\pi}{a}x + n\pi\right), \quad \psi_{II} = C_I \sin\left(\frac{n\pi}{a}x - n\pi\right)$$

2. Fall: $k \neq \frac{n\pi}{a}, n \in \mathbb{N}$

Aus Gleichung 5 folgt $C_I \sin(ka) = -C_{II} \sin(ka)$, also $C_I = -C_{II}$ und mit Gleichung 4 erhalten wir dann:

$$kC_{II}(\cos ka + \cos ka) = -\frac{2m\lambda}{\hbar^2}C_{II} \sin ka \Rightarrow k = -\frac{m\lambda}{\hbar^2} \tan ka$$

also:

$$\psi_I = C_I \sin(k(x+a)), \quad \psi_{II} = -C_I \sin(k(x-a))$$

c) Normieren Sie die Wellenfunktion. [2P]

1. Fall: $k = \frac{n\pi}{a}, n \in \mathbb{N}$

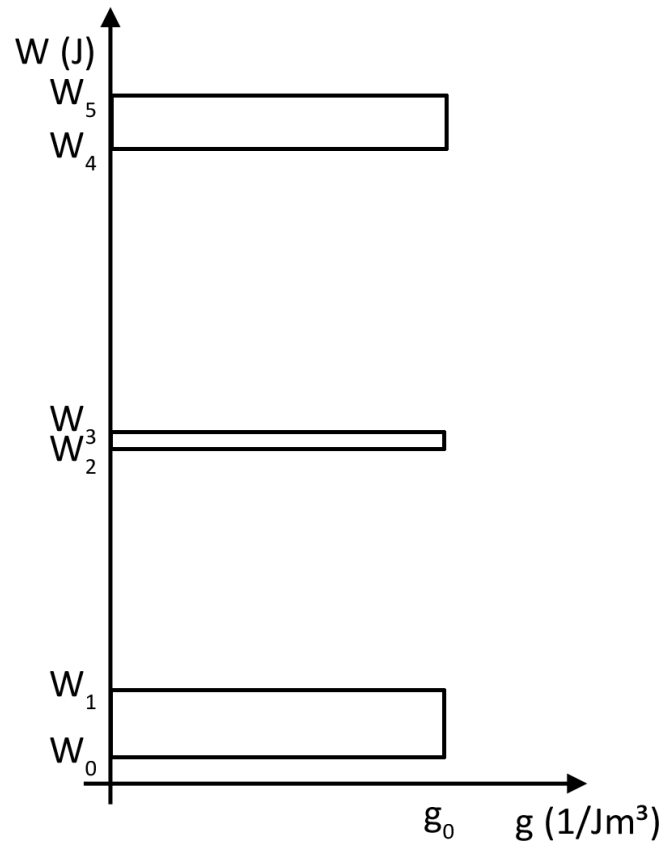
$$\begin{aligned} |C|^2 \int_{-a}^a \sin^2(kx) dx &= |C|^2 \underbrace{\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4k} \sin(2kx) \right]_{-a}^a}_{=\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a} \\ &\Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

2. Fall: $k \neq \frac{n\pi}{a}, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |C|^2 &\left(\int_{-a}^0 \sin^2(k(x+a)) dx + \int_0^a \sin^2(k(x-a)) dx \right) \\ &= |C|^2 \left(\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4k} \sin(2k(x+a)) \right]_{-a}^0 + \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4k} \sin(2k(x-a)) \right]_0^a \right) \\ &\Rightarrow C = \left(a - \frac{1}{2k} \sin(2ka) \right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

5. Fermie-Energie

Die Zustandsdichte eines unbekannten Materials ist in folgender Abbildung gegeben.



Ferner seien

$$\begin{aligned}
 g_0 &= 3,0 \cdot 10^{47} \frac{1}{J \cdot m^3} \\
 W_0 &= 9,0 \cdot 10^{-20} J \\
 W_1 &= 1,3 \cdot 10^{-19} J \\
 W_2 &= 2,0 \cdot 10^{-19} J \\
 W_3 &= 2,1 \cdot 10^{-19} J \\
 W_4 &= 3,0 \cdot 10^{-19} J \\
 W_5 &= 3,3 \cdot 10^{-19} J
 \end{aligned}$$

Die gesamte Elektronendichte sei $n_{\text{gesamt}} = 1,5 \cdot 10^{28} \frac{1}{m^3}$.

- a) Berechnen Sie, welche Bänder bei $T = 0 K$ gefüllt sind und geben Sie die Lage des Fermi-niveaus an. [2P]

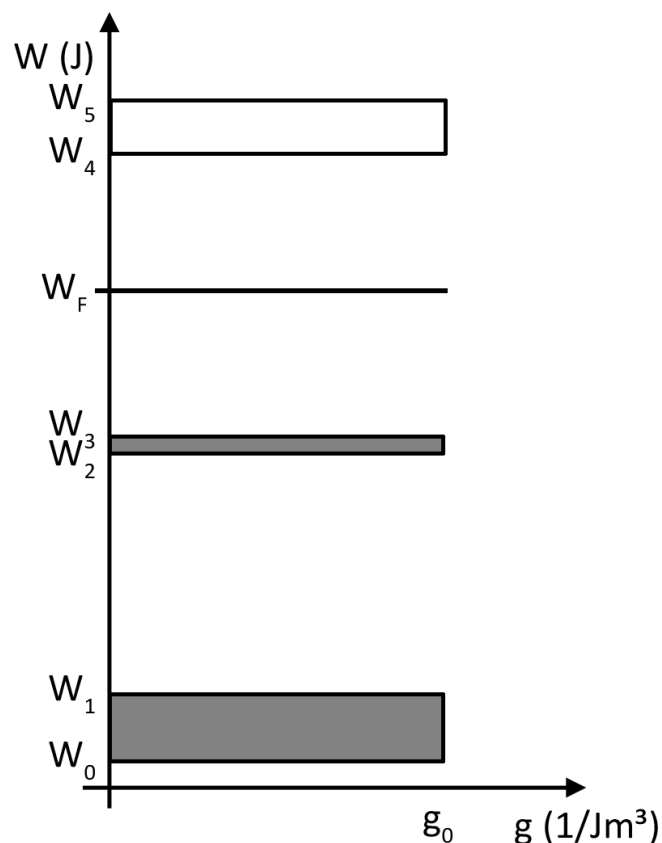
Die Bänder werden der Reihe nach mit Elektronen gefüllt:

$$\begin{aligned}
\Delta W_{B1} &= W_1 - W_0 = 4 \cdot 10^{-20} \text{ J} \\
\Rightarrow &= \Delta W_{B1} \cdot g_0 = 1,2 \cdot 10^{28} \text{ 1/m}^3 \\
\Delta W_{B2} &= W_3 - W_2 = 1 \cdot 10^{-20} \text{ J} \\
\Rightarrow &= \Delta W_{B2} \cdot g_0 = 3 \cdot 10^{27} \text{ 1/m}^3
\end{aligned}$$

Mit $\Delta W_{B1} \cdot g_0 + \Delta W_{B2} \cdot g_0 = 1,5 \cdot 10^{28} \text{ 1/m}^3$ sind die beiden ersten Bänder exakt gefüllt und das dritte ist leer. Das Fermi-niveau liegt demnach zwischen dem zweiten und dritten Band bei $W_F = W_3 + \frac{W_4 - W_3}{2} = 2,55 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

- b) Handelt es sich um ein Metall, einen Halbleiter oder einen Isolator? [1P]

Da das Fermi-niveau in der Bandlücke liegt, handelt es sich nicht um ein Metall. Die Bandlücke beträgt $W_G = \frac{W_4 - W_3}{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 0,56 \text{ eV}$. Damit handelt es sich um einen Halbleiter.



- c) Abschließend betrachten wir die Elektronenkonzentration n im Leitungsband eines n-dotierten Halbleiters und das Fermi-niveau W_F als Funktion der Temperatur. Skizzieren Sie die temperaturabhängige Elektronenkonzentration n schematisch in das dafür vorgesehene Schaubild. Tragen Sie darunter die Valenz- und Leitungsbandkanten W_V bzw. W_L , sowie das Dotierniveau W_D und die temperaturabhängige Fermi-energie W_F in das zweite Schaubild ein. [2P]

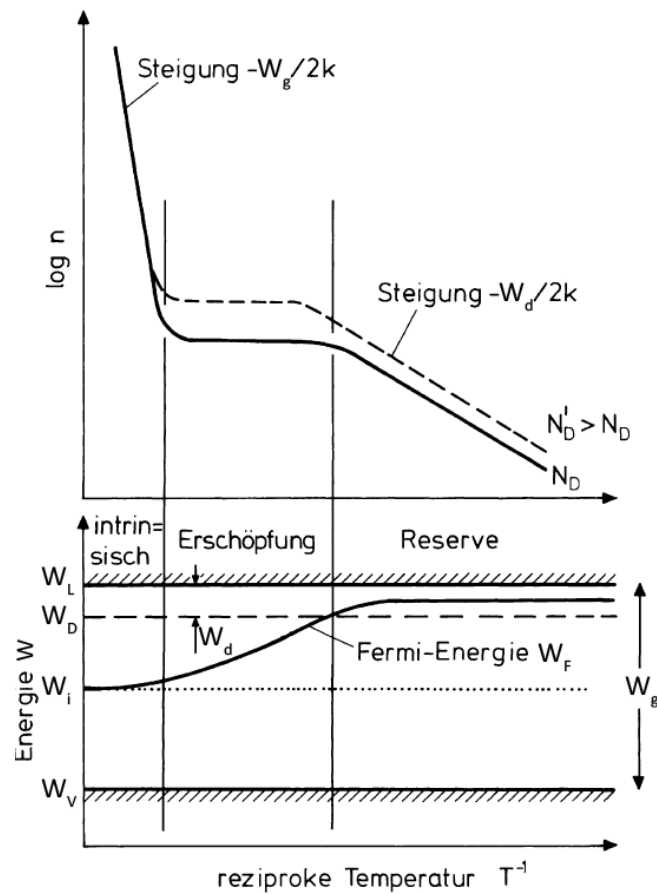
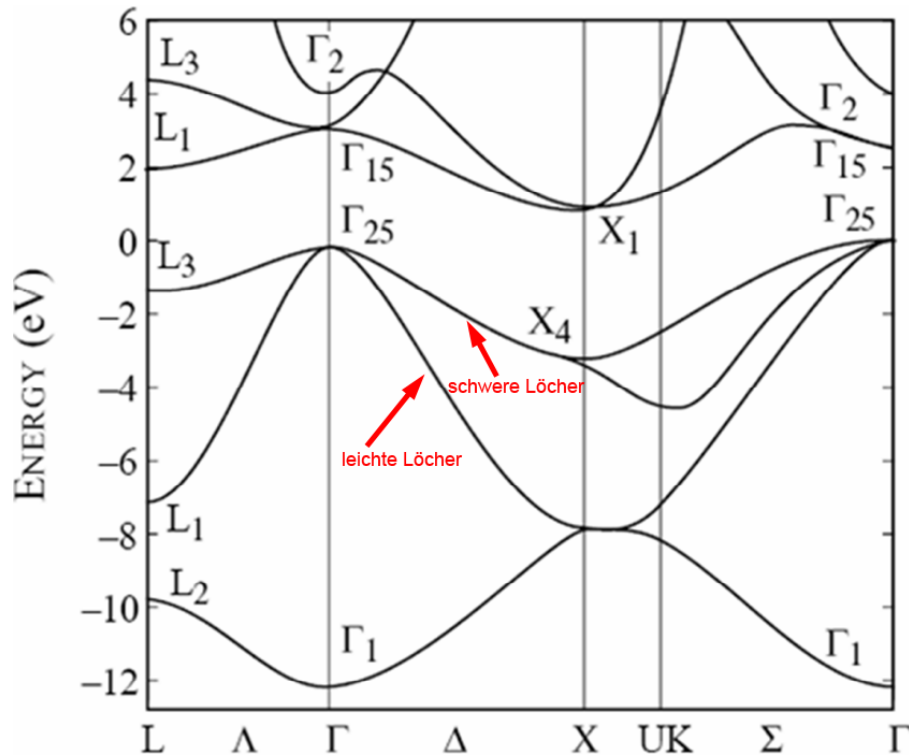


Bild aus Ibach-Lüth, Festkörperphysik. Genau genommen schrumpft die Bandlücke bei höheren Temperaturen.

6. Bandstruktur

Betrachten Sie die abgebildete Bandstruktur eines Halbleiters.



- a) Handelt es sich um einen direkten oder indirekten Halbleiter? Begründen Sie Ihre Antwort. [1P]

Da das Minimum des Leitungsbandes nicht beim gleichen k -Vektor wie das Maximum des Valenzbandes liegt, handelt es sich um einen indirekten Halbleiter.

- b) Lesen Sie die Bandlücke W_G ab. Um welchen Halbleiter könnte es sich handeln? [1P]

Die Bandlücke beträgt 1,1 eV. Es handelt sich demnach um Silizium.

- c) Nehmen Sie an, man könnte die Gitterschwingungen komplett ausschalten. Welche Wellenlänge müssten Photonen mindestens besitzen um absorbiert werden zu können? [1,5P]

Es kann nicht mit der Bandlücke 1,1 eV gerechnet werden, sondern man muss die „direkte“ Bandlücke ablesen, die ca. 3 eV beträgt. Die Wellenlänge der Photonen beträgt somit:

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{E_{G,dir}} = 413 \text{ nm}.$$

- d) Gehen Sie vom Newton'schen Gesetz $\dot{p} = m \cdot a$ aus und leiten Sie mit Hilfe der Gruppengeschwindigkeit $v_g = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial W}{\partial k}$ einen Ausdruck für die effektive Masse m^* her. [1,5P]

$$\begin{aligned}
 m^* \cdot a &= m^* \cdot \frac{\partial v_g}{\partial t} = m^* \cdot \frac{1}{\hbar} \frac{\partial^2 W}{\partial k \partial t} = \frac{m^*}{\hbar} \frac{\partial^2 W}{\partial k^2} \frac{\partial k}{\partial t} \\
 &\stackrel{!}{=} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \hbar k = \hbar \frac{\partial k}{\partial t}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 W}{\partial k^2} = \frac{1}{m^*} \propto \text{Bandkrümmung}$$

- e) Erklären Sie anhand des Ergebnisses aus Aufgabenteil d) den Begriff schwerer und leichter Löcher. Welche Kurve gehört demnach zu welchen Löchern? Beschriften Sie entsprechend die Pfeile in der obigen Abbildung. [1P]

Anhand der Bandstruktur ist zu erkennen, dass es im Valenzband zwei Kurven unterschiedlicher Krümmung gibt. Das stärker gekrümmte gehört zu den leichten Löchern, das schwächer gekrümmte zu den schweren Löchern.

7. Teilchenströme

a) Leiten Sie aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}j(x,t) = 0$$

mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$ einen Ausdruck für die eindimensionale quantenmechanische Teilchenstromdichte $j(x,t)$ her. [2,5P]

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}(\psi(x,t)\psi^*(x,t)) = \psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi + \psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^* \\&= \frac{1}{i\hbar}(\psi^*H\psi - \psi H\psi^*) \\&= \frac{1}{i\hbar}\left(\psi^*\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi - \psi\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi^*\right) \\&= \frac{\hbar^2}{2im}\left(\psi\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi^* - \psi^*\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi\right) \\&= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\frac{\partial}{\partial x}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial x}\psi^*\right)\right) \\ \Rightarrow j(x,t) &= \frac{\hbar}{2im}\left(\psi(x,t)^*\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t) - \psi(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t)^*\right).\end{aligned}$$

b) Berechnen Sie die Stromdichten freier Wellen, die beschrieben werden durch

$$\psi_1(x) = e^{ikx}, \quad \psi_2(x) = e^{-ikx}.$$

Welche Größe erhalten Sie? Interpretieren Sie das Ergebnis. [2P]

$$j(x,t) = \frac{\hbar}{2im} (e^{\mp ikx}(\pm ik)e^{\pm ikx} - e^{\pm ikx}(\mp ik)e^{\mp ikx}) = \frac{\pm\hbar k}{m}.$$

Dies entspricht der Geschwindigkeit der Teilchen des Stromes.

8. Banddiagramm

Wir betrachten Phosphor-dotiertes Silizium und Bor-dotiertes Silizium bei Raumtemperatur.

a) Zeichnen sie für beide Halbleiter die folgenden Zusammenhänge in die dafür vorgesehenen Schaubilder **auf der nächsten Seite**:

- Das vereinfachte Banddiagramm. Zeichnen Sie Fermi-niveau, Störstellenniveau, Leitungs- und Valenzbandkanten ein [1P].
- Energie und Zustandsdichte ($g(W)$) [1P].
- Energie und Besetzungswahrscheinlichkeit für Fermionen (Fermi-Dirac-Verteilung, $f(W)$) [1P].
- Energie und Ladungsträgerdichte ($n(W)$ und $p(W)$) [1P].

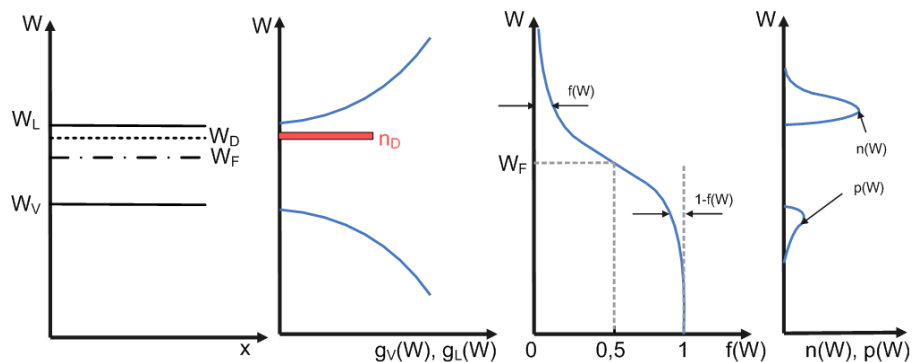


Abbildung 1: Phosphor-dotiert, n:

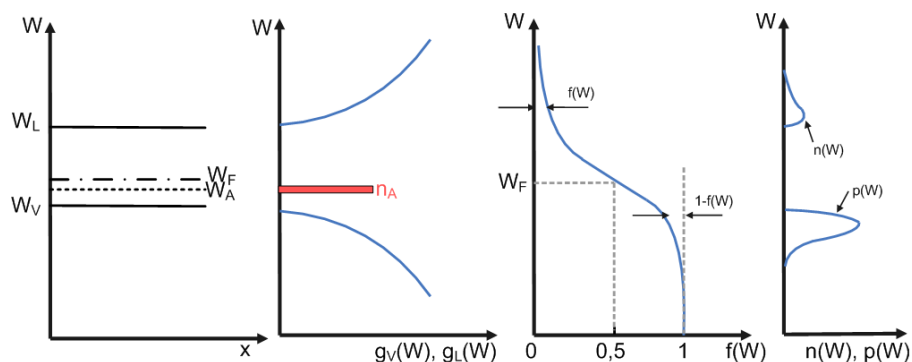


Abbildung 2: Bor-dotiert, p:

b) Skizzieren Sie das Banddiagramm einschließlich Fermi-niveaus, wenn beide Halbleiter in Kontakt gebracht werden...

- ...ohne äußere Vorspannung.
- ...mit einer äußeren Vorspannung U , wobei $-U_D < U < 0\text{ V}$ sei.

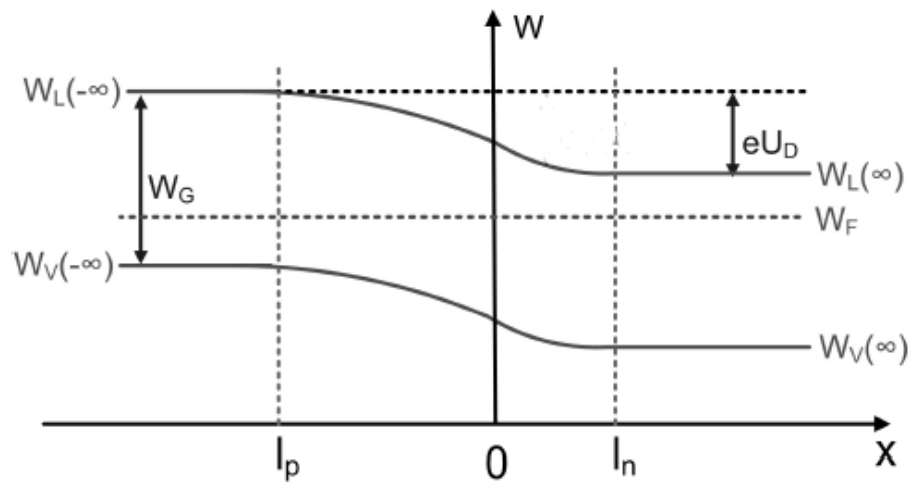


Abbildung 3: Banddiagramm pn-Übergang ohne Vorspannung.

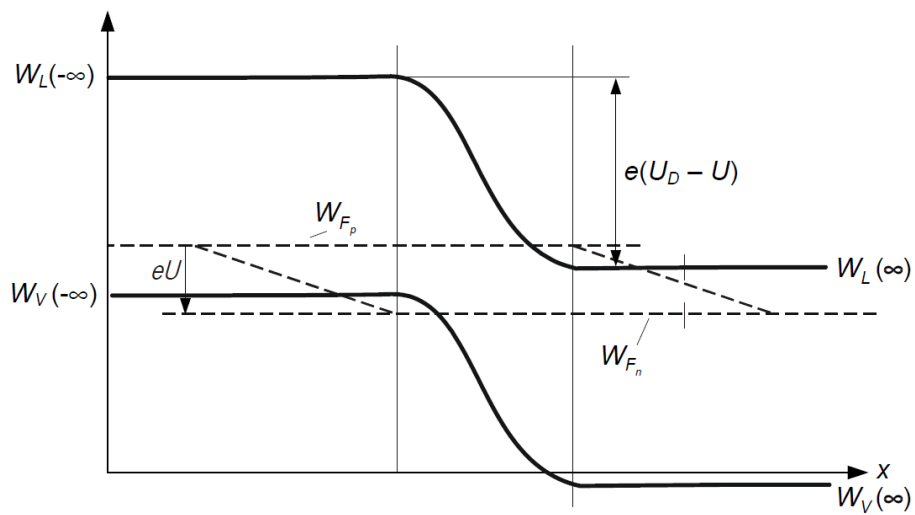


Abbildung 4: Banddiagramm pn-Übergang mit Vorspannung U .

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$=$	$6.63 \cdot 10^{-34}$	Js
	$\hbar$	$=$	$\frac{h}{2\pi} = 1.05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	N_A	$=$	$6.02 \cdot 10^{23}$	mol ⁻¹
Bohr'scher Radius	a_0	$=$	$5.29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$=$	$1.6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	$=$	$1.66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$=$	$9.11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$=$	$1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$=$	$1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$=$	$8.85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	$=$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$=$	$3.0 \cdot 10^8$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	$=$	$1.38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	π	$=$	3.14	
Euler'sche Zahl	e	$=$	2.72	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit $\rightarrow$ Kilogramm	$1 \text{ u} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenvolt $\rightarrow$ Joule	$1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Formeln und Integrale (Bitte beachten Sie auch die Rückseite!)

$$\exp(jkx) + \exp(-jkx) = 2 \cos(kx)$$

$$\exp(jkx) - \exp(-jkx) = 2j \sin(kx)$$

$$\begin{aligned} \int (\sin ax)^2 dx &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax \\ \int (\cos ax)^2 dx &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax \\ \int \sin ax \cos ax dx &= \frac{1}{2a} (\sin ax)^2 \\ \int x (\sin ax)^2 dx &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x \sin 2ax - \frac{1}{8a^2} \cos 2ax \end{aligned}$$

Fortsetzung umseitig!

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a^2} \\
\int_0^{\infty} x^n \cdot e^{-ax} dx &= \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a > 0, n = 0, 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

13 III. Hauptgruppe	14 IV. Hauptgruppe	15 V. Hauptgruppe
5 10,81 2,0 B Bor	6 12,01 2,5 C Kohlenstoff	7 14,007 3,0 N Stickstoff
13 26,98 1,5 Al Aluminium	14 28,09 1,8 Si Silicium	15 30,97 2,1 P Phosphor
31 69,72 1,6 Ga Gallium	32 72,59 1,8 Ge Germanium	33 74,92 2,0 As Arsen
49 114,82 1,7 In Indium	50 118,69 1,8 Sn Zinn	51 121,75 1,9 Sb Antimon
81 204,38 1,8 Tl Thallium	82 207,2 1,8 Pb Blei	83 208,98 1,9 Bi Bismut