Lichttechnisches Institut
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer
Engesserstraße 13
76131 Karlsruhe

Festkörperelektronik
Klausur
4. Oktober 2013

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

E-Mail-Adresse: ....

Erreichte Punktzahl: ....

Note: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Punkte								
Max	6	5	12	8	7	7	6	51

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 DIN-A4-Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 51, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 25.
- In Klammern angegebene Zahlen am Aufgabenende sind die erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Bitte schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf von der Universität gestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Bitte nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie bitte jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. **Wellenfunktionen [6P]**

Gegeben ist folgende normierte Wellenfunktion:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

a) Berechnen Sie den Erwartungswert des Orts $\langle \hat{x} \rangle$ sowie den Erwartungswert des Quadrats des Orts $\langle \hat{x}^2 \rangle$. [2P]

b) Berechnen Sie den Erwartungswert des Impulses $\langle \hat{p} \rangle$ sowie den Erwartungswert des Quadrats des Impulses $\langle \hat{p}^2 \rangle$. [2P]

c) Berechnen Sie unter Verwendung der Ergebnisse der vorangegangenen Teilaufgaben

$$\Delta x \cdot \Delta p = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2} \cdot \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2}$$

und interpretieren Sie das Ergebnis. [2P]

2. **Kristall [5P]**

a) Erklären Sie anhand eines zweidimensionalen quadratischen Gitters, warum die Bandstruktur richtungsabhängig ist. Fertigen Sie dazu eine Skizze des Gitters an und zeichnen Sie zwei geeignete Kristallrichtungen ein. [2P]

b) Nickel kristallisiert in einem fcc-Gitter mit einatomiger Basis mit einer Gitterkonstante $a = 352,4\,\mathrm{pm}$ und hat eine molare Masse von $58,69\,\mathrm{g/mol}$. Zeichnen Sie eine Elementarzelle des Gitters und berechnen Sie die Dichte ρ von Nickel. [2P]

c) Beschreiben Sie ein Verfahren zur Herstellung eines hochreinen Einkristalls. Wie muß man das Verfahren modifizieren, um diesen Einkristall zu dotieren? [1P]

3. Dotierte Halbleiter [12P]

a) Wir betrachten einen intrinsischen und einen n-dotierten Halbleiter mit gleichen effektiven Massen für Elektronen und Löcher bei Raumtemperatur. Zeichnen Sie für beide Halbleiter für den Fall der Störstellenerschöpfung die folgenden Zusammenhänge in die dafür vorgesehenen Schaubilder ***auf der nächsten Seite***:

- Das vereinfachte Banddiagramm im Ortsraum. Zeichnen Sie Ferminiveau, Leitungs- und Valenzbandkanten ein. Für den Fall des dotierten Halbleiters zeichnen Sie ebenfalls das Störstellenniveau ein. [1P]
- Energie über Zustandsdichte ($g(W)$) [1P].
- Energie über Besetzungswahrscheinlichkeit für Fermionen (Fermi-Dirac-Verteilung, $f(W)$) [1P].
- Energie über Ladungsträgerdichte ($n(W)$ und $p(W)$) [1P].

b) Wir betrachten nun p-dotiertes und n-dotiertes Silizium bei Raumtemperatur. Skizzieren Sie das Banddiagramm einschließlich Ferminiveaus, wenn die beiden unterschiedlich dotierten Halbleiter ohne Vorspannung in Kontakt gebracht werden. [2P]

c) Wie verändert sich die Raumladungszone und die Lage des Ferminiveaus in dem Banddiagramm aus dem vorangegangenen Aufgabenteil, wenn die Dotierung des n-dotierten Siliziums erhöht wird? [1P]

d) In einem Halbleiter wird eine intrinsische Ladungsträgerdichte von $n_\mathrm{i} = 5,84 \cdot 10^9\,\mathrm{cm}^{-3}$ gemessen. Die effektiven Massen seien $m_\mathrm{eff,e} = 0,36\; m_\mathrm{e}$ (Elektronen) und $m_\mathrm{eff,h} = 0,81\; m_\mathrm{e}$ (Löcher). Bestimmen Sie die Bandlücke dieses Halbleiters bei Raumtemperatur $T = 300\,\mathrm{K}$. [4P]

e) Die Ladungsträgerbeweglichkeit in diesem Halbleiter bei Raumtemperatur (300 K) betrage $\mu_\mathrm{e} = 1400\,\mathrm{cm}^2/(\mathrm{Vs})$ für Elektronen und $\mu_\mathrm{h} = 500\,\mathrm{cm}^2/(\mathrm{Vs})$ für Löcher. Bestimmen Sie die Leitfähigkeit unter Verwendung der Ladungsträgerdichte aus dem vorherigen Aufgabenteil. [1P]

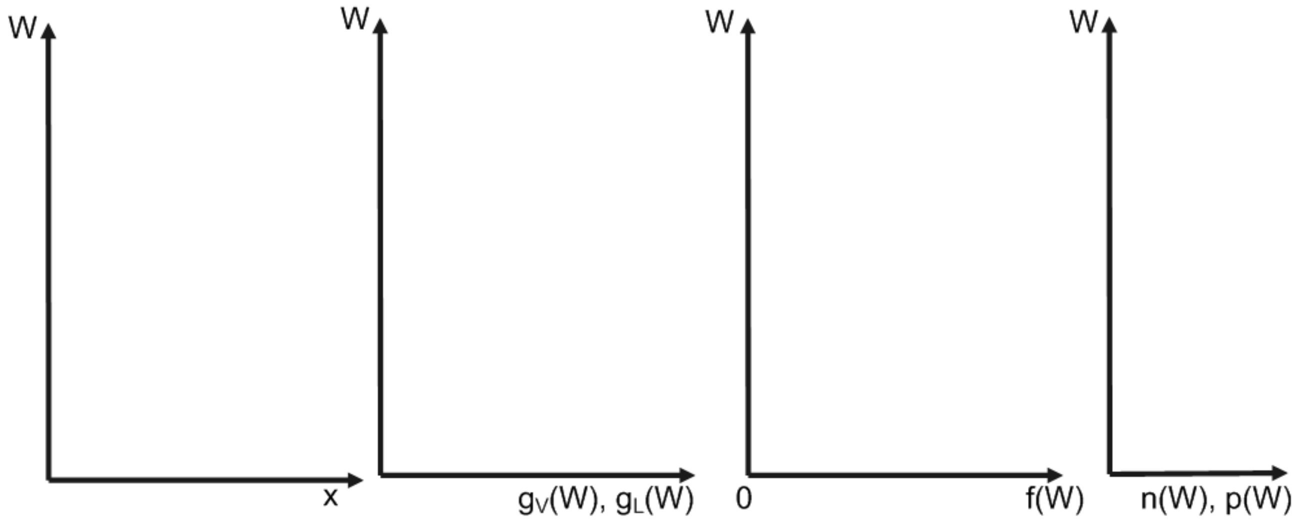


Abbildung 1: intrinsischer Halbleiter

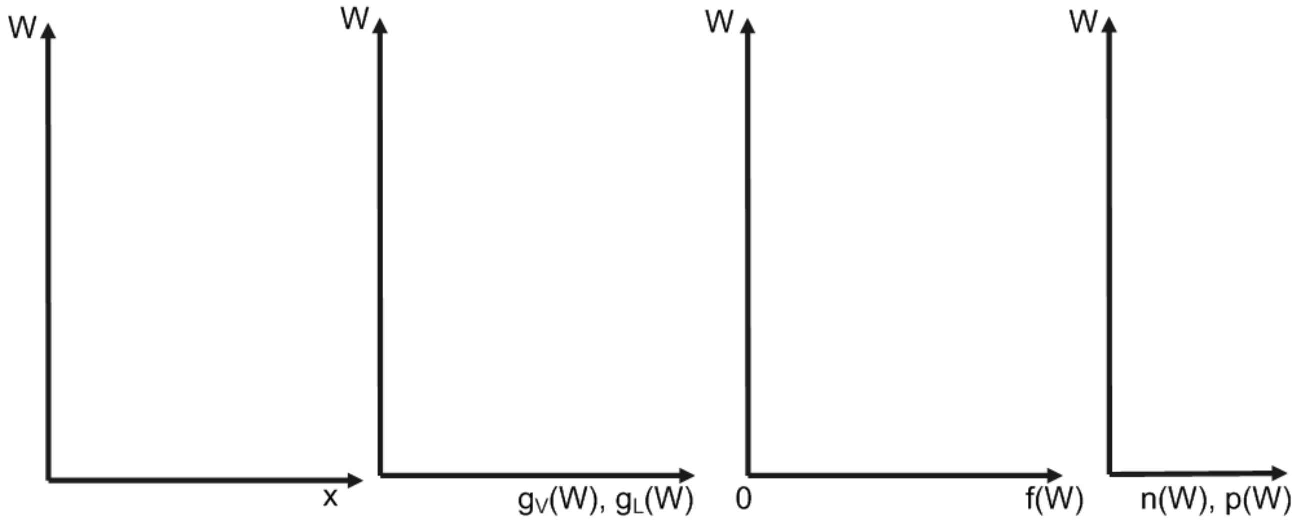


Abbildung 2: n-dotierter Halbleiter

4. **Generation und Rekombination [8P]**

a) Geben Sie die 1D-Kontinuitätsgleichung für Elektronen an. Was besagt sie? [1P]

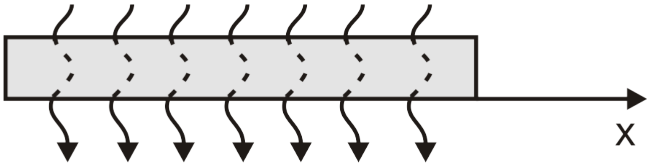


Abbildung 3: Beleuchteter n-dotierter Halbleiter.

b) Ein stark n-dotierter Halbleiter wird bei Raumtemperatur wie in Abbildung 3 gezeigt konstant beleuchtet, sodass im gesamten Halbleiter Elektronen-Lochpaare homogen mit der Generationsrate g_{L} erzeugt werden. Nehmen Sie für die Rekombinationsrate $r_{\mathrm{p}} = \Delta p/\tau_{\mathrm{p}}$ an. Weiterhin sei kein äußeres elektrisches Feld angelegt und $\Delta p \ll n_{\mathrm{D}}$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde das Licht schlagartig abgeschaltet. Berechnen Sie unter Angabe aller nötigen Zwischenschritte den zeitlichen Verlauf der Überschussladungsträgerdichte $\Delta p(t)$ vor und nach dem Zeitpunkt $t = 0$. Skizzieren Sie die Dichte der Löcher $p_{\mathrm{n}}(t)$. [5P]

c) Ein n-dotiertes Stück Silizium mit der Donatorendichte $n_{\mathrm{D}} = 10^{16}\,\mathrm{cm}^{-3}$ wird bei Raumtemperatur wie in b) beleuchtet. Dadurch entstehen pro Mikrosekunde $10^{12}\,\mathrm{cm}^{-3}$ Elektronen-Lochpaare. Nehmen Sie an, dass die Lebensdauer der Ladungsträger $\tau_{\mathrm{n}} = \tau_{\mathrm{p}} = 2\mu\mathrm{s}$ beträgt. Berechnen Sie die Minoritätsladungsträgerdichte p_{n} mit und ohne Beleuchtung. [2P] (Es gelte: $n_{\mathrm{i}} = 1,5 \cdot 10^{10}\,\mathrm{cm}^{-3}$)

5. **Potentialstufe [7P]**

a) Folgendes stufenförmige Potential V(x) sei gegeben:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & : \quad x < 0 \qquad \text{mit } \mathrm{V_0} > 0 \\ 0 & : \quad 0 \leq x \end{cases}$$

Betrachten Sie ein von rechts einlaufendes Elektron mit der Energie $W = \frac{5}{4}V_0$. Zeichnen Sie den Potentialverlauf mit der sich ausbreitenden Elektronenwelle und berechnen Sie den Unterschied im Elektronenimpuls zwischen den Bereichen $x < 0$ und $0 \leq x$ für ein Potential $V_0 = 3$ eV. [2,5P]

b) Bestimmen Sie das Verhältnis zwischen den Amplituden der an der Potentialstufe transmittierten und reflektierten Elektronenwelle. [2,5P]

c) Betrachten Sie nun ein von rechts einlaufendes Elektron mit der Energie $W = \frac{4}{5}V_0$. Wie groß ist die Eindringtiefe δx des Teilchens in die Potentialstufe ($x < 0$) bei der die Aufenthaltswahrscheinlichkeit auf $1/e$ des maximalen Werts gesunken ist? [2P]

6. **Potentialtopf [7P]**

a) Betrachten Sie folgendes Potential:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & : \quad x < 0 \\ 0 & : \quad 0 \leq x \leq L \qquad \text{mit L} > 0 \\ V_0 & : \quad L < x \qquad\quad\; \text{mit V}_0 > 0 \end{cases}$$

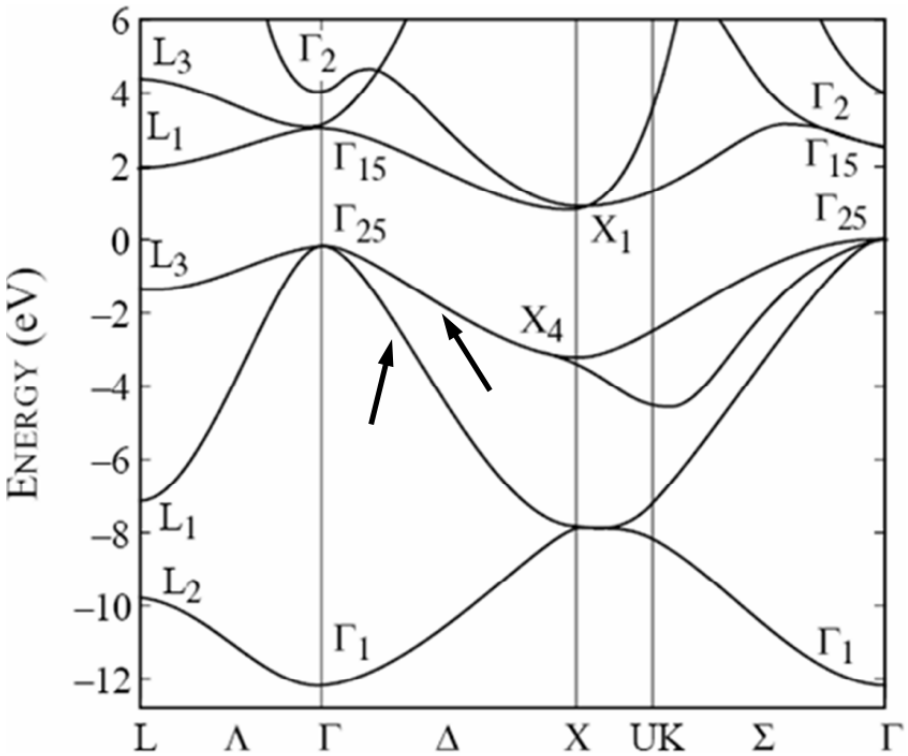
Zeichnen Sie den Potentialverlauf und den Realteil der gebundenen Lösungen mit den drei niedrigsten Eigenenergien. [2,5P]

b) Zeigen Sie, dass für Eigenenergien W $< V_0$ folgende Beziehung gilt: [4,5P]

$$\sqrt{\frac{W}{V_0 - W}} = -\tan\left(\sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}L\right).$$

7. **Bandstruktur [6P]**

Betrachten Sie die abgebildete Bandstruktur eines Halbleiters. Der Nullpunkt der y-Achse bezieht sich hierbei auf das Maximum der Valenzbandkante.



a) Handelt es sich um einen direkten oder indirekten Halbleiter? Begründen Sie Ihre Antwort. [1P]

b) Erläutern Sie kurz wie es zur Ausprägung einer Bandlücke kommt. [1P]

c) Nehmen Sie an, dass Gitterschwingungen innerhalb des Kristalls komplett ausgeschaltet seien. Welche Wellenlänge müssten Photonen mindestens besitzen um absorbiert werden zu können? [1,5P]

d) Gehen Sie vom Newton'schen Gesetz $\dot{p} = m \cdot a$ aus und leiten Sie mit Hilfe der Gruppengeschwindigkeit einen Ausdruck für die effektive Masse m^* her. [1,5P]

e) Erklären Sie anhand des Ergebnisses aus Aufgabenteil d) die Begriffe schweres und leichtes Loch. Um welche Art von Löchern handelt es sich bei den beiden mit Pfeilen markierten Bändern in der obigen Abbildung? Beschriften Sie die Bänder entsprechend mit Hilfe der Pfeile direkt in der Grafik. [1P]

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$=$	$6,63 \cdot 10^{-34}$	Js
	$\hbar$	$=$	$\frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	N_{A}	$=$	$6,02 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
Bohr'scher Radius	a_0	$=$	$5,29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$=$	$1,6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	$=$	$1,66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_{e}	$=$	$9,11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_{p}	$=$	$1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_{n}	$=$	$1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$=$	$8,85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	$=$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$=$	$3,0 \cdot 10^{8}$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_{B}	$=$	$1,38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	π	$=$	$3,14$	
Euler'sche Zahl	e	$=$	$2,72$	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit	$\rightarrow$ Kilogramm	$1\,\mathrm{u} = 1,66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Elektronenvolt	$\rightarrow$ Joule	$1\,\mathrm{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$

Formeln und Integrale (Bitte beachten Sie auch die Rückseite!)

$$\begin{aligned}
\exp(jkx) + \exp(-jkx) &= 2\cos(kx) \\
\exp(jkx) - \exp(-jkx) &= 2j\sin(kx)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int (\sin ax)^2 \; dx &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax \\
\int (\cos ax)^2 \; dx &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax \\
\int \sin ax \cos ax \, dx &= \frac{1}{2a}(\sin ax)^2 \\
\int x\,(\sin ax)^2 \; dx &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x\sin 2ax - \frac{1}{8a^2}\cos 2ax
\end{aligned}$$

Fortsetzung umseitig!

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a^2} \\
\int x^2 e^{ax} dx &= e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right) & \int_0^{\infty} x^n e^{-ax}\, dx &= \frac{n!}{a^{n+1}}\,(a>0, n=0,1,2,\ldots)
\end{aligned}
$$