

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

E-Mail-Adresse:

Erreichte Punktzahl:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Punkte								
Max	6	5	12	8	7	7	6	51

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 DIN A4 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 51, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 25.
- In Klammern angegebene Zahlen am Aufgabenende sind die erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Bitte schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf von der Universität gestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Bitte nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie bitte jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. Wellenfunktionen [6P]

Gegeben ist folgende normierte Wellenfunktion:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

- a) Berechnen Sie den Erwartungswert des Orts $\langle \hat{x} \rangle$ sowie den Erwartungswert des Quadrats des Orts $\langle \hat{x}^2 \rangle$. [2P]

$$\begin{aligned} \langle \hat{x} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) x \Psi(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} dx \underbrace{=}_{\text{Formels.}} 0 \\ \langle \hat{x}^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) x^2 \Psi(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} dx \underbrace{=}_{\text{Formels.}} \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \frac{\sigma^2}{2} \sqrt{\pi\sigma^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{2} \end{aligned}$$

- b) Berechnen Sie den Erwartungswert des Impulses $\langle \hat{p} \rangle$ sowie den Erwartungswert des Quadrats des Impulses $\langle \hat{p}^2 \rangle$. [2P]

$$\begin{aligned} \langle \hat{p} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) \left(-j\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} (-j\hbar) \left(-\frac{1}{\sigma^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} dx \underbrace{=}_{\text{Formels.}} 0 \\ \langle \hat{p}^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) \left(-j\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Psi(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} (-\hbar^2) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \frac{-\hbar^2}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} + \frac{1}{\sigma^2} x^2 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \right) dx \\ &\underbrace{=}_{\text{Formels.}} \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \frac{-\hbar^2}{\sigma^2} \left(-\sigma\sqrt{\pi} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\sigma^3}{2} \sqrt{\pi} \right) \\ &= \frac{\hbar^2}{2\sigma^2} \end{aligned}$$

- c) Berechnen Sie unter Verwendung der Ergebnisse der vorangegangenen Teilaufgaben

$$\Delta x \cdot \Delta p = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2} \cdot \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2}$$

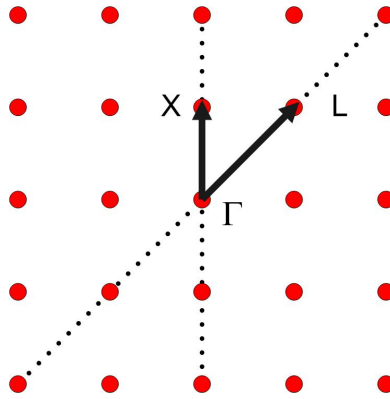
und interpretieren Sie das Ergebnis. [2P]

$$\begin{aligned}\Delta x \cdot \Delta p &= \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2} \cdot \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2} \\ &= \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle} \cdot \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle} \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{\sqrt{2}\sigma} = \frac{\hbar}{2}\end{aligned}$$

Das Ergebnis entspricht genau der Heisenbergschen Unschärfe Relation!

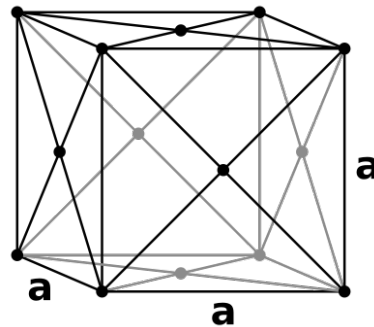
2. Kristall [5P]

- a) Erklären Sie anhand eines zweidimensionalen quadratischen Gitters, warum die Bandstruktur richtungsabhängig ist. Fertigen Sie dazu eine Skizze des Gitters an und zeichnen Sie zwei geeignete Kristallrichtungen ein. [2P]



Diesen Sachverhalt kann man sich für den 2D-Fall leicht veranschaulichen. In einem quadratischen Gitter liegen zum Beispiel die Gitterplätze entlang der Richtung $\vec{\Gamma X}$ enger als in Richtung $\vec{\Gamma L}$. Somit „sieht“ ein Elektron verschiedene Gitterabstände, je nachdem, in welche Richtung es sich im Kristall bewegt. Das führt zu unterschiedlichen physikalischen Eigenschaften und folglich zu einer richtungsabhängigen Bandstruktur.

- b) Nickel kristallisiert in einem fcc-Gitter mit einatomiger Basis mit einer Gitterkonstante $a = 352,4 \text{ pm}$ und hat eine molare Masse von $58,69 \text{ g/mol}$. Zeichnen Sie eine Elementarzelle des Gitters und berechnen Sie die Dichte ρ von Nickel. [2P]



$$\rho = \frac{m}{V} \stackrel{V=a^3}{=} \frac{m}{a^3} \stackrel{m=4 \cdot 58,69 \text{ g/mol}}{=} \frac{4 \cdot 58,69 \text{ g/mol}}{(352,4 \text{ pm})^3} = 8,91 \text{ g/cm}^3$$

- c) Beschreiben Sie ein Verfahren zur Herstellung eines hochreinen Einkristalls. Wie muß man das Verfahren modifizieren, um diesen Einkristall zu dotieren? [1P]
- *Czochralski-Verfahren: Beim Züchten den Einkristalls werden hochdotierte Kristallstücke der Schmelze zugeführt.*
 - *Zonenzieh-Verfahren: Beim Züchten des Kristalls ist ein Dotiergas anwesend.*
 - *Ionen-Implantation: Dotieratome werden nach der Züchtung des Kristalls per Ionen-Beschuß in das Material einlegiert.*
 - *Eindiffusion: Phosphin (PH) bzw. Phosphoroxychlorid (POCl₃) wird an die heiße Silizium-Oberfläche gebracht. Reaktion zu P₂O₃. Dieses dient als Diffusionsquelle an der Oberfläche. Z.B. Eindiffusion des Emitterkontaktes.*

3. Dotierte Halbleiter [12P]

a) Wir betrachten einen intrinsischen und einen n-dotierten Halbleiter mit gleichen effektiven Massen für Elektronen und Löcher bei Raumtemperatur. Zeichnen sie für beide Halbleiter für den Fall der Störstellenerschöpfung die folgenden Zusammenhänge in die dafür vorgesehenen Schaubilder **auf der nächsten Seite**:

- Das vereinfachte Banddiagramm im Ortsraum. Zeichnen Sie Fermi-niveau, Leitungs- und Valenzbandkanten ein. Für den Fall des dotierten Halbleiter zeichnen Sie ebenfalls das Störstellenniveau ein. [1P]
- Energie über Zustandsdichte ($g(W)$) [1P].
- Energie über Besetzungswahrscheinlichkeit für Fermionen (Fermi-Dirac-Verteilung, $f(W)$) [1P].
- Energie über Ladungsträgerdichte ($n(W)$ und $p(W)$) [1P].

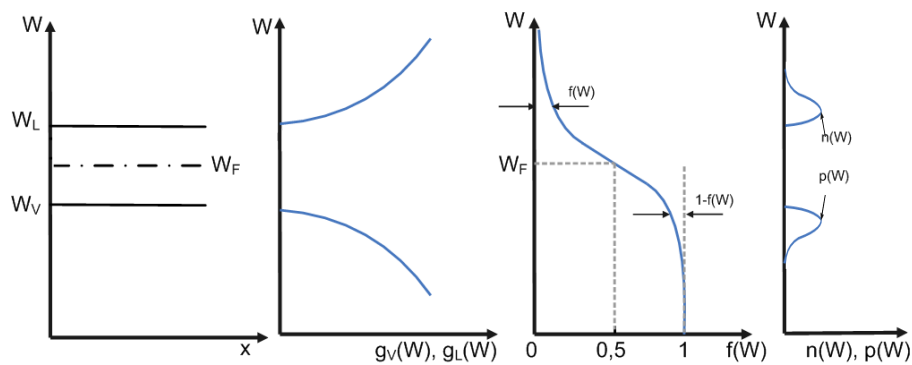


Abbildung 1: intrinsischer Halbleiter

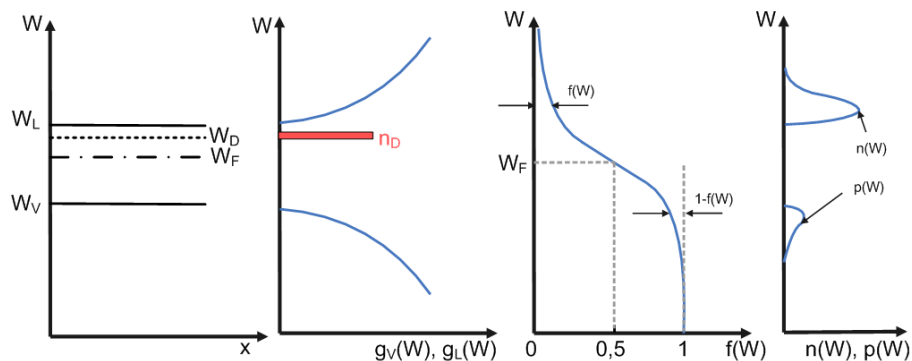


Abbildung 2: n-dotierter Halbleiter

b) Wir betrachten nun p-dotiertes und n-dotiertes Silizium bei Raumtemperatur. Skizzieren Sie das Banddiagramm einschließlich Fermi-niveaus, wenn die beiden unterschiedlich dotierten Halbleiter ohne Vorspannung in Kontakt gebracht werden. [2P]

Solange kein äußeres elektrisches Feld am pn-Übergang anliegt, befindet er sich im thermodynamischen Gleichgewicht. Das elektrochemische Potential (gleichbedeutend mit dem Fermi-niveau, siehe Skript Kapitel 9.1) ist im gesamten Halbleiter identisch. Weiterhin sind die Energieniveaus weit entfernt von der Raumladungszone unverändert, da hier noch die gleichen Ladungsträgerdichten vorherrschen wie vor dem Kontakt. Als letztes müssen nur noch die Valenz- und Leitungsbandkanten in den unterschiedlich dotierten Bereichen des Siliziums über die Raumladungszone hinweg verbunden werden. Dazu wird eine quadratische Verlauf angenommen, der sich aus der Poisson-Gleichung unter Annahme der Schottky-Näherung für die Raumladungen ergibt. Man erhält das in Abbildung 3 gezeigte Banddiagramm für den pn-Übergang ohne Vorspannung.

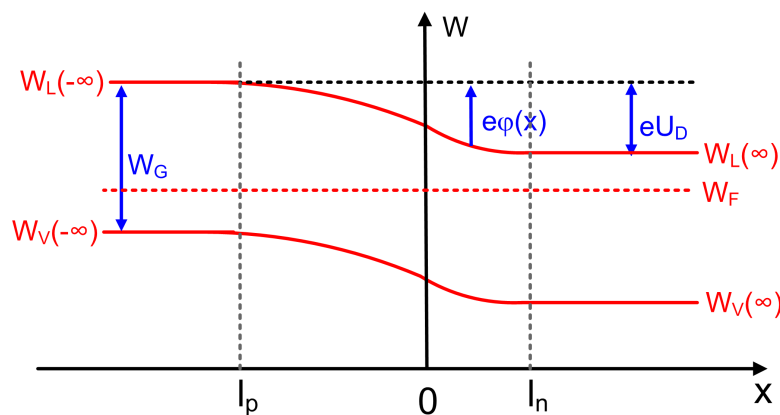


Abbildung 3: Banddiagramm pn-Übergang ohne Vorspannung.

- c) Wie verändert sich die Raumladungszone und die Lage des Fermi-niveaus in dem Banddiagramm aus dem vorangegangenen Aufgabenteil, wenn die Dotierung des n-dotierten Siliziums erhöht wird? [1P]

Das Fermi-niveau im n-dotierten Bereich wandert näher zur Leitungsbandkante und die Raumladungszone im n-dotierten Bereich verkleinert sich.

- d) In einem Halbleiter wird eine intrinsische Ladungsträgerdichte von $n_i = 5,84 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-3}$ gemessen. Die effektiven Massen seien $m_{\text{eff,e}} = 0,36 m_e$ (Elektronen) und $m_{\text{eff,h}} = 0,81 m_e$ (Löcher). Bestimmen Sie die Bandlücke dieses Halbleiters bei Raumtemperatur $T = 300 \text{ K}$. [4P]

Das Massenwirkungsgesetz lautet:

$$n \cdot p = N_{\text{eff}}^V N_{\text{eff}}^L \cdot e^{-\frac{W_L - W_V}{k_B T}}$$

Für einen intrinsischen Halbleiter wie Silizium mit $n=p$ gilt bei $T=300 \text{ K}$:

$$\begin{aligned} n_i = \sqrt{np} &= \sqrt{N_{\text{eff}}^V N_{\text{eff}}^L} \cdot e^{-\frac{W_L^n - W_V^n}{2k_B T}} \\ &= (m_e^* m_p^*)^{\frac{3}{4}} \cdot 2 \cdot \left(\frac{k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{W_g}{2k_B T}} \end{aligned}$$

Umstellen und Logarithmieren liefert:

$$W_g = -2k_B T \ln \left(\frac{n_i}{(m_e^* m_p^*)^{\frac{3}{4}} \cdot 2 \cdot \left(\frac{k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right) = 1.1 \text{ eV}$$

- e) Die Ladungsträgerbeweglichkeit in diesem Halbleiter bei Raumtemperatur (300 K) betrage $\mu_e = 1400 \text{ cm}^2/(\text{Vs})$ für Elektronen und $\mu_h = 500 \text{ cm}^2/(\text{Vs})$ für Löcher. Bestimmen Sie die Leitfähigkeit unter Verwendung der Ladungsträgerdichte aus dem vorherigen Aufgabenteil. [1P]

Die Leitfähigkeit berechnet sich aus:

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p) = 1,78 \cdot 10^{-4} \frac{\text{S}}{\text{m}}$$

4. Generation und Rekombination [8P]

- a) Geben Sie die 1D-Kontinuitätsgleichung für Elektronen an. Was besagt die Kontinuitätsgleichung? [1P]

Die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$-\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{e} \frac{\partial j_n}{\partial x} - g_n + r_n$$

Die Kontinuitätsgleichung beschreibt die zeitliche und räumliche Gesamtbilanz aller Beträge aus Ladungsträgerdrift und -diffusion sowie Rekombination (r_n) und Generation (g_n) in einem Volumenelement.

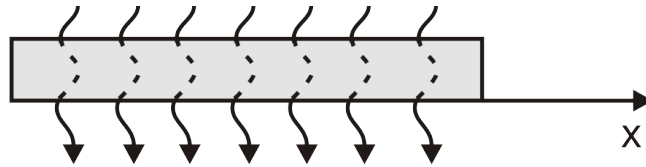


Abbildung 4: Beleuchteter n-dotierter Halbleiter.

- b) Ein stark n-dotierter Halbleiter wird bei Raumtemperatur wie in Abbildung 4 gezeigt konstant beleuchtet, so dass im gesamten Halbleiter Elektronen-Lochpaare homogen mit der Generationsrate g_L erzeugt werden. Nehmen Sie für die Rekombinationsrate $r_p = \Delta p / \tau_p$ an. Weiterhin sei kein äußeres elektrisches Feld angelegt und $\Delta p \ll n_D$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde das Licht schlagartig abgeschaltet. Berechnen Sie unter Angabe aller nötigen Zwischenschritte den zeitlichen Verlauf der Überschussladungsträgerdichte $\Delta p(t)$ vor und nach dem Zeitpunkt $t = 0$. Skizzieren Sie die Dichte der Löcher $p_n(t)$. [5P]

Laut Aufgabenstellung gilt für das elektrische Feld $E(x) = 0$ und $\frac{\partial \Delta p}{\partial x} = 0$. Die Kontinuitätsgleichung lautet somit:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = g_L - \frac{\Delta p}{\tau_p}$$

Fallunterscheidung:

$t \leq 0$:

Es gilt $\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = 0$, da konstant beleuchtet wird. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &= g_L - \frac{\Delta p}{\tau_p} \\ \Rightarrow \Delta p(t) &= g_L \tau_p = \text{const.} \end{aligned}$$

$t > 0$:

Ohne Beleuchtung werden keine Überschussladungsträger mehr generiert und es folgt

$g_L = 0$. Verbleibende Überschussladungsträger Δp rekombinieren mit Majoritätssladungsträgern und ändern sich zeitlich ($\frac{\partial \Delta p}{\partial t} \neq 0$). Es folgt:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = -\frac{\Delta p}{\tau_p}$$

Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Sie lässt sich über den Ansatz

$$\Delta p(t) = A e^{-bt}$$

sowie mit den Randbedingungen $\Delta p(0) = g_L \tau_p$ und $\Delta p(t \rightarrow \infty) = 0$ lösen. Damit Δp für $t \rightarrow \infty$ zu Null wird, muss es sich um eine abfallende Exponentialfunktion handeln. Aus der ersten Randbedingung ergibt sich durch Einsetzen in den Ansatz:

$$\begin{aligned} \Delta p(t=0) &= g_L \tau_p = A e^{-b \cdot 0} \\ \Rightarrow A &= g_L \tau_p \end{aligned}$$

Einsetzen von $\Delta p(t)$ in die Kontinuitätsgleichung liefert:

$$\begin{aligned} -b g_L \tau_p e^{-bt} &= -\frac{1}{\tau_p} g_L \tau_p e^{-bt} \\ \Rightarrow b &= \frac{1}{\tau_p} \end{aligned}$$

Daraus folgt schließlich:

$$\Delta p(t) = g_L \tau_p e^{-t/\tau_p}$$

Alternativer Lösungsweg über Integration:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta p}{\partial t} &= -\frac{\Delta p}{\tau_p} \\ \int_{g_L \tau_p}^{\Delta p} \frac{1}{\Delta p} d\Delta p &= \int_0^t -\frac{1}{\tau_p} dt \\ \ln \Delta p - \ln g_L \tau_p &= -\frac{t}{\tau_p} \\ \ln (\Delta p / g_L \tau_p) &= -\frac{t}{\tau_p} \\ \Delta p(t) &= g_L \tau_p e^{-t/\tau_p} \end{aligned}$$

- c) Ein n-dotiertes Stück Silizium mit der Donatorendichte $n_D = 10^{16}/\text{cm}^3$ wird bei Raumtemperatur wie in b) beleuchtet. Dadurch entstehen pro Mikrosekunde $10^{12}/\text{cm}^3$ Elektronen-Lochpaare. Nehmen Sie an, dass die Lebensdauer der Ladungsträger $\tau_n = \tau_p = 2\mu\text{s}$ beträgt. Berechnen Sie die Minoritätssladungsträgerdichte p_n mit und ohne Beleuchtung. [2P] (Es gelte: $n_i = 1,5 \cdot 10^{10}/\text{cm}^3$)

Ohne Beleuchtung:

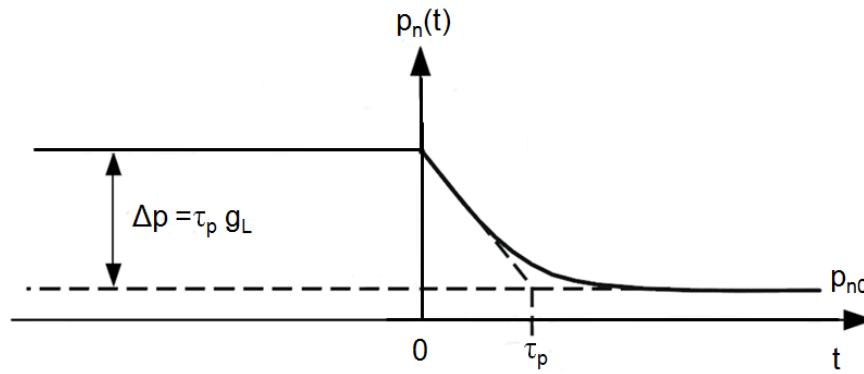


Abbildung 5: Skizze des zeitlichen Verlaufs von $p_n(t)$.

$$p_{n0} = n_i^2/n_D = (1,5 \cdot 10^{10}/\text{cm}^3)^2/10^{16}/\text{cm}^3 \approx 2,3 \cdot 10^4/\text{cm}^3$$

Mit Beleuchtung:

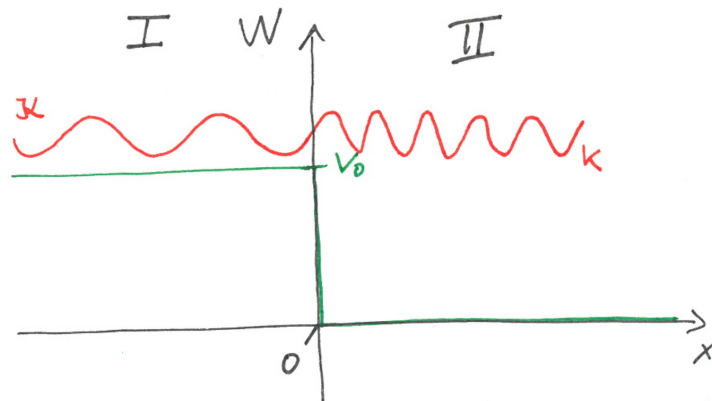
$$p_n = p_{n0} + \tau_p g_L = 2,3 \cdot 10^4/\text{cm}^3 + 2 \mu\text{s} \cdot \frac{10^{12}/\text{cm}^3}{\mu\text{s}} \approx 2 \cdot 10^{12}/\text{cm}^3$$

5. Potentialstufe [7P]

a) Folgendes stufenförmige Potential $V(x)$ sei gegeben:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & : x < 0 \\ 0 & : 0 \leq x \end{cases} \quad \text{mit } V_0 > 0$$

Betrachten Sie ein von rechts einlaufendes Elektron mit der Energie $W = \frac{5}{4}V_0$. Zeichnen Sie den Potentialverlauf mit der sich ausbreitenden Elektronenwelle und berechnen Sie den Unterschied im Elektronenimpuls zwischen den Bereichen $x < 0$ und $0 \leq x$ für ein Potential $V_0 = 3 \text{ eV}$. [2,5P]



Impuls eines freien Elektrons: $p = \hbar k$
 Energie — u — : $W = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

$$\text{I: } k_{\text{I}} = k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(W - V_0)} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{mV_0}{2}}$$

$\nearrow W = \frac{5}{4}V_0$

$$\text{II: } k_{\text{II}} = k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mW} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{5mV_0}{2}}$$

$$\Delta p = \hbar (k - k) = (\sqrt{5/2} - \sqrt{1/2}) \sqrt{mV_0}$$

$$= 5,78 \cdot 10^{-25} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Abbildung 6

- b) Bestimmen Sie das Verhältnis zwischen den Amplituden der an der Potentialstufe transmittierten und reflektierten Elektronenwelle. [2,5P]

Von rechts einlaufende Welle: $\psi_{\text{ein}}(x) = e^{-jkx}$.

Bestimmen der Reflexions- und Transmissionsamplituden r und t in Abhängigkeit von den Wellenzahlen:

Mit $V_0 < W$:

$$\psi_{\text{I}}(x) = te^{-j\kappa x} \quad \psi_{\text{II}}(x) = re^{jkx} + e^{-jkx} \quad (1)$$

Aus der Stetigkeit der Wellen an der Stelle $x = 0$ folgt:

$$(i) \quad \psi_{\text{I}}(0) = \psi_{\text{II}}(0) \quad (2)$$

$$(ii) \quad \psi'_{\text{I}}(0) = \psi'_{\text{II}}(0) \quad (3)$$

$$(i) \quad t = r + 1 \quad (4)$$

$$(ii) \quad -j\kappa t = jkr - jk \quad (5)$$

$$(i \rightarrow ii) \quad r = \frac{k - \kappa}{k + \kappa} \quad (6)$$

$$r = \frac{\sqrt{5/2} - \sqrt{1/2}}{\sqrt{5/2} + \sqrt{1/2}} \quad (7)$$

$$(i) \quad t = 1 + r = 1 + \frac{k - \kappa}{k + \kappa} = \frac{2k}{k + \kappa} \quad (8)$$

$$t = \frac{2\sqrt{5/2}}{\sqrt{5/2} + \sqrt{1/2}} \quad (9)$$

Damit ergibt sich folgendes Amplitudenverhältnis:

$$\frac{t}{r} = \frac{2\sqrt{5/2}}{\sqrt{5/2} - \sqrt{1/2}} = 3,62 \quad (10)$$

- c) Betrachten Sie nun ein von rechts einlaufendes Elektron mit der Energie $W = \frac{4}{5}V_0$. Wie groß ist die Eindringtiefe δx des Teilchens in die Potentialstufe ($x < 0$), bei der die Aufenthaltswahrscheinlichkeit auf $1/e$ des maximalen Werts gesunken ist? [2P]

Wellenfunktion im Bereich $x < 0$:

$$\Psi(-\delta x) = C \cdot e^{-\frac{\sqrt{2m(V_0 - W)} \cdot \delta x}{\hbar}}$$

Es gilt für die Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}\frac{C^2}{e} &= |\Psi(-\delta x)|^2 \\ \frac{1}{e} &= e^{-2\frac{\sqrt{2m(V_0-W)}\cdot\delta x}{\hbar}} \\ 1 &= e^{-2\frac{\sqrt{2m(V_0-W)}\cdot\delta x}{\hbar}+1} \\ \delta x &= \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(V_0-4/5V_0)}} \\ &= 1,27 \cdot 10^{-10} m\end{aligned}$$

6. Potentialtopf [7P]

a) Betrachten Sie folgendes Potential:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & : x < 0 \\ 0 & : 0 \leq x \leq L \\ V_0 & : L < x \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{mit } L > 0 \\ \text{mit } V_0 > 0 \end{array}$$

Zeichnen Sie den Potentialverlauf und den Realteil der gebundenen Lösungen mit den drei niedrigsten Eigenenergien. [2.5P]

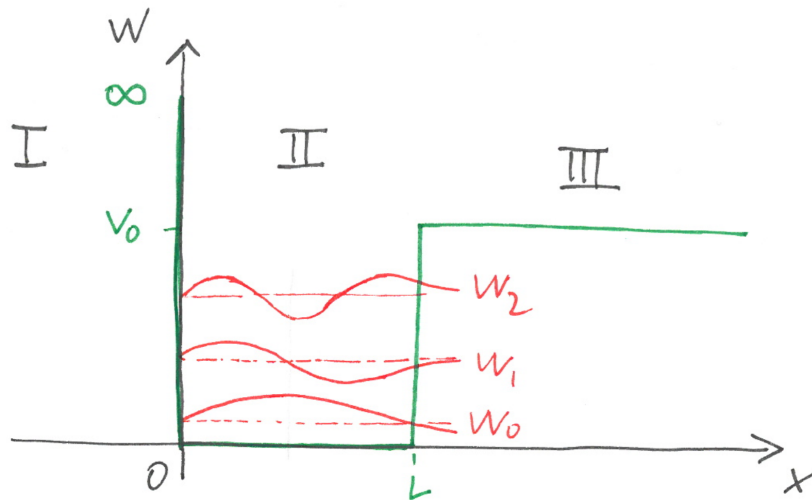


Abbildung 7

b) Zeigen Sie, dass für Eigenenergien $W < V_0$ an folgende Beziehung gilt: [4,5P]

$$\sqrt{\frac{W}{V_0 - W}} = -\tan\left(\sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}L\right).$$

Lösungsansätze:

$$0 \leq x \leq L : \Psi_{\text{II}}(x) = A \exp(jkx) + B \exp(-jkx)$$

$$L < x : \Psi_{\text{III}}(x) = C \exp(-\kappa x)$$

Mit

$$k = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m(V_0 - W)}{\hbar^2}}$$

Rand- und Nebenbedingungen:

$$\Psi_{\text{II}}(0) = 0 \tag{11}$$

$$\Psi_{\text{II}}(L) = \Psi_{\text{III}}(L) \quad (12)$$

$$\Psi'_{\text{II}}(L) = \Psi'_{\text{III}}(L) \quad (13)$$

Wir wenden zunächst die erste Bedingung an:

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{II}}(0) &= A + B = 0 \Rightarrow B = -A \\ \Rightarrow \Psi_{\text{II}}(x) &= A \exp(jk_1x) - A \exp(-jk_1x) \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\Psi_{\text{II}}(x) = 2jA \sin(kx)$$

Aus Bedingungen zwei und drei folgt damit

$$\begin{aligned} 2Aj \sin(kL) &= C \exp(-\kappa L) \\ 2Akj \cos(kL) &= -C\kappa \exp(-\kappa L). \end{aligned}$$

Teilen wir die beiden Gleichungen durcheinander, erhalten wir

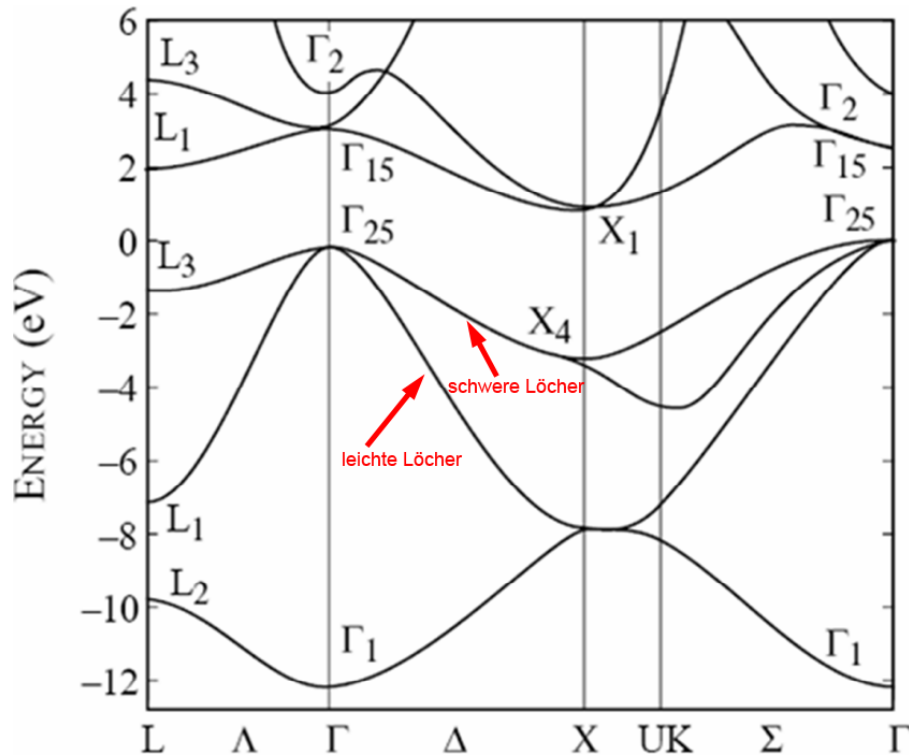
$$\frac{k}{\kappa} = -\tan(kL)$$

und durch Einsetzen der k -Werte:

$$\sqrt{\frac{W}{V_0 - W}} = -\tan\left(\sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}L\right).$$

7. Bandstruktur [6P]

Betrachten Sie die abgebildete Bandstruktur eines Halbleiters. Der Nullpunkt der y-Achse bezieht sich hierbei auf das Maximum der Valenzbandkante.



- a) Handelt es sich um einen direkten oder indirekten Halbleiter? Begründen Sie Ihre Antwort. [1P]

Da das Minimum des Leitungsbandes nicht beim gleichen k-Vektor wie das Maximum des Valenzbandes liegt, handelt es sich um einen indirekten Halbleiter.

- b) Erläutern Sie kurz wie es zur Ausprägung einer Bandlücke kommt. [1P]

Zwei Erklärungen möglich:

- *Diskrete Energieniveaus $\rightarrow$ gekoppelte Potentialtöpfe $\rightarrow$ Aufspaltung der Niveaus $\rightarrow$ Bandlücke*
 - *Stehende Welle $\rightarrow$ 2 mögliche Lösungen (Knoten oder Bauch) $\rightarrow$ Aufenthaltswahrscheinlichkeit verschiebt sich relativ zum Potential $\rightarrow$ Energieaufspaltung*
- c) Nehmen Sie an, man könnte die Gitterschwingungen komplett ausschalten. Welche Wellenlänge müssten Photonen mindestens besitzen um absorbiert werden zu können? [1,5P]

Es kann nicht mit der Bandlücke 1,1 eV gerechnet werden, sondern man muss die „direkte“ Bandlücke ablesen, die ca. 3 eV beträgt. Die Wellenlänge der Photonen beträgt somit:

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{E_{G, \text{dir}}} = 413 \text{ nm.}$$

- d) Gehen Sie vom Newton'schen Gesetz $\dot{p} = m \cdot a$ aus und leiten Sie mit Hilfe der Gruppengeschwindigkeit einen Ausdruck für die effektive Masse m^* her. [1,5P]

$$\begin{aligned}
 m^* \cdot a &= m^* \cdot \frac{\partial v_g}{\partial t} = m^* \cdot \frac{1}{\hbar} \frac{\partial^2 W}{\partial k \partial t} = \frac{m^*}{\hbar} \frac{\partial^2 W}{\partial k^2} \frac{\partial k}{\partial t} \\
 &\stackrel{!}{=} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \hbar k = \hbar \frac{\partial k}{\partial t} \\
 \Rightarrow \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 W}{\partial k^2} &= \frac{1}{m^*} \propto \text{Bandkrümmung}
 \end{aligned}$$

- e) Erklären Sie anhand des Ergebnisses aus Aufgabenteil d) den Begriff schwerer und leichter Löcher. Welche Kurve gehört demnach zu welchen Löchern? Beschriften Sie entsprechend die Pfeile in der obigen Abbildung. [1P]

Anhand der Bandstruktur ist zu erkennen, dass es im Valenzband zwei Kurven unterschiedlicher Krümmung gibt. Das stärker gekrümmte gehört zu den leichten Löchern, das schwächer gekrümmte zu den schweren Löchern.

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$= 6,63 \cdot 10^{-34}$	Js
	$\hbar$	$= \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	N_A	$= 6,02 \cdot 10^{23}$	mol ⁻¹
Bohr'scher Radius	a_0	$= 5,29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$= 1,6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	$= 1,66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$= 9,11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$= 1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$= 1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$= 8,85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	$= 4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$= 3,0 \cdot 10^8$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	$= 1,38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	π	$= 3,14$	
Euler'sche Zahl	e	$= 2,72$	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit → Kilogramm	$1\text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$
Elektronenvolt → Joule	$1\text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{ J}$

Formeln und Integrale (Bitte beachten Sie auch die Rückseite!)

$$\exp(jkx) + \exp(-jkx) = 2 \cos(kx)$$

$$\exp(jkx) - \exp(-jkx) = 2j \sin(kx)$$

$$\int (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int (\cos ax)^2 dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int \sin ax \cos ax dx = \frac{1}{2a} (\sin ax)^2$$

$$\int x (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x \sin 2ax - \frac{1}{8a^2} \cos 2ax$$

Fortsetzung umseitig!

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a^2} \\
\int x^2 e^{ax} dx &= e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) & \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx &= \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a > 0, n = 0, 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

13 III. Hauptgruppe	14 IV. Hauptgruppe	15 V. Hauptgruppe
5 10,81 2,0 B Bor	6 12,01 2,5 C Kohlenstoff	7 14,007 3,0 N Stickstoff
13 26,98 1,5 Al Aluminium	14 28,09 1,8 Si Silicium	15 30,97 2,1 P Phosphor
31 69,72 1,6 Ga Gallium	32 72,59 1,8 Ge Germanium	33 74,92 2,0 As Arsen
49 114,82 1,7 In Indium	50 118,69 1,8 Sn Zinn	51 121,75 1,9 Sb Antimon
81 204,38 1,8 Tl Thallium	82 207,2 1,8 Pb Blei	83 208,98 1,9 Bi Bismut