

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

E-Mail-Adresse:

Erreichte Punktzahl:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							
Max	5	11	8	11	7	8	50

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 DIN A4 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 50, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 25.
- In Klammern angegebene Zahlen am Aufgabenende sind die erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Bitte schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf von der Universität gestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Bitte nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie bitte jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. Grundlagen der Quantenmechanik [5P]

- a) Ergänzen Sie in der Skizze für das Doppelspaltexperiment (Abb. 1) die Auftreffwahrscheinlichkeiten für Elektronen! Was folgt daraus für die Natur der Elektronen? [1P]

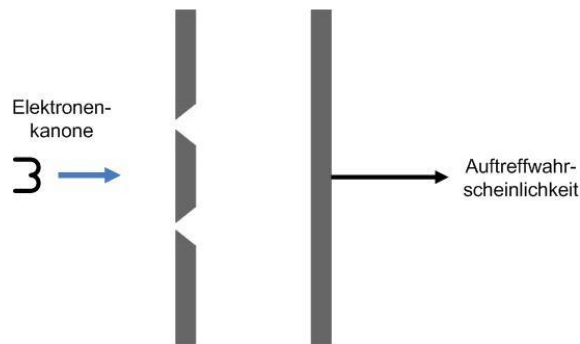


Abbildung 1: Doppelspalt-Experiment

Mit zwei offenen Spalten bilden sich Interferenzen aus. Diese Aspekte des Doppelspaltexperiments belegen die Wellennatur der Elektronen.

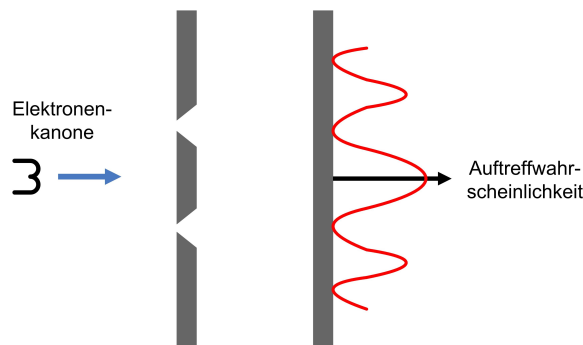


Abbildung 2: Lösung Doppelspalt-Experiment

- b) Die Kathode einer Vakuumphotozelle werde mit monochromatischem blaugrünen Licht ($\lambda = 500 \text{ nm}$) bestrahlt. Berechnen Sie die kinetische Energie der ausgelösten Photoelektronen, wenn die Austrittsarbeit $2,72 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ beträgt! Was sind die Folgen einer Änderung der Lichtintensität für die kinetische Energie und die Anzahl der ausgelösten Photoelektronen? Begründen Sie Ihre Antwort! [2P]

$$E_{\text{kin}} = hf - W_a = h \frac{c}{\lambda} - W_a$$

$$\Rightarrow E_{\text{kin}} = 1,26 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 0,79 \text{ eV}$$

Die Energie ergibt sich unabhängig von der Beleuchtungsstärke als Differenz aus der Photoenergie und der Austrittsarbeit. Die Zahl der ausgelösten Photoelektronen ist proportional zur Zahl der einfallenden Photonen und diese wiederum proportional zur Beleuchtungsstärke.

- c) Wie groß ist die kinetische Energie eines Protons, wenn seine De-Broglie-Wellenlänge 0,5 nm beträgt [1P]?

$$p = \hbar k = \hbar \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m}$$

$$\Rightarrow p = 1,33 \cdot 10^{-24} \frac{\text{kgm}}{\text{s}}; \quad E_{\text{kin}} = 5,26 \cdot 10^{-22} \text{ J} = 3,28 \text{ meV}$$

- d) Gehen Sie davon aus, dass die Energie dieses Protons genau bestimmt ist. Was lässt sich über den Ort des Protons sagen? Begründen Sie Ihre Antwort! [1P]

$$\Delta x \Delta p \leq \frac{\hbar}{2}$$

Aus der Heisenbergschen Unschärferelation folgt $\Delta x \rightarrow \infty$. Der Ort ist also komplett unbestimmt.

2. Potentialtopf und stückweise stetige Potentiale [11P]

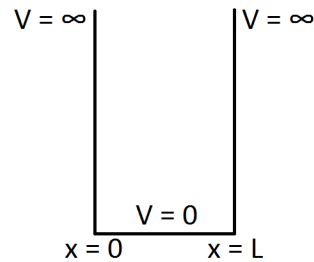


Abbildung 3: uendlicher Potentialtopf

Gegeben sei zunächst der in Abbildung 3 dargestellte unendlich hohe 1D-Potentialtopf.

- a) Bestimmen Sie für diesen Topf die Eigenwerte der Energie für die Wellenfunktion $\psi(x) = A \cdot \sin(kx)$ [2P]

1. Ableitung:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = Ak \cdot \cos(kx)$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -Ak^2 \cdot \sin(kx)$$

Einsetzen in SGL liefert:

$$W = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

An den Rändern muss die Welle verschwinden:

$$\psi(0) = \psi(L) = 0$$

Nicht-triviale Lösung für:

$$k = \frac{n\pi}{L}$$

Lösung für:

$$W_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \frac{n^2}{L^2}$$

- b) Nennen Sie die Lösung für die Eigenwerte der Energie eines baugleichen 2D-Topfs mit der Breite L_x in x-Richtung und L_y in y-Richtung! Geben Sie darüber hinaus für $L := L_x = L_y$ ein Beispiel eines entarteten Zustands an und erklären Sie was Entartung bedeutet! [1,5P]

$$W_{n_x, n_y} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} \right)$$

Beispiel für entarteten Zustand:

$$W_{1,2} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{1^2 + 2^2}{L^2} \right) = \frac{5\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{2^2 + 1^2}{L^2} \right) = W_{2,1}$$

Unter Entartung versteht man in diesem Fall, dass der Energieeigenwert $\frac{5\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$ nicht mehr eindeutig einer einzigen Wellenfunktion zugeordnet werden kann.

c) Gegeben sei die stationäre Schrödingergleichung in Operatorschreibweise:

$$\hat{H}\psi(x, y) = W\psi(x, y)$$

Zeigen Sie mit Hilfe des 2D-Separationsansatzes die Gültigkeit der Gleichung

$$\hat{H}\psi(x, y) = (W_x + W_y) \psi(x)\psi(y)$$

falls $\hat{H} = \hat{H}_x + \hat{H}_y$ [1,5P]

Produktansatz:

$$\psi(x, y) = \psi(x)\psi(y)$$

Der Hamilton-Operator kann in einen Operator, der nur von x , und einen, der nur von y abhängt, zerlegt werden. Außerdem setzen wir den Produktansatz ein:

$$\hat{H}\psi(x, y) = (\hat{H}_x + \hat{H}_y) \psi(x)\psi(y)$$

Auflösen der Klammer ergibt:

$$\hat{H}\psi(x, y) = \hat{H}_x\psi(x)\psi(y) + \hat{H}_y\psi(x)\psi(y)$$

Der Hamilton-Operator für x hat nur Auswirkung auf die Wellenfunktion, die von x abhängig ist. Für y analog:

$$\hat{H}\psi(x, y) = \psi(y) (\hat{H}_x\psi(x)) + \psi(x) (\hat{H}_y\psi(y))$$

In den großen Klammern steht jetzt jeweils die linke Seite der stationären Schrödingergleichung im Eindimensionalen. Einsetzen der rechten Seite liefert:

$$\hat{H}\psi(x, y) = \psi(y) (W_x\psi(x)) + \psi(x) (W_y\psi(y))$$

Die Energieeigenwerte können ausgeklammert werden:

$$\hat{H}\psi(x, y) = (W_x + W_y) \psi(x)\psi(y)$$

Gegeben sei nun das folgende stückweise stetige 1D-Potential:

$$V_i(x) = \begin{cases} V_1(x) = 0 & 0 \leq x < a \\ V_2(x) = V_2 & a \leq x < b \\ V_3(x) = -\frac{x}{b} + 1 & b \leq x < c \\ V_4(x) = +\infty & x \geq c \end{cases}$$

mit $V_2 > 0$. Von $x = 0$ laufe die ebene Welle $\psi_i(x) = A_i e^{+jk_i x}$ ein. Die Welle trage die Energie $W_e = \frac{1}{2}V_2$. Fälle für $x < 0$ werden nicht betrachtet!

- d) Skizzieren Sie das Potential und geben Sie die Randbedingungen zur Lösung des Problems an! Achten Sie zudem bei der Skizze auf eine Beschriftung der Achsen! [2P]

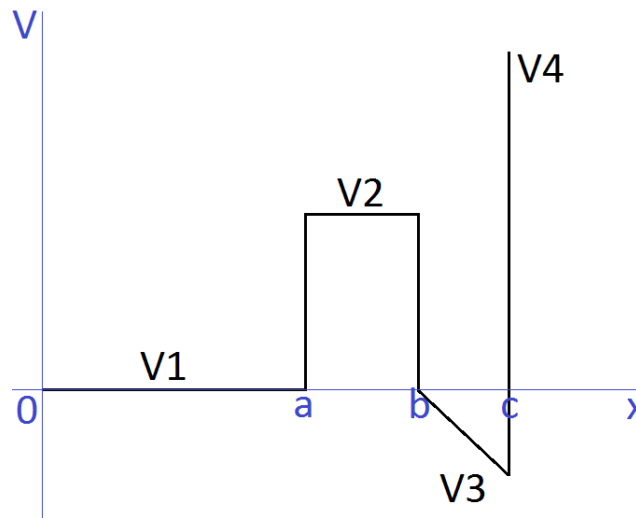


Abbildung 4: stückweise stetiges Potential

Randbedingungen für jeden Bereichsübergang liefern die Forderungen:

$$\psi_1(a) = \psi_2(a)$$

$$\psi'_1(a) = \psi'_2(a)$$

$$\psi_2(b) = \psi_3(b)$$

$$\psi'_2(b) = \psi'_3(b)$$

$$\psi_3(c) = \psi_4(c) = 0$$

$$\psi'_3(c) = \psi'_4(c) = 0$$

(Angabe von $\psi = 0$ nicht erforderlich!)

- e) Geben Sie die Wellenzahl für $0 \leq x < a$ und $a \leq x < b$ an! [1P]

$$0 \leq x < a: k_1 = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}$$

$$a \leq x < b: k_2 = \sqrt{\frac{2m(W-V_2)}{\hbar^2}}$$

- f) Beschreiben Sie qualitativ das Verhalten einer von $x = 0$ einlaufenden quantenmechanischen Welle der Energie $W_e = \frac{1}{2}V_2$ für $0 \leq x < a$ und $a \leq x < b$! Vergleichen Sie dieses Verhalten mit einem klassischen Elektron in den gleichen Bereichen! [1,5P]

Quantenmechanisch:

$0 \leq x < a$: Welle breitet sich ungestört aus

$a \leq x < b$: Welle kann mit gewisser Wahrscheinlichkeit in die Barriere tunneln und/oder anteilig reflektiert werden

Klassisch:

$0 \leq x < a$: Teilchen bewegt sich ungestört fort

$a \leq x < b$: Teilchen wird reflektiert

g) Kann die Welle in den Bereich $b \leq x < c$ gelangen? Begründen Sie Ihre Antwort! [1P]

Ja, da sie mit einer von Null verschiedenen Wahrscheinlichkeit durch die Barriere im Bereich $a \leq x < b$ tunneln kann.

h) Geben Sie die Wellenfunktion im Bereich $x \geq c$ an! [0,5P]

Im Bereich $x \geq c$ kann die Welle aufgrund des unendlichen Potentials nicht existieren. Es gilt: $\psi_4(x) = 0$.

3. Bandstruktur [8P]

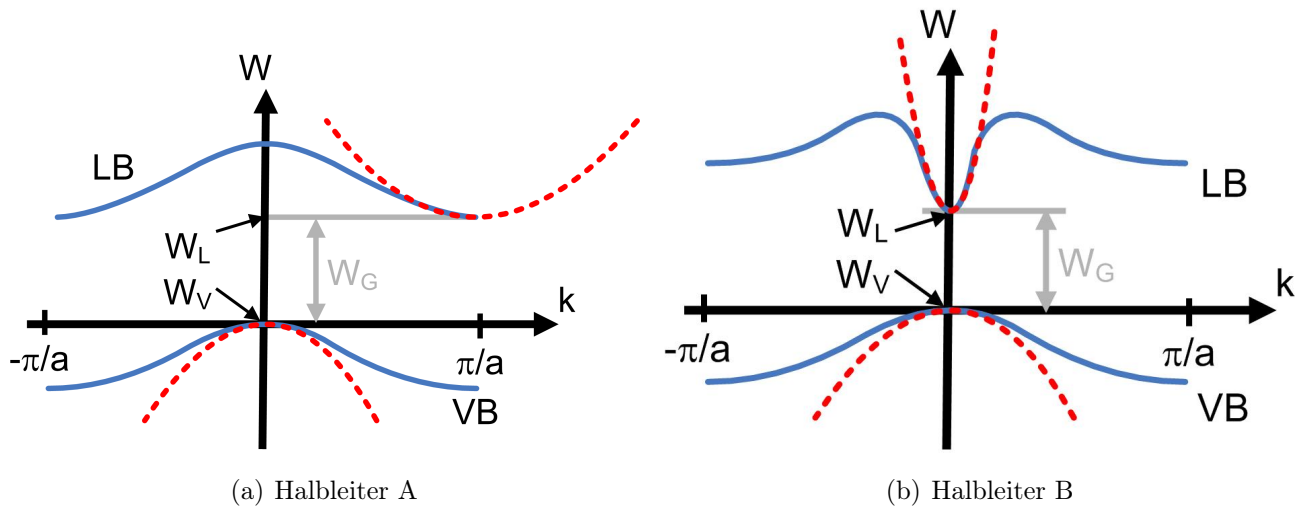


Abbildung 5: Eindimensionale schematische Darstellung der Bandstrukturen zweier Halbleiter.

In Abbildung 5 sind idealisierte Bandstrukturen zweier Halbleiter gegeben.

- Beschriften Sie in den Abbildungen 5(a) und 5(b) jeweils Valenzband und Leitungsband! [1P]
- Tragen Sie in die Abbildungen 5(a) und 5(b) jeweils graphisch die Energie der Bandlücke W_G ein! Bei welchem der Halbleiter handelt es sich um einen direkten, bei welchem um einen indirekten? [1,5P]
- Skizzieren Sie in den Abbildungen 5(a) und 5(b) jeweils parabolische Näherungen im Valenzbandmaximum und im Leitungsbandminimum! [2P]
- Die parabolische Näherung für das Leitungsband sei gegeben als $W_L(k) = A \cdot k^2$, wobei $A = \frac{\hbar^2}{0,01m_e}$. Berechnen Sie die effektive Masse der Elektronen im Leitungsband! [1,5P]

$$m_{\text{eff}} = \hbar^2 \frac{1}{\partial^2 W / \partial k^2} = \hbar^2 \frac{1}{2A} = 0,005m_e = 4,55 \cdot 10^{-33} \text{ kg}$$

Betrachten Sie das Halbleitermaterial Galliumarsenid (GaAs). Die Bandlücke von GaAs betrage 1,4 eV bei Raumtemperatur.

- In der optischen Telekommunikation wird eine Wellenlänge von $1,55 \mu\text{m}$ zur Übermittlung von Daten benutzt. Eignet sich GaAs zur Signal-Detektion (Begründung)? [1P]

$$E = 1,4 \text{ eV} = 2,24 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{ch}{E} = 8,86 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 0,886 \mu\text{m}$$

Da GaAs auf Grund der Bandlücke nur Licht mit einer Wellenlänge kleiner als 886 nm absorbieren kann, ist es für die Datenübermittlung mit $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$ nicht geeignet.

- f) Sie haben Silizium und Galliumarsenid zur Auswahl. Welches Material würden Sie zum Bau einer effizienten Leuchtdiode bevorzugen? Begründen Sie Ihre Wahl! [1P]

Silizium ist ein indirekter Halbleiter und damit ist zur strahlenden Rekombination über die Bandlücke der Impuls eines Phonons nötig. Andere nichtstrahlende Rekombinationsarten werden damit wahrscheinlicher. Galliumarsenid ist ein direkter Halbleiter und damit ist die strahlende Rekombination weitaus wahrscheinlicher und damit effizienter.

4. Zustandsdichte und Ladungsträgerkonzentration [11P]

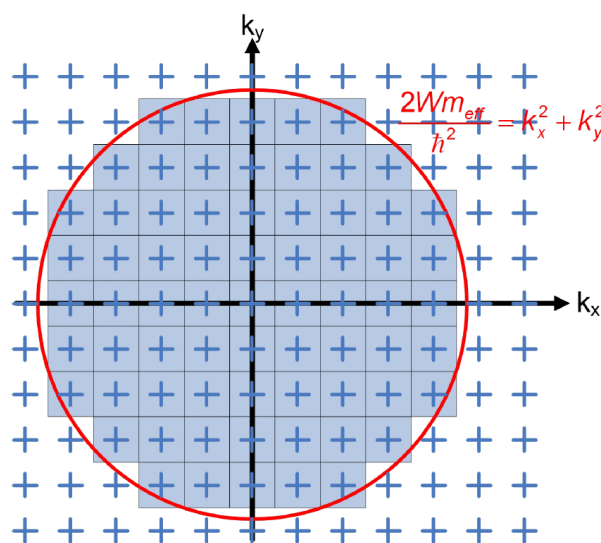
Sie möchten den Zusammenhang zwischen der Zustandsdichte, die aus quantenmechanischen Überlegungen folgt, und der Ladungsträgerkonzentration, mit der makroskopische Halbleitergrößen beschrieben werden können, in einem dreidimensionalen Bulk-Halbleiter verstehen.

- a) Beschreiben Sie was man unter dem Begriff Zustandsdichte versteht? [1P]

Die Zustandsdichte bezieht sich auf eine Dichte pro Energieintervall. Das heißt, die Zustandsdichte gibt an, wie viele erlaubte Zustände in einem System in einem infinitesimalen Gebiet zwischen W und $W + dW$ auftreten. Meist wird die Zustandsdichte auf das Volumen des Systems normiert, d.h. wir haben es mit einer Größe der Einheit Zustände pro Energie und pro Volumen zu tun

- b) Leiten Sie die Zustandsdichte für einen 3D-Kristall her! Verwenden Sie die parabolische Näherung $W = \frac{\hbar^2 |k|^2}{2m}$. Beziehen Sie sich bei der Herleitung außerdem auf das Kristallvolumen L^3 und berücksichtigen Sie in ihrem Ergebnis den Elektronenspin! [2,5P]

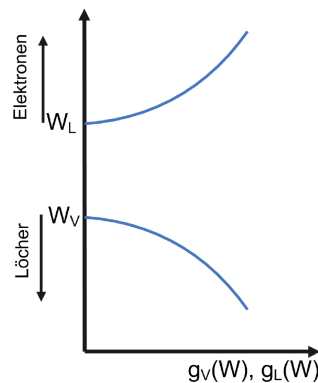
Wir betrachten Zustände im k -Raum unter periodischen Randbedingungen. Diese liefern uns die erlaubten Wellenzahlen der Art $k_i = 2\pi \frac{n_i}{L}$ wobei L die Länge und Breite des Kristalls ist. Den Abstand zwischen zwei Punkten im k -Raum markieren wir mit Kreuzen (aus Gründen der Anschaulichkeit hier nur in 2D gezeichnet):



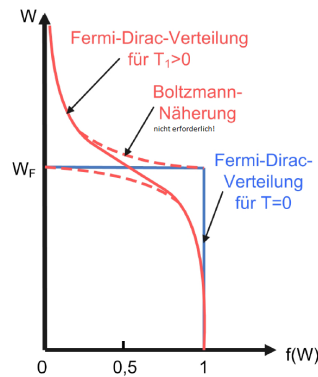
Nun kann man jeden Punkt mit einem Würfel der Kantenlänge $\frac{2\pi}{L}$ umschließen. Innerhalb eines solchen Würfels liegt also jeweils genau ein Zustand. Ein Zustand

nimmt also das Volumen $V_{\text{Zustand}} = \frac{(2\pi)^3}{V_{\text{Kristall}}} = \frac{8\pi^3}{L^3}$ im Zustandsraum ein, wobei L^3 dem Gesamtvolumen des Kristalls im Ortsraum entspricht. In parabolischer Näherung gilt zwischen Energie und Wellenvektor der Zusammenhang: $W = \frac{\hbar^2 |k|^2}{2m} = \frac{\hbar^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)}{2m}$. Durch einfaches Umformen gelangen wir zur Beschreibung einer Kugel mit dem Radius: $r_k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}$. Wir können nun die Anzahl der Zustände mit einer Energie kleiner W bestimmen, die alle innerhalb der Kugel liegen. Dabei berücksichtigen wir die Doppelbesetzung der Zustände aufgrund der zwei unterschiedlichen Spin-Orientierungen: $N(W) = 2 \frac{V_{\text{alle}}}{V_{\text{Zustand}}} = 2 \frac{\frac{4}{3}\pi r_k^3}{\frac{8\pi^3}{L^3}} = L^3 \frac{(2m)^{\frac{3}{2}}}{3\pi^2 \hbar^3} W^{\frac{3}{2}}$. Die Dichte der Zustände pro Energieintervall erhalten wir durch Bildung der ersten Ableitung nach W zu: $D(W) = \frac{\partial N(W)}{\partial W} = L^3 \frac{(2m)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{W}$. Durch Normierung auf das Kristallvolumen ergibt sich schließlich die Zustandsdichte zu: $g_{3D}(W) = \frac{D(W)}{L^3} = \frac{(2m)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{W}$.

- c) Skizzieren Sie die 3D-Zustandsdichte für Leitungs- und Valenzband in Abhängigkeit der Energie! Achten Sie bei der Skizze auf eine Beschriftung der Achsen. [1P]

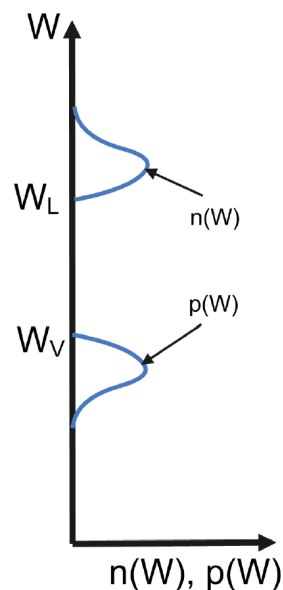


- d) Die Fermi-Dirac-Verteilung trifft eine Aussage darüber, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Zustand besetzt ist. Skizzieren Sie diese Verteilung in Abhängigkeit der Energie für eine Temperatur $T > 0$ K sowie für $T = 0$ K. Erläutern Sie hierbei die Bedeutung der Fermienergie! Unter welcher Voraussetzung können Sie die Boltzmann-Näherung anstelle der Fermi-Dirac-Verteilung anwenden? Achten Sie bei der Skizze auf eine Beschriftung der Achsen. [2P]



Die Fermienergie ist diejenige, bei der die Besetzungswahrscheinlichkeit gerade 50% entspricht. Für den Fall einer stufenförmigen Fermi-Dirac-Verteilung bei 0 K würde dies bedeuten, dass alle Zustände oberhalb der Fermi-Energie unbesetzt und alle unterhalb besetzt sind. Mathematisch lässt sich die Fermi-Dirac-Verteilung durch folgende Gleichung beschreiben: $f(W, T) = \frac{1}{1 + e^{\frac{W - W_F}{k_B T}}}$. In genügendem Abstand von der Fermienergie bzw. für $W - W_F \gg k_B T$ oder $e^{\frac{W - W_F}{k_B T}} \gg 1$ kann die Verteilung durch eine Boltzmann-Verteilung approximiert werden: $f_B(W, T) = e^{\frac{W_F - W}{k_B T}}$.

- e) Wie müssen Sie die Zustandsdichte mit der Besetzungswahrscheinlichkeit verknüpfen, um die Ladungsträgerkonzentration zu erhalten? Geben Sie eine allgemeine Formel für die gesamte Dichte der Elektronen im Leitungsband und für die gesamte Dichte der Löcher im Valenzband an und skizzieren Sie die Ladungsträgerkonzentrationen in Abhängigkeit der Energie! Achten Sie bei der Skizze auf eine Beschriftung der Achsen. [2,5P]

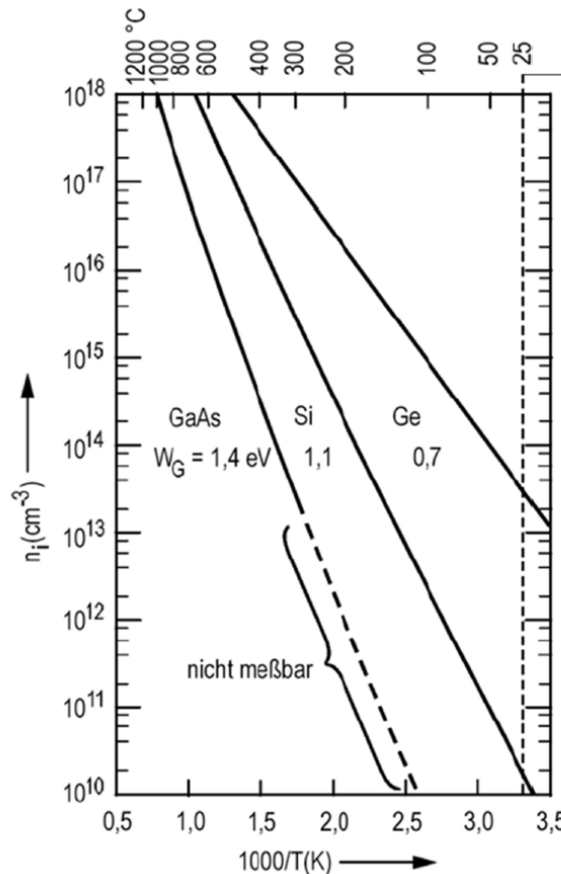


Die Ladungsträgerkonzentration berechnet sich allgemein aus dem Integral über das Produkt aus Zustandsdichte und Besetzungswahrscheinlichkeit:

$$n(W, T) = \int_{W_L}^{\infty} g_n(W) f(W, T) dW$$

$$p(W, T) = \int_{-\infty}^{W_V} g_p(W) (1 - f(W, T)) dW$$

- f) Sie möchten nun verstehen wie sich die Ladungsträgerkonzentrationen auf die Stromdichte auswirken. Berechnen Sie dazu die Stromdichte bei einer Temperatur von 323 K durch einen 0,1 m langen intrinsischen Germanium-Kristall unter einer angelegten Spannung von 5 V! Verwenden Sie unten stehende Grafik zur Ermittlung der thermisch aktivierten Ladungsträgerkonzentration und $\mu_e = 3900 \text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$ und $\mu_p = 1900 \text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$ als Ladungsträgerbeweglichkeiten. [2P]



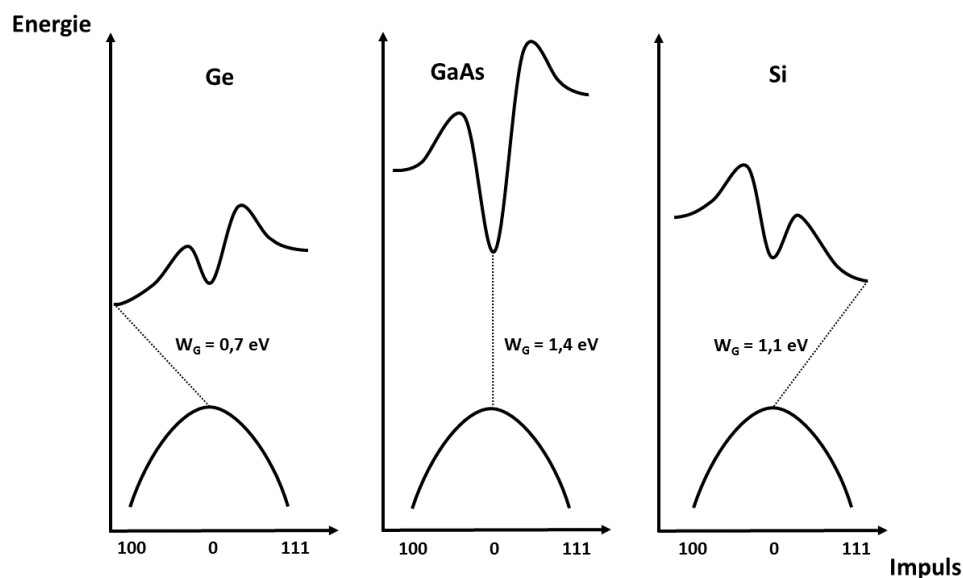
Ablesen aus der Grafik für Germanium bei 50°C ergibt $n_i = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$. Da es sich um einen intrinsischen Halbleiter handelt gilt $n_i = n = p$. Die Stromdichte berechnet sich damit zu: $j = \sigma E = (n e \mu_e + p e \mu_p) E = (n e \mu_e + p e \mu_p) \frac{U}{d} = n_i e (\mu_e + \mu_p) \frac{U}{d} = 46,46 \frac{\text{mA}}{\text{cm}^2}$

5. Dotierung [7P]

Sie arbeiten in einem Unternehmen, das kundenspezifische Halbleiter herstellt. Sie erhalten zunächst den Auftrag einem Kunden einen Halbleiter für den Einsatz bei Raumtemperatur ($T = 300\text{ K}$) zu empfehlen. Der Kunde wünscht sich eine maximale Strahlungsemission bei einer Wellenlänge von 886 nm und eine Leitfähigkeit von $15\text{ A V}^{-1}\text{cm}^{-1}$. Ansonsten wurden keine Vorgaben gemacht.

Zunächst möchten Sie die geforderte Strahlungsemission sicherstellen:

- a) Welchen Halbleiter müssten Sie zunächst auf Basis der geforderten Strahlungsemission empfehlen? Wählen Sie dazu einen der unten stehenden Vorschläge aus! Eine Begründung oder Rechnung ist nicht notwendig. [1P]



Galliumarsenid muss ausgewählt werden.

In einem weiteren Schritt versuchen Sie die geforderte Leitfähigkeit zu realisieren:

- b) Welche Leitfähigkeit ergibt sich für den von Ihnen empfohlenen intrinsischen Halbleiter? Nutzen Sie dazu die Tabelle mit den Einträgen Halbleiter, intrinsische Ladungsträgerkonzentration n_i , Elektronenbeweglichkeit μ_n und Löcherbeweglichkeit μ_p ! [1P]

Halbleiter	n_i in cm^{-3}	μ_n in $\text{cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$	μ_p in $\text{cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$
Germanium	$2,4 \cdot 10^{13}$	3900	1900
Silizium	$1,5 \cdot 10^{10}$	1400	450
Galliumarsenid	$2,3 \cdot 10^6$	9200	400

Die Leitfähigkeit für Galliumarsenid ergibt sich mit Hilfe der Tabelle zu:

$$\sigma = e_0 n_i (\mu_p + \mu_n) = 3,54 \cdot 10^{-9} \text{ AV}^{-1}\text{cm}^{-1}$$

Um die Leitfähigkeit zu erhöhen, entscheiden Sie sich für eine starke n-Dotierung des Halbleiters. Die Leitfähigkeit der Löcher sowie die intrinsische Leitfähigkeit kann damit vernachlässigt werden und durch die Annahme von Störstellenerschöpfung entspricht die notwendige Dotierkonzentration der Ladungsträgerkonzentration der Elektronen.

- c) Berechnen Sie die notwendige Dotierkonzentration, um den Kundenwunsch hinsichtlich der Leitfähigkeit zu erfüllen! [1P]

Die notwendige Dotierkonzentration kann laut Aufgabenstellung über die Ladungsträgerkonzentration der Elektronen bestimmt werden, da $n \gg p$ und $n \gg n_i$:

$$n_D \approx n = \frac{\sigma}{e_0 \mu_n} = 1,02 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$$

- d) Auf welchen Wert ändert sich durch die Dotierung die Ladungsträgerkonzentration der Löcher? [1P]

Unter Berücksichtigung des Massenwirkungsgesetzes verringert sich die Ladungsträgerkonzentration der Löcher auf:

$$p = \frac{n_i^2}{n} = 5,19 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-3}$$

Um den Halbleiter zu fertigen, verwendet Ihr Unternehmen das Czochralski-Verfahren zum Kristallwachstum und die Ionenimplantation zur Dotierung:

- e) Erklären Sie qualitativ das Czochralski-Verfahren! [1P]

Ein hochreines, polykristallines Vorläufermaterial wird zunächst in einem Tiegel unter Schutzgas geschmolzen. In diese Schmelze taucht man einen kleinen Kristall, den Impfkristall. An diesen lagern sich weitere Atome in geordneter Form an. Der sich bildende Einkristall wird unter Drehen aus der Schmelze gezogen.

- f) Erklären Sie qualitativ das Verfahren der Ionenimplantation und nennen Sie jeweils einen Vor- und einen Nachteil gegenüber dem Diffusionsverfahren! [2P]

Ionisierte Dotieratome werden in einem elektrischen Feld beschleunigt und auf die zu dotierende Oberfläche geschossen. Je nach Energie dringen die Teilchen verschieden tief in den Halbleiter ein.

Vorteil:

- Besser definierte Dotierungen in tieferen Lagen im Kristall erzeugbar*

Nachteil:

- Größere Schäden an der Kristallstruktur im Vergleich zur Eindiffusion*

6. Halbleiter im Nichtgleichgewicht [8P]

- a) Beschreiben Sie die Ursache für einen Drift- und einen Diffusionsstrom jeweils per Formel und mit Worten! [1P]

Die Ursache für einen Driftstrom ist ein angelegtes elektrisches Feld:

$$\vec{j}_{n,Drift} = en\mu_n\vec{E}$$

Die Ursache für einen Diffusionsstrom ist ein Gradient der Ladungsträgerdichte:

$$\vec{j}_{n,Diff} = eD_n\nabla n$$

- b) Geben Sie die Gleichung an, mit der Sie die Entwicklung der Ladungsträgerdichten in Abhängigkeit der verschiedenen Beiträge in Abbildung 6 berechnen können! Beschreiben Sie die Bedeutung und den Zusammenhang der einzelnen Terme! [2P]

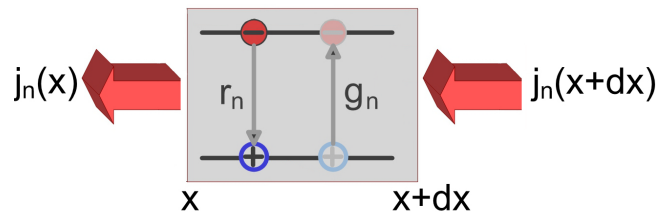


Abbildung 6

Die gesuchte Gleichung ist die Kontinuitätsgleichung:

$$-\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{e} \frac{\partial j_n}{\partial x} - g_n + r_n$$

Die Kontinuitätsgleichung beschreibt die zeitliche und räumliche Gesamtbilanz aller Beträge aus Ladungsträgerdrift und -diffusion sowie Rekombination (r_n) und Generation (g_n) in einem Volumenelement.

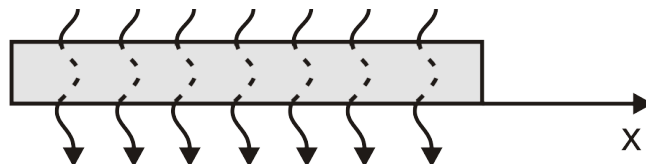


Abbildung 7: Beleuchteter n-dotierter Halbleiter.

- c) Gegeben sei ein unbeleuchteter, stark n-dotierter Halbleiter bei Raumtemperatur. Ab dem Zeitpunkt $t = 0$ wird der Halbleiter wie in Abbildung 7 gezeigt konstant

beleuchtet, so dass im gesamten Halbleiter Elektronen-Lochpaare homogen mit der Generationsrate g_L erzeugt werden. Nehmen Sie für die Rekombinationsrate $r_p = \Delta p / \tau_p$ an. Weiterhin sei kein äußeres elektrisches Feld angelegt und $\Delta p \ll n_D$. Berechnen Sie unter Angabe aller nötigen Zwischenschritte den zeitlichen Verlauf der Überschussladungsträgerdichte $\Delta p(t)$ nach dem Zeitpunkt $t = 0$. Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Dichte der Löcher $p_n(t)$ vor und nach dem Zeitpunkt $t = 0$. Geben Sie hierbei die Dichten der Löcher für die Grenzwerte $t \rightarrow \pm\infty$ an! [5P]

Laut Aufgabenstellung gilt für das elektrische Feld $E(x) = 0$ und $\frac{\partial \Delta p}{\partial x} = 0$. Die Kontinuitätsgleichung lautet somit:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = g_L - \frac{\Delta p}{\tau_p}$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Sie lässt sich über den Ansatz

$$\Delta p(t) = a + be^{-ct}$$

sowie mit den Randbedingungen $\Delta p(0) = 0$ lösen. Das Einsetzen des Ansatzes in die DGL führt zu:

$$\begin{aligned} -bce^{-ct} &= g_L - \frac{1}{\tau_p} (a + be^{-ct}) \\ \Rightarrow \left(\frac{b}{\tau_p} - bc \right) e^{-ct} + \left(\frac{a}{\tau_p} - g_L \right) &= 0 \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{b}{\tau_p} - bc &= 0 \Rightarrow c = \frac{1}{\tau_p} \\ \frac{a}{\tau_p} - g_L &= 0 \Rightarrow a = g_L \tau_p \end{aligned}$$

Zusammen mit der Randbedingung $\Delta p(0) = 0$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta p(0) &= g_L \tau_p + be^{-\frac{0}{\tau_p}} = 0 \\ \Rightarrow b &= -g_L \tau_p \end{aligned}$$

Und somit bestimmt man den zeitlichen Verlauf der Überschussladungsträgerdichte $\Delta p(t)$ zu:

$$\Delta p(t) = g_L \tau_p (1 - e^{-\frac{t}{\tau_p}})$$

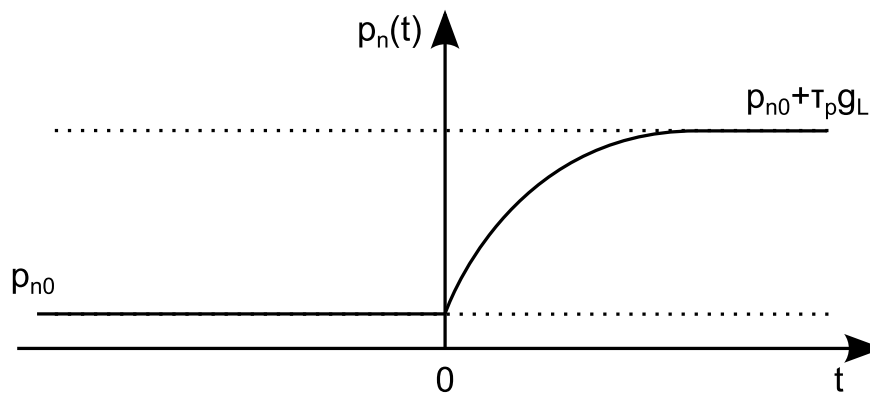


Abbildung 8: Skizze des zeitlichen Verlaufs von $p_n(t)$.

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$= 6,63 \cdot 10^{-34}$	Js
	$\hbar$	$= \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	N_A	$= 6,02 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
Bohr'scher Radius	a_0	$= 5,29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$= 1,6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	$= 1,66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$= 9,11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$= 1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$= 1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$= 8,85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	$= 4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$= 3,0 \cdot 10^8$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	$= 1,38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	π	$= 3,14$	
Euler'sche Zahl	e	$= 2,72$	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit $\rightarrow$ Kilogramm	1 u	$= 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenvolt $\rightarrow$ Joule	1 eV	$= 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Formeln und Integrale (Bitte beachten Sie auch die Rückseite!)

$$\exp(jkx) + \exp(-jkx) = 2 \cos(kx)$$

$$\exp(jkx) - \exp(-jkx) = 2j \sin(kx)$$

$$\int (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int (\cos ax)^2 dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int \sin ax \cos ax dx = \frac{1}{2a} (\sin ax)^2$$

$$\int x (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x \sin 2ax - \frac{1}{8a^2} \cos 2ax$$

Fortsetzung umseitig!

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = 0$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2}$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a > 0, n = 0, 1, 2, \dots)$$

13 III. Hauptgruppe	14 IV. Hauptgruppe	15 V. Hauptgruppe
5 10,81 2,0 B Bor	6 12,01 2,5 C Kohlenstoff	7 14,007 3,0 N Stickstoff
13 26,98 1,5 Al Aluminium	14 28,09 1,8 Si Silicium	15 30,97 2,1 P Phosphor
31 69,72 1,6 Ga Gallium	32 72,59 1,8 Ge Germanium	33 74,92 2,0 As Arsen
49 114,82 1,7 In Indium	50 118,69 1,8 Sn Zinn	51 121,75 1,9 Sb Antimon
81 204,38 1,8 Tl Thallium	82 207,2 1,8 Pb Blei	83 208,98 1,9 Bi Bismut