

Name, Vorname: .....

Matrikelnummer: .....

E-Mail-Adresse: .....

Erreichte Punktzahl: .....

Note: .....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\Sigma$
Punkte							
Max	9	9	10	8	7	7	50

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 DIN A4 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 50, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 25.
- Eckige Klammern am Aufgabenende geben die maximal erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe an.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf vom KIT bereitgestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Begründungen, Erklärungen und ähnliches können in Stichworten verfasst werden.
- Sofern nicht anders angegeben, ist der Rechenweg nachvollziehbar darzustellen.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

---

**1. Grundlagen der Quantenmechanik [9P]**

Betrachten Sie ein freies quantenmechanisches Teilchen mit der Wellenfunktion

$$\psi(x,t) = Ae^{j(kx-\omega t)}$$

und konstanter Amplitude  $A$ .

- a) Bestimmen Sie die Phasengeschwindigkeit  $v_P$  ausgehend vom Argument der  $e$ -Funktion in  $\psi(x,t)$ ! [1P]
- b) Welche räumliche Abhängigkeit ergibt sich für die Dichte der Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $|\psi(x,t)|^2$ ? Erklären Sie die physikalische Bedeutung Ihres Ergebnisses! [1P]
- c) Bestimmen Sie die Dispersionsrelation  $W(k)$  für  $\psi(x,t)$  durch Lösen der Schrödingergleichung! [2P]
- d) Bestimmen Sie den Erwartungswert der kinetischen Energie  $\langle \hat{W}_{\text{kin}} \rangle$  für  $\psi(x,t)$ ! [2P]

Für ein GAUSSsches Wellenpaket, das ein freies quantenmechanisches Teilchen beschreibt, sei nun die zeit- und ortsabhängige Wahrscheinlichkeitsdichte gegeben durch

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2(t)}} e^{-\frac{\left(x - \frac{\hbar k_0}{m}t\right)^2}{2\sigma_x^2(t)}}$$

Dabei beschreibt  $\sigma_x^2(t)$  die zeitabhängige Varianz.

- e) Lesen Sie den zeitabhängigen Ortserwartungswert  $\langle x \rangle$  aus  $\rho(x,t)$  ab! [0,5P]
- f) Geben Sie die Gruppengeschwindigkeit  $v_G$  für das Wellenpaket an und erklären Sie ihre physikalische Bedeutung! [1P]

**Fortsetzung auf Rückseite!**

- 
- g) Veranschaulichen Sie die typische Ausbreitung des Wellenpaketes, das sich mit der Geschwindigkeit  $v$  ausbreitet, indem Sie  $\rho(x,t)$  für  $x_0 = vt_0$  und  $x_1 = vt_1$  mit  $t_1 > t_0$  qualitativ in Abbildung 1 einzeichnen! Wie verändert sich qualitativ die Ortsunschärfe mit zunehmender Zeit? [1,5P]

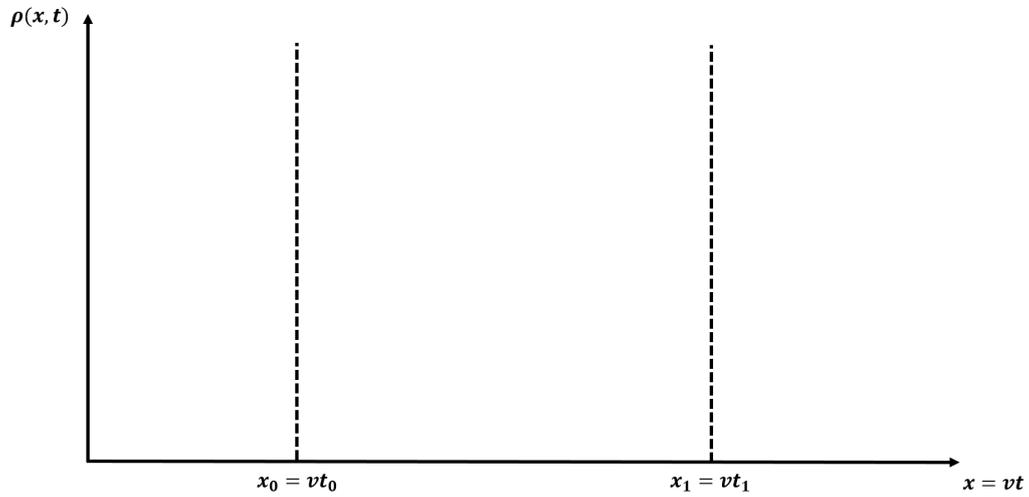


Abbildung 1

Name:

Matrikel-Nr.:

---

---

Name:

Matrikel-Nr.:

---



## 2. Wasserstoffatom [9P]

- a) Nennen Sie drei der vier Quantenzahlen, die den Zustand eines Elektrons im Wasserstoffatom definieren, und erklären Sie ihre Bedeutung! [3P]
- b) Beschreiben Sie eine Gemeinsamkeit einer kovalenten Bindung zweier Wasserstoffatome mit zwei gekoppelten Potentialtöpfen! [1P]
- c) Das Wasserstoffatom kann durch ein Zweiteilchensystem (Elektron e und Kern K) beschrieben werden. Die zugehörige Schrödingergleichung lässt sich wie folgt formulieren:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta_e - \frac{\hbar^2}{2m_K} \Delta_K - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r} \right) \psi(\vec{r}_e, \vec{r}_K) = W \psi(\vec{r}_e, \vec{r}_K)$$

Kennzeichnen Sie, welcher Term im Rahmen der Born-Oppenheimer-Näherung zunächst vernachlässigt wird, und begründen Sie, warum dies zulässig ist! [1P]

- d) Die Wellenfunktionen für das Wasserstoffatom lassen sich über einen Separationsansatz in Kugelkoordinaten berechnen. Ein Zustand wird dabei über das Tupel  $(n, l, m)$  definiert. Geben Sie die Wellenfunktion  $\psi_{n,l,m}$  für den Grundzustand in Abhängigkeit vom Bohrschen Atomradius  $a_0$  und vom Kernabstand  $r$  an! Verwenden Sie dazu die unten angegebenen normierten radialen Eigenfunktionen und Kugelflächenfunktionen, die die Wellenfunktion bestimmen! [1P]

$$\psi_{n,l,m} = R_{n,l}(r) Y_{l,m}(\theta, \phi)$$

n	l	m	$R_{n,l}(r)$	$Y_{l,m}(\theta, \phi)$
1	0	0	$2N e^{-x}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$
2	0	0	$2N e^{-x}(1-x)$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$
2	1	0	$\frac{2}{\sqrt{3}} N e^{-x}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos(\theta)$
2	1	+1	$\frac{2}{\sqrt{3}} N e^{-x}$	$-\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin(\theta) e^{j\phi}$
2	1	-1	$\frac{2}{\sqrt{3}} N e^{-x}$	$\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin(\theta) e^{-j\phi}$

$$\text{mit } N = \left( \frac{1}{na_0} \right)^{\frac{3}{2}} \text{ und } x = \frac{r}{na_0}$$

**Fortsetzung auf Rückseite!**

- e) Berechnet man die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte für die Wellenfunktion aus Teilaufgabe d), so erhält man den in Abbildung 2 dargestellten Verlauf über  $\frac{r}{a_0}$ . Bestimmen Sie aus der Zeichnung näherungsweise das Verhältnis  $\frac{r}{a_0}$  für den wahrscheinlichsten Wert sowie für den Erwartungswert der radialen Wahrscheinlichkeitsdichte! Warum unterscheiden sich diese voneinander? [2P]

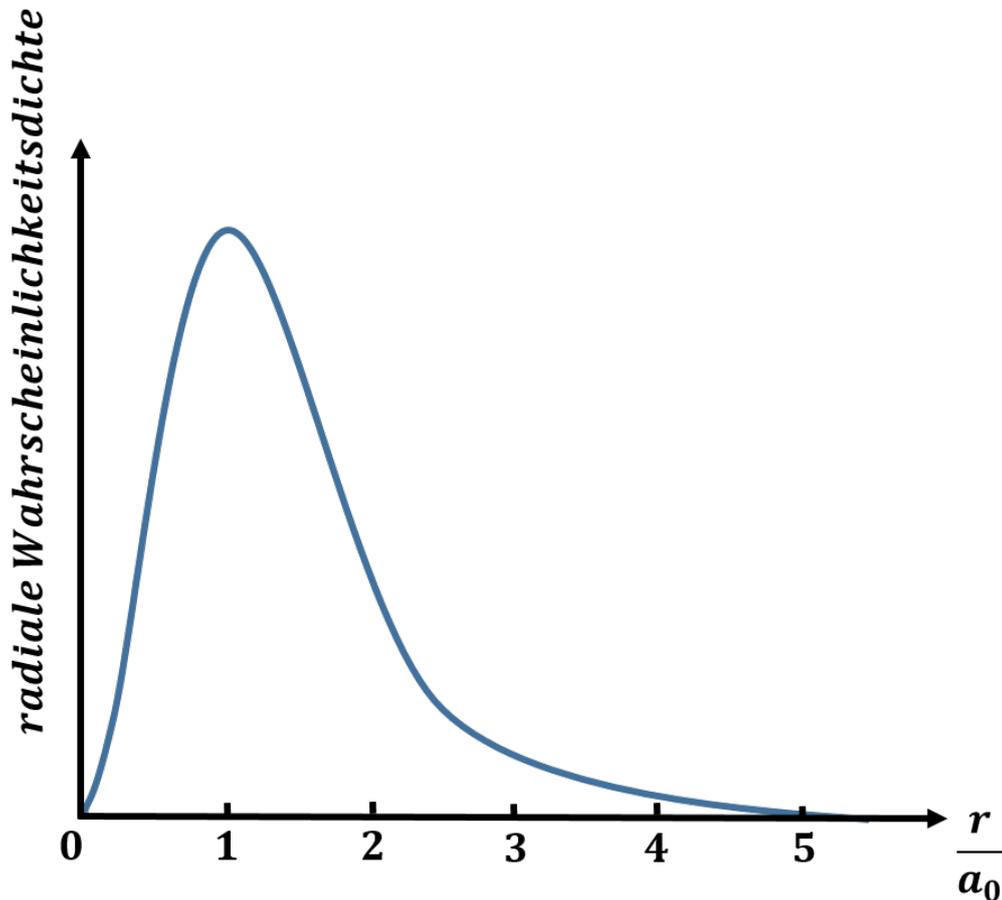


Abbildung 2

- f) Die Eigenenergien des Wasserstoff-Elektrons im Potential eines Protons lassen sich zu  $W_n = -W_{\text{Ryd}} \frac{1}{n^2}$  mit  $W_{\text{Ryd}} = 13,6 \text{ eV}$  und  $n = 1, 2, \dots$  berechnen. Bestimmen Sie eine von  $n$  abhängige Formel zur Berechnung der Wellenlänge  $\lambda$  der Strahlung, die bei Übergängen der Balmer-Serie (Übergänge in Zustände mit  $n = 2$ ) emittiert werden kann! [1P]

Name:

Matrikel-Nr.:

---



Name:

Matrikel-Nr.:

---



**3. Stückweise stetiges Potential [10P]**

Gegeben sei folgendes Potential  $V(x)$ , in das eine ebene Welle von links einläuft:

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{V_0}{2} & \text{für } x < L \text{ (Bereich 1)} \\ 0 & \text{für } L \leq x < 2L \text{ (Bereich 2)} \\ -V_0 & \text{für } 2L \leq x < 3L \text{ (Bereich 3)} \\ +\infty & \text{für } x \geq 3L \text{ (Bereich 4)} \end{cases}$$

mit  $V_0 > 0$  und  $L > 0$ .

- a) Skizzieren Sie das gegebene Potential  $V(x)$ ! Achten Sie auf eine korrekte Achsenbeschriftung! [1P]
- b) Stellen Sie einen allgemeinen Lösungsansatz für die Wellenfunktionen  $\psi_i(x)$  in jedem Bereich ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) auf und geben Sie die Randbedingungen für die Lösungen des Problems an! [2P]

Die von links einlaufende ebene Welle habe die Energie  $W = -\frac{V_0}{4}$ .

- c) Geben Sie die Wellenzahlen  $k_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) in den Bereichen 1 bis 3 an! Was ist der wesentliche Unterschied der Wellenfunktion  $\psi_2(x)$  im Bereich 2 gegenüber den Wellenfunktionen  $\psi_1(x)$  im Bereich 1 und  $\psi_3(x)$  im Bereich 3? [2P]
- d) Skizzieren Sie den qualitativen Verlauf der Wahrscheinlichkeitsdichte  $|\psi_i(x)|^2$  in allen Bereichen ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) in Ihre Skizze aus Teilaufgabe a)! Geben Sie dabei eine gestrichelte Linie vor, die  $|\psi_i(x)|^2 = 0$  markiert, und achten Sie auf die Randbedingungen! [2,5P]
- e) Welcher quantenmechanische Effekt tritt in Bereich 2 (also beim Übergang von Bereich 1 nach 3) auf? [0,5P]

**Fortsetzung auf Rückseite!**

---

Die Energie der von links einlaufenden Welle sei immer noch  $W = -\frac{V_0}{4}$ . Gehen Sie nun aber von einem anderen Potential  $V_{\text{neu}}(x)$  aus:

$$V_{\text{neu}}(x) = \begin{cases} -\frac{V_0}{2} & \text{für } x \leq L \\ 0 & \text{für } x > L \end{cases}$$

- f) Bestimmen Sie den Ansatz der Wellenfunktion  $\psi_{2,\text{neu}}(x)$  für  $x > L$  und vereinfachen Sie ihn so weit wie möglich! [1P]
- g) An welcher Stelle  $x$  beträgt die Dichte der Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $|\psi_{2,\text{neu}}(x)|^2$  noch das  $\frac{1}{e}$ -fache des Wertes bei  $x = L$ ? Nehmen Sie hierbei für die Wellenzahl den Wert  $k_2 = j\kappa_2 = j\frac{1}{L}$  an! [1P]

Name:

Matrikel-Nr.:

---



Name:

Matrikel-Nr.:

---



#### 4. Intrinsische und dotierte Halbleiter [8P]

Betrachten Sie zunächst einen hochreinen Silizium-Kristall bei Raumtemperatur. Es seien  $1,5 \cdot 10^{10}$  thermisch generierte Elektronen pro Kubikzentimeter im Leitungsband.

- a) Kennzeichnen Sie die Bandlücke  $W_G$  in Abbildung 3! Begründen Sie, ob es sich um einen direkten oder indirekten Halbleiter handelt! [1,5P]

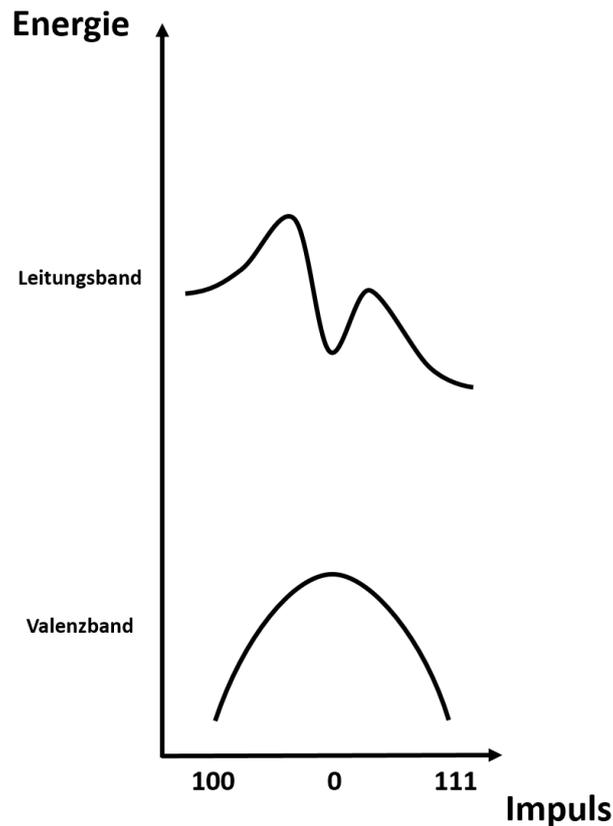


Abbildung 3

- b) Erklären Sie, wie sich die Ladungsträgerkonzentration der thermisch generierten Elektronen im Leitungsband mit absinkender Temperatur bis auf  $T = 0K$  verändert! [1P]
- c) Berechnen Sie die Leitfähigkeit  $\sigma_{\text{intrinsisch}}$  des hochreinen Silizium-Kristalls bei Raumtemperatur! Die Beweglichkeit der Elektronen betrage  $\mu_n = 1400 \text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$ , die der Löcher  $\mu_p = 450 \text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$ . [1P]

**Fortsetzung auf Rückseite!**

---

Betrachten Sie nun einen dotierten Silizium-Kristall bei Raumtemperatur. Als Dotand kommt Aluminium zum Einsatz.

- d) Nennen Sie zwei verschiedene Verfahren zur Dotierung eines Halbleiters! [1P]
- e) In Richtung welcher Bandkante verschiebt sich die Fermi-Energie  $W_F$  durch die Aluminium-Dotierung und wo würde diese bei einem Metall liegen? [1P]
- f) Zeigen Sie, dass bei Raumtemperatur quasi alle Störstellen ionisiert sind! Das Störstellenniveau  $W_A$  liegt  $0,057 \text{ eV}$  oberhalb der Valenzbandkante  $W_V$  und die Fermi-Energie  $W_F$  liegt  $0,55 \text{ eV}$  oberhalb der Valenzbandkante  $W_V$ . [1,5P]
- g) Welche Konzentration an Dotieratomen  $n_A$  ist ungefähr notwendig, um die Leitfähigkeit  $\sigma_{\text{intrinsisch}}$  aus Teilaufgabe c) bei Raumtemperatur um drei Größenordnungen zu steigern? Gehen Sie von Störstellenerschöpfung aus und vernachlässigen Sie den Beitrag von Elektronen zur Leitfähigkeit! [1P]

Name:

Matrikel-Nr.:

---



Name:

Matrikel-Nr.:

---

---

**5. Zustandsdichten [7P]**

- a) Beschreiben Sie, was man unter dem Begriff Zustandsdichte versteht! [1P]
- b) Zeigen Sie, dass die Zustandsdichte  $g(W)$  für einen 2D-Kristall ohne Normierung auf die Kristallfläche gleich  $\frac{mL^2}{\hbar^2\pi}$  ist! Verwenden Sie dabei die Dispersionsrelation  $W = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ ! [2,5P]
- c) Nennen Sie ein Materialsystem, für welches eine solche 2D-Zustandsdichte näherungsweise gilt? [0,5P]
- d) Was gibt die Fermi-Dirac-Verteilung an? Für welchen Fall ist die Boltzmann-Näherung gültig? [1P]

Betrachten Sie nun ein 2D-Materialsystem! Das Leitungsband sei durch die untere Bandkante bei der Energie  $W_C = 2,25$  eV begrenzt.

- e) Wie viele Zustände  $N$  sind bei Raumtemperatur auf einer quadratischen Kristallfläche der Kantenlänge  $L = 10$  cm im Leitungsband besetzt, wenn das Fermi-Niveau bei der Energie  $W_F = 2$  eV liegt? Dabei sei die Boltzmann-Näherung gültig. Verwenden Sie die Masse des freien Elektrons! (Hinweis: Sie können die Zustandsdichte aus Teilaufgabe b) verwenden!) [2P]

---

Name:

Matrikel-Nr.:

---



## 6. Halbleiter im Nichtgleichgewicht [7P]

### TEIL I: pn-Übergang

- a) Betrachten Sie einen pn-Übergang, der sich zunächst im Gleichgewicht befindet. Die p-Seite sei mit der Akzeptorkonzentration  $n_A$ , die n-Seite mit der Donatorkonzentration  $n_D$  dotiert. Die Raumladungszone erstrecke sich auf der p-Seite von  $-l_p \leq x < 0$  und auf der n-Seite von  $0 \leq x < l_n$ . Gehen Sie von Ladungsneutralität und konstanter Raumladungsdichte aus, d.h.  $n_D l_n = n_A l_p$ . Für das Potential auf der p-Seite gelte

$$\Phi(x) = \frac{en_A}{2\epsilon_r\epsilon_0} (x + l_p)^2$$

und für das Potential auf der n-Seite gelte

$$\Phi(x) = -\frac{en_D}{2\epsilon_r\epsilon_0} (l_n - x)^2 + U_D$$

Dabei sei  $U_D$  die Diffusionsspannung. Für  $\Phi(x = 0)$  setzen Sie Stetigkeit voraus. Bestimmen Sie die Gesamtlänge der Raumladungszone für  $n_A = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_D = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ ,  $U_D = 0,73 \text{ V}$  und  $\epsilon_r = 11,9$ ! [2P]

- b) Betrachten Sie nun einen pn-Übergang im Nichtgleichgewicht! Skizzieren Sie qualitativ das Banddiagramm unter Anlegen von  $U = U_D$  (Diffusionsspannung in Vorwärtsrichtung)! Kennzeichnen Sie das Leitungs- und Valenzband sowie die Quasi-Fermi-Niveaus! [2P]

### TEIL II: Halbleiter unter Beleuchtung

- c) Ein stark p-dotierter Halbleiter wird bei Raumtemperatur gemäß Abbildung 4 konstant beleuchtet. Im gesamten Halbleiter werden Elektron-Loch-Paare durch die Beleuchtung homogen mit einer Rate von  $g_L$  erzeugt. Gleichzeitig rekombinieren die Ladungsträgerpaare mit einer Rate von  $\Delta n / \tau_n$ . Es sei kein äußeres elektrisches Feld angelegt und es gelte  $\Delta n(t \leq 0) = g_L \tau_n$ . Zum Zeitpunkt  $t = 0$  wird schlagartig die Beleuchtung abgeschaltet. Berechnen Sie unter Angabe aller nötigen Zwischenschritte den zeitlichen Verlauf der Überschussladungsträgerdichte  $\Delta n(t)$  für  $t > 0$ ! [3P]

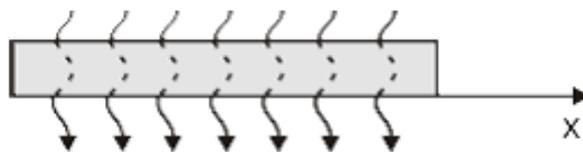


Abbildung 4

---

Name:

Matrikel-Nr.:

---



Name:

Matrikel-Nr.:

---



**Konstanten**

Planck'sches Wirkungsquantum	$h$	$= 6,63 \cdot 10^{-34}$	Js
	$\hbar$	$= \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	$N_A$	$= 6,02 \cdot 10^{23}$	mol <sup>-1</sup>
Bohr'scher Radius	$a_0$	$= 5,29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	$e$	$= 1,6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	$u$	$= 1,66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	$m_e$	$= 9,11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	$m_p$	$= 1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	$m_n$	$= 1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	$\epsilon_0$	$= 8,85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	$\mu_0$	$= 4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$c$	$= 3,0 \cdot 10^8$	m/s
Boltzmann-Konstante	$k_B$	$= 1,38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	$\pi$	$= 3,14$	
Euler'sche Zahl	$e$	$= 2,72$	
Imaginäre Einheit	$j$	$= \sqrt{-1}$	

**Konversion von Einheiten**

Atomare Masseneinheit → Kilogramm	$1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenvolt → Joule	$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

**Formeln und Integrale (Bitte beachten Sie auch die Rückseite!)**

$$\exp(jkx) + \exp(-jkx) = 2 \cos(kx)$$

$$\exp(jkx) - \exp(-jkx) = 2j \sin(kx)$$

$$\int (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int (\cos ax)^2 dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int \sin ax \cos ax dx = \frac{1}{2a} (\sin ax)^2$$

$$\int x (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x \sin 2ax - \frac{1}{8a^2} \cos 2ax$$

**Fortsetzung umseitig!**

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} xe^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a^2} \\
\int x^2 e^{ax} dx &= e^{ax} \left( \frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) & \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx &= \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a > 0, n = 0, 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

13 III. Hauptgruppe	14 IV. Hauptgruppe	15 V. Hauptgruppe
5 10,81 2,0 <b>B</b> Bor	6 12,01 2,5 <b>C</b> Kohlenstoff	7 14,007 3,0 <b>N</b> Stickstoff
13 26,98 1,5 <b>Al</b> Aluminium	14 28,09 1,8 <b>Si</b> Silicium	15 30,97 2,1 <b>P</b> Phosphor
31 69,72 1,6 <b>Ga</b> Gallium	32 72,59 1,8 <b>Ge</b> Germanium	33 74,92 2,0 <b>As</b> Arsen
49 114,82 1,7 <b>In</b> Indium	50 118,69 1,8 <b>Sn</b> Zinn	51 121,75 1,9 <b>Sb</b> Antimon
81 204,38 1,8 <b>Tl</b> Thallium	82 207,2 1,8 <b>Pb</b> Blei	83 208,98 1,9 <b>Bi</b> Bismut