

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

E-Mail-Adresse:

Erreichte Punktzahl:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							
Max	9	9	10	8	7	7	50

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 DIN A4 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 50, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 25.
- Eckige Klammern am Aufgabenende geben die maximal erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe an.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf vom KIT bereitgestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Begründungen, Erklärungen und ähnliches können in Stichworten verfasst werden.
- Sofern nicht anders angegeben, ist der Rechenweg nachvollziehbar darzustellen.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. Grundlagen der Quantenmechanik [9P]

Betrachten Sie ein freies quantenmechanisches Teilchen mit der Wellenfunktion

$$\psi(x,t) = Ae^{j(kx-\omega t)}$$

und konstanter Amplitude A .

- a) Bestimmen Sie die Phasengeschwindigkeit v_P ausgehend vom Argument der e -Funktion in $\psi(x,t)$! [1P]

Die Phasengeschwindigkeit beschreibt die Fortbewegung eines Punktes konstanter Phase. Deshalb fordern wir, dass das Argument $kx - \omega t$ der Wellenfunktion zeitlich konstant bleibt:

$$\frac{\partial}{\partial t}(kx - \omega t) = 0$$

$$kv_P - \omega = 0$$

$$v_P = \frac{\omega}{k}$$

- b) Welche räumliche Abhängigkeit ergibt sich für die Dichte der Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\psi(x,t)|^2$? Erklären Sie die physikalische Bedeutung Ihres Ergebnisses! [1P]

Die Dichte der Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist das Betragsquadrat der Wellenfunktion:

$$|\psi(x,t)|^2 = \psi^*(x,t)\psi(x,t) = A^*e^{-j(kx-\omega t)}Ae^{j(kx-\omega t)} = |A|^2$$

Dieses ist konstant und somit ohne räumliche Abhängigkeit. Das freie Teilchen ist deshalb von $x = -\infty \dots +\infty$ vollständig delokalisiert.

- c) Bestimmen Sie die Dispersionsrelation $W(k)$ für $\psi(x,t)$ durch Lösen der Schrödingergleichung!! [2P]

Der Begriff freies Teilchen aus der Aufgabenstellung impliziert $V(x,t) = 0$. Dadurch lautet die Schrödingergleichung:

$$j\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)$$

$$j\hbar \frac{\partial}{\partial t} A e^{j(kx-\omega t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} A e^{j(kx-\omega t)}$$

$$\hbar\omega \psi(x,t) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi(x,t)$$

$$\left(\hbar\omega - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) A e^{j(kx-\omega t)} = 0$$

Diese Beziehung muss für alle Zeiten t und Orte x erfüllt sein. Für die gesuchten Lösungen muss dann für die Parameter ω und k der Term in der Klammer verschwinden. Daraus folgt:

$$W(k) = \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

- d) Bestimmen Sie den Erwartungswert der kinetischen Energie $\langle \hat{W}_{\text{kin}} \rangle$ für $\psi(x,t)$! [2P]

Herleitung des Operators für die kinetische Energie:

Klassisch gilt $W_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv_G^2 = \frac{p^2}{2m}$

Der Impulsoperator lautet $\hat{p} = -j\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

Setzt man diesen in die klassische Energie ein, so erhält man den quantenmechanischen Ansatz $\hat{W}_{\text{kin}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

$$\langle \hat{W}_{\text{kin}} \rangle = \frac{\int \psi^*(x,t) \hat{W}_{\text{kin}} \psi(x,t) dx}{\int \psi^*(x,t) \psi(x,t) dx}$$

$$\langle \hat{W}_{\text{kin}} \rangle = \frac{\int A^* e^{-j(kx-\omega t)} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) A e^{j(kx-\omega t)} dx}{\int A^* e^{-j(kx-\omega t)} A e^{j(kx-\omega t)} dx}$$

$$\langle \hat{W}_{\text{kin}} \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} jk \frac{\int A^* e^{-j(kx-\omega t)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) A e^{j(kx-\omega t)} dx}{\int A^* e^{-j(kx-\omega t)} A e^{j(kx-\omega t)} dx}$$

$$\langle \hat{W}_{\text{kin}} \rangle = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \frac{\int A^* e^{-j(kx-\omega t)} A e^{j(kx-\omega t)} dx}{\int A^* e^{-j(kx-\omega t)} A e^{j(kx-\omega t)} dx}$$

$$\langle \hat{W}_{\text{kin}} \rangle = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Für ein GAUSSsches Wellenpaket, das ein freies quantenmechanisches Teilchen beschreibt, sei nun die zeit- und ortsabhängige Wahrscheinlichkeitsdichte gegeben durch

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2(t)}} e^{-\frac{\left(x - \frac{\hbar k_0}{m}t\right)^2}{2\sigma_x^2(t)}}$$

Dabei beschreibt $\sigma_x^2(t)$ die zeitabhängige Varianz.

- e) Lesen Sie den zeitabhängigen Ortserwartungswert $\langle x \rangle$ aus $\rho(x,t)$ ab! [0,5P]

Erwartungswert aus GAUSS-Funktion ablesen: $\langle x \rangle = \frac{\hbar k_0}{m}t$

- f) Geben Sie die Gruppengeschwindigkeit v_G für das Wellenpaket an und erklären Sie ihre physikalische Bedeutung! [1P]

Gruppengeschwindigkeit: $v_G = \frac{\hbar k_0}{m}$: Geschwindigkeit, mit der sich der Schwerpunkt des Wellenpaketes bewegt.

- g) Veranschaulichen Sie die typische Ausbreitung des Wellenpaketes, das sich mit der Geschwindigkeit v ausbreitet, indem Sie $\rho(x,t)$ für $x_0 = vt_0$ und $x_1 = vt_1$ mit $t_1 > t_0$ qualitativ in Abbildung 1 einzeichnen! Wie verändert sich qualitativ die Ortsunschärfe mit zunehmender Zeit? [1,5P]

Das Wellenpaket zerfließt, d.h. die Ortsunschärfe wird mit zunehmender Zeit größer.

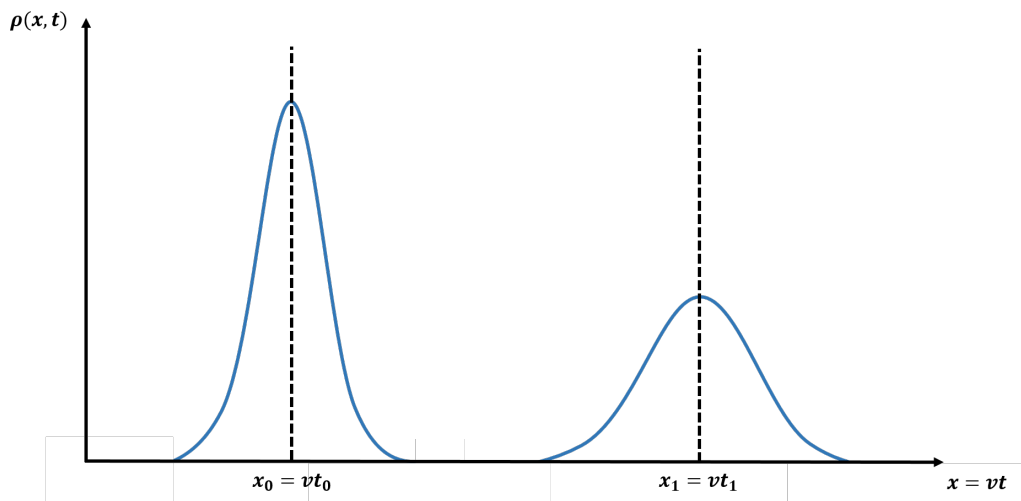


Abbildung 1

2. Wasserstoffatom [9P]

- a) Nennen Sie drei der vier Quantenzahlen, die den Zustand eines Elektrons im Wasserstoffatom definieren, und erklären Sie ihre Bedeutung! [3P]

Von den hier aufgeführten vier Quantenzahlen müssen mindestens drei genannt und erklärt werden.

Hauptquantenzahl: Energieeigenwert, Kernabstand des Elektrons, Schale

Nebenquantenzahl/Drehimpulsquantenzahl: Form des Orbitals, Bahndrehimpuls des Elektrons

Magnetquantenzahl: räumliche Ausrichtung des Orbitals bezüglich eines äußeren Magnetfelds

Spinquantenzahl: Eigendrehimpuls des Elektrons

- b) Beschreiben Sie eine Gemeinsamkeit einer kovalenten Bindung zweier Wasserstoffatome mit zwei gekoppelten Potentialtöpfen! [1P]

In der kovalenten Bindung bilden die Einzelorbitale der Bindungspartner ein gemeinsames Orbital. Dadurch spalten die jeweiligen Energieniveaus der isolierten Atome auf und die Aufenthaltswahrscheinlichkeit wird moduliert: das Elektron ist zwischen beiden Bindungspartnern delokalisiert.

In zwei gekoppelten Potentialtöpfen kann auch eine Aufspaltung der Energieniveaus beobachtet werden und es bilden sich gemeinsame Wellenfunktionen, die ein Tunneln zwischen den Töpfen ermöglichen.

- c) Das Wasserstoffatom kann durch ein Zweiteilchensystem (Elektron e und Kern K) beschrieben werden. Die zugehörige Schrödingergleichung lässt sich wie folgt formulieren:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta_e - \frac{\hbar^2}{2m_K} \Delta_K - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r} \right) \psi(\vec{r}_e, \vec{r}_K) = W \psi(\vec{r}_e, \vec{r}_K)$$

Kennzeichnen Sie, welcher Term im Rahmen der Born-Oppenheimer-Näherung zunächst vernachlässigt wird, und begründen Sie, warum dies zulässig ist! [1P]

Da der Kern laut Formelsammlung viel schwerer ist als das Elektron ($m_K \approx 1833m_e$), kann man die langsamen Bewegungen des Kerns gegenüber der schnellen Elektronenbewegung vernachlässigen), d.h. $\frac{\hbar^2}{2m_K} \Delta_K \approx 0$

- d) Die Wellenfunktionen für das Wasserstoffatom lassen sich über einen Separationsansatz in Kugelkoordinaten berechnen. Ein Zustand wird dabei über das Tupel (n, l, m) definiert. Geben Sie die Wellenfunktion $\psi_{n,l,m}$ für den Grundzustand in

Abhängigkeit vom Bohrschen Atomradius a_0 und vom Kernabstand r an! Verwenden Sie dazu die unten angegebenen normierten radialen Eigenfunktionen und Kugelflächenfunktionen, die die Wellenfunktion bestimmen! [1P]

$$\psi_{n,l,m} = R_{n,l}(r)Y_{l,m}(\theta,\phi)$$

n	l	m	$R_{n,l}(r)$	$Y_{l,m}(\theta,\phi)$
1	0	0	$2Ne^{-x}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$
2	0	0	$2Ne^{-x}(1-x)$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$
2	1	0	$\frac{2}{\sqrt{3}}Ne^{-x}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos(\theta)$
2	1	+1	$\frac{2}{\sqrt{3}}Ne^{-x}$	$-\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin(\theta)e^{j\phi}$
2	1	-1	$\frac{2}{\sqrt{3}}Ne^{-x}$	$\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin(\theta)e^{-j\phi}$

$$\text{mit } N = \left(\frac{1}{na_0}\right)^{\frac{3}{2}} \text{ und } x = \frac{r}{na_0}$$

Der Grundzustand wird repräsentiert durch $(n,l,m) = (1,0,0)$. Daraus folgt direkt durch Einsetzen:

$$\psi_{1,0,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}a_0^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{r}{a_0}}$$

- e) Berechnet man die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte für die Wellenfunktion aus Teilaufgabe d), so erhält man den in Abbildung 2 dargestellten Verlauf über $\frac{r}{a_0}$. Bestimmen Sie aus der Zeichnung näherungsweise das Verhältnis $\frac{r}{a_0}$ für den wahrscheinlichsten Wert sowie für den Erwartungswert der radialen Wahrscheinlichkeitsdichte! Warum unterscheiden sich diese voneinander? [2P]

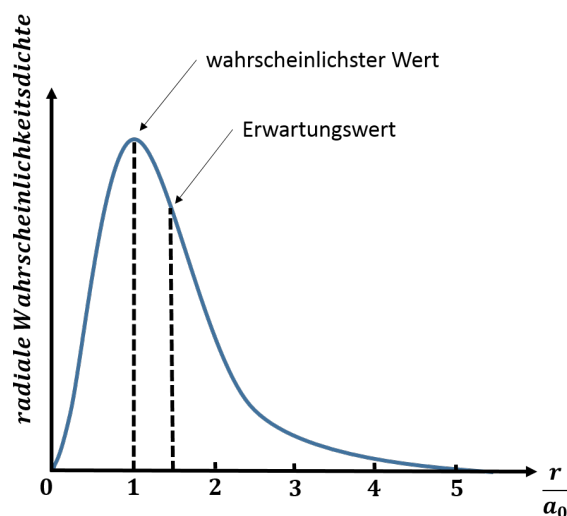


Abbildung 2

wahrscheinlichster Wert: $\frac{r}{a_0} \approx 1$

Erwartungswert: $\frac{r}{a_0} \approx 1,5$

Erwartungswerte basieren auf einer Mittelwertbildung bzw. geben den Schwerpunkt der Funktion an, wohingegen der wahrscheinlichste Wert lediglich aus dem Maximum der Wahrscheinlichkeitsdichte resultiert.

- f) Die Eigenenergien des Wasserstoff-Elektrons im Potential eines Protons lassen sich zu $W_n = -W_{\text{Ryd}} \frac{1}{n^2}$ mit $W_{\text{Ryd}} = 13,6 \text{ eV}$ und $n = 1, 2, \dots$ berechnen. Bestimmen Sie eine von n abhängige Formel zur Berechnung der Wellenlänge λ der Strahlung, die bei Übergängen der Balmer-Serie (Übergänge in Zustände mit $n = 2$) emittiert werden kann! [1P]

Die Balmer-Serie beschreibt die optischen Übergänge, bei denen ein Elektron ausgehend von einem höheren Zustand in den Zustand $n = 2$ relaxiert. Somit gilt:

$$W = W_n - W_2 = -W_{\text{Ryd}} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \right)$$

Ferner gilt:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{W}$$

Somit folgt:

$$\lambda = -\frac{hc}{W_{\text{Ryd}} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \right)}$$

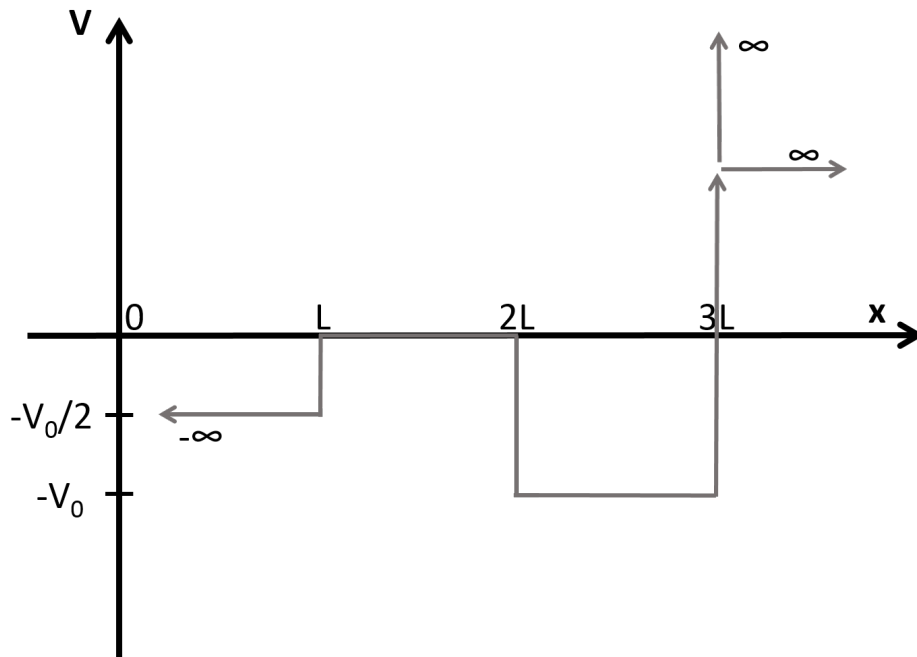
3. Stückweise stetiges Potential [10P]

Gegeben sei folgendes Potential $V(x)$, in das eine ebene Welle von links einläuft:

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{V_0}{2} & \text{für } x < L \text{ (Bereich 1)} \\ 0 & \text{für } L \leq x < 2L \text{ (Bereich 2)} \\ -V_0 & \text{für } 2L \leq x < 3L \text{ (Bereich 3)} \\ +\infty & \text{für } x \geq 3L \text{ (Bereich 4)} \end{cases}$$

mit $V_0 > 0$ und $L > 0$.

- a) Skizzieren Sie das gegebene Potential $V(x)$! Achten Sie auf eine korrekte Achsenbeschriftung! [1P]



- b) Stellen Sie einen allgemeinen Lösungsansatz für die Wellenfunktionen $\psi_i(x)$ in jedem Bereich ($i = 1, 2, 3, 4$) auf und geben Sie die Randbedingungen für die Lösungen des Problems an! [2P]

Ansatz für Wellenfunktion:

Bereich 1: $\psi_1(x) = Ae^{jk_1x} + Be^{-jk_1x}$

Bereich 2: $\psi_2(x) = Ce^{jk_2x} + De^{-jk_2x}$

Bereich 3: $\psi_3(x) = Ee^{jk_3x} + Fe^{-jk_3x}$

Bereich 4: $\psi_4(x) = 0$

Randbedingungen:

(I): $\psi_1(x=L) = \psi_2(x=L)$

(II): $\psi'_1(x=L) = \psi'_2(x=L)$

(III): $\psi_2(x=2L) = \psi_3(x=2L)$

(IV): $\psi'_2(x=2L) = \psi'_3(x=2L)$

(V): $\psi_3(x=3L) = \psi_4(x=3L) = 0$

Die von links einlaufende ebene Welle habe die Energie $W = -\frac{V_0}{4}$.

- c) Geben Sie die Wellenzahlen k_i ($i = 1, 2, 3$) in den Bereichen 1 bis 3 an! Was ist der wesentliche Unterschied der Wellenfunktion $\psi_2(x)$ im Bereich 2 gegenüber den Wellenfunktionen $\psi_1(x)$ im Bereich 1 und $\psi_3(x)$ im Bereich 3? [2P]

$$k_1 = \sqrt{\frac{2m(W + \frac{1}{2}V_0)}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{mV_0}{2\hbar^2}}$$

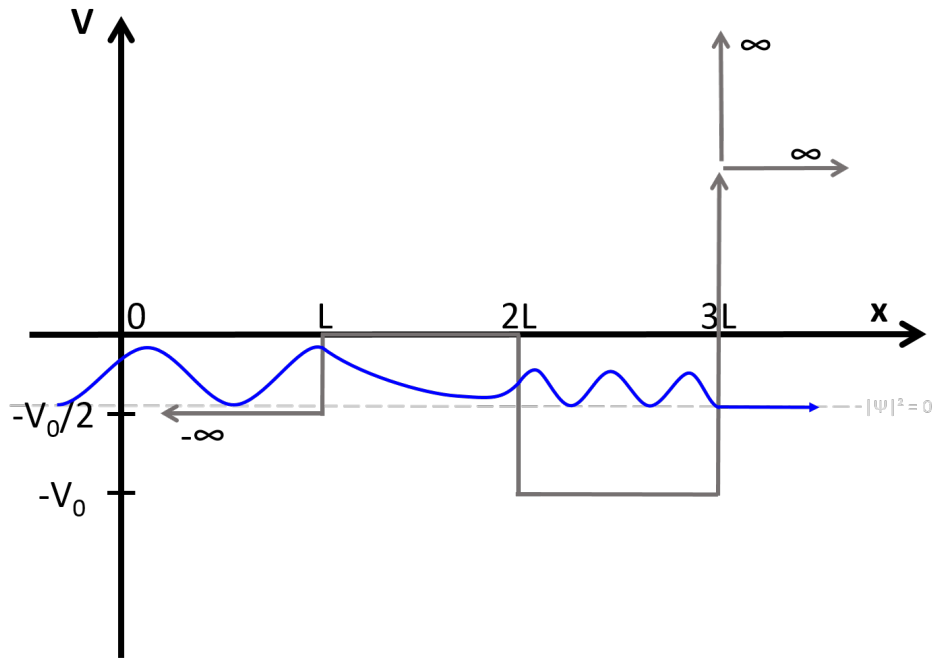
$$k_2 = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}} = \sqrt{-\frac{mV_0}{2\hbar^2}} = j\sqrt{\frac{mV_0}{2\hbar^2}} = j\kappa_2$$

$$k_3 = \sqrt{\frac{2m(W + V_0)}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2m(\frac{3V_0}{4})}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{3mV_0}{2\hbar^2}}$$

k wird in Bereich 2 komplex bzw. der Ansatz wird reell bzw. ändert sich zu:

$$\psi_2(x) = Ce^{jk_2x} + De^{-jk_2x} = Ce^{-\kappa_2x} + De^{\kappa_2x}$$

- d) Skizzieren Sie den qualitativen Verlauf der Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi_i(x)|^2$ in allen Bereichen ($i = 1, 2, 3, 4$) in Ihre Skizze aus Teilaufgabe a)! Geben Sie dabei eine gestrichelte Linie vor, die $|\psi_i(x)|^2 = 0$ markiert, und achten Sie auf die Randbedingungen! [2,5P]



- e) Welcher quantenmechanische Effekt tritt in Bereich 2 (also beim Übergang von Bereich 1 nach 3) auf? [0,5P]

In Bereich 2 tritt der Tunneleffekt auf.

Die Energie der von links einlaufenden Welle sei immer noch $W = -\frac{V_0}{4}$. Gehen Sie nun aber von einem anderen Potential $V_{\text{neu}}(x)$ aus:

$$V_{\text{neu}}(x) = \begin{cases} -\frac{V_0}{2} & \text{für } x \leq L \\ 0 & \text{für } x > L \end{cases}$$

- f) Bestimmen Sie den Ansatz der Wellenfunktion $\psi_{2,\text{neu}}(x)$ für $x > L$ und vereinfachen Sie ihn so weit wie möglich! [1P]

Da das Potential $V_{\text{neu}}(x > L) = 0$ nach rechts unendlich ausgedehnt ist, entsteht im Bereich $x > L$ keine Reflexion und das nicht vorhandene Potential für $x > L$ wirkt immer noch auf die einlaufende Welle wie eine Barriere, da $0 > -\frac{V_0}{4}$. Die Wellenfunktion muss deshalb für $x > L$ nach rechts exponentiell abklingen. Daraus folgt, dass für einen allgemeinen Ansatz

$$\psi_{2,\text{neu}}(x) = Ge^{jk_{2,\text{neu}}x} + He^{-jk_{2,\text{neu}}x}$$

nun $H = 0$ gefordert werden muss. Die Wellenzahl kann aufgrund des hier gleichbleibenden Potentials und aufgrund der gleichbleibenden Energie der Welle aus Teilaufgabe c) für Bereich 2 übernommen werden:

$$k_{2,\text{neu}} = k_2 = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}} = \sqrt{-\frac{mV_0}{2\hbar^2}} = j\sqrt{\frac{mV_0}{2\hbar^2}} = j\kappa_2$$

Somit folgt für die Wellenfunktion:

$$\psi_{2,\text{neu}}(x) = Ge^{-\kappa_2 x}$$

- g) An welcher Stelle x beträgt die Dichte der Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\psi_{2,\text{neu}}(x)|^2$ noch das $\frac{1}{e}$ -fache des Wertes bei $x = L$? Nehmen Sie hierbei für die Wellenzahl den Wert $k_2 = j\kappa_2 = j\frac{1}{L}$ an! [1P]

$$\frac{|\psi_{2,\text{neu}}(L)|^2}{|\psi_{2,\text{neu}}(x)|^2} = e$$

$$\frac{|Ge^{-\kappa_2 L}|^2}{|Ge^{-\kappa_2 x}|^2} = e$$

$$e^{\kappa_2(x-L)} = \sqrt{e}$$

$$\kappa_2(x-L) = \ln(\sqrt{e})$$

$$x-L = \frac{1}{2\kappa_2}$$

$$x = \frac{1}{2\kappa_2} + L$$

$$x = \frac{3}{2}L$$

4. Intrinsische und dotierte Halbleiter [8P]

Betrachten Sie zunächst einen hochreinen Silizium-Kristall bei Raumtemperatur. Es seien $1,5 \cdot 10^{10}$ thermisch generierte Elektronen pro Kubikzentimeter im Leitungsband.

- a) Kennzeichnen Sie die Bandlücke W_G in Abbildung 3! Begründen Sie, ob es sich um einen direkten oder indirekten Halbleiter handelt! [1,5P]

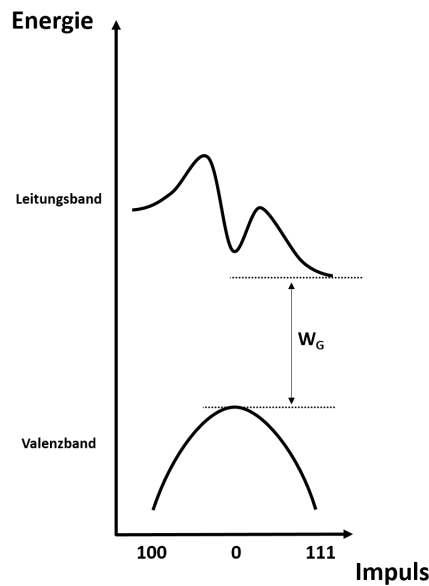


Abbildung 3

Es handelt sich um einen indirekten Halbleiter, da sich das Minimum des Leitungsbandes und das Maximum des Valenzbandes an unterschiedlichen Kristallimpulsen befinden.

- b) Erklären Sie, wie sich die Ladungsträgerkonzentration der thermisch generierten Elektronen im Leitungsband mit absinkender Temperatur bis auf $T = 0K$ verändert! [1P]

Die Konzentration nimmt ab, bis sie bei $T = 0K$ auf Null gesunken ist. Es werden mit fallender Temperatur immer weniger Elektronen in das Leitungsband angeregt.

- c) Berechnen Sie die Leitfähigkeit $\sigma_{\text{intrinsisch}}$ des hochreinen Silizium-Kristalls bei Raumtemperatur! Die Beweglichkeit der Elektronen betrage $\mu_n = 1400 \text{ cm}^2 V^{-1} s^{-1}$, die der Löcher $\mu_p = 450 \text{ cm}^2 V^{-1} s^{-1}$. [1P]

$$\sigma = en\mu_n + ep\mu_p = en_i(\mu_n + \mu_p) = 4,45 \cdot 10^{-6} \frac{S}{cm} = 4,45 \cdot 10^{-4} \frac{S}{m}$$

Betrachten Sie nun einen dotierten Silizium-Kristall bei Raumtemperatur. Als Dotand kommt Aluminium zum Einsatz.

- d) Nennen Sie zwei verschiedene Verfahren zur Dotierung eines Halbleiters! [1P]

Dotiertes Czochralski-Verfahren, Zonen-Zieh-Verfahren, Ionenbeschuss, Eindiffusion, ...

- e) In Richtung welcher Bandkante verschiebt sich die Fermi-Energie W_F durch die Aluminium-Dotierung und wo würde diese bei einem Metall liegen? [1P]

Die Fermi-Energie W_F verschiebt sich in Richtung der Valenzbandkante W_V (da Aluminium für eine p-Dotierung sorgt). Bei einem Metall liegt die Fermi-Energie W_F in einem nicht-vollbesetzten Band.

- f) Zeigen Sie, dass bei Raumtemperatur quasi alle Störstellen ionisiert sind! Das Störstellenniveau W_A liegt 0,057 eV oberhalb der Valenzbandkante W_V und die Fermi-Energie W_F liegt 0,55 eV oberhalb der Valenzbandkante W_V . [1,5P]

Laut Aufgabenstellung gilt: $W_A - W_V = 0,057 \text{ eV}$ und $W_F - W_V = 0,55 \text{ eV}$. Daraus folgt: $W_A - W_F = 0,057 \text{ eV} - 0,55 \text{ eV} = -0,493 \text{ eV}$. Unter Beachtung der Besetzungsstatistik für die Dotieratome gilt für den Anteil der ionisierten Akzeptoren:

$$\frac{n_A^-}{n_A} = \frac{1}{1 + 2e^{\left(\frac{W_A - W_F}{k_B T}\right)}} \approx 1$$

- g) Welche Konzentration an Dotieratomen n_A ist ungefähr notwendig, um die Leitfähigkeit $\sigma_{\text{intrinsisch}}$ aus Teilaufgabe c) bei Raumtemperatur um drei Größenordnungen zu steigern? Gehen Sie von Störstellenerschöpfung aus und vernachlässigen Sie den Beitrag von Elektronen zur Leitfähigkeit! [1P]

$$\sigma_{\text{dotiert}} = e(n\mu_n + p\mu_p) \stackrel{!}{=} 10^3 \sigma_{\text{intrinsisch}}$$

Wegen Störstellenerschöpfung und Vernachlässigung der Elektronen folgt:

$$\begin{aligned} en_A \mu_p &\stackrel{!}{=} 10^3 \sigma_{\text{intrinsisch}} \\ n_A &= 10^3 \frac{\sigma_{\text{intrinsisch}}}{e\mu_p} \end{aligned}$$

Mit $\sigma_{\text{intrinsisch}}$ aus Teilaufgabe c) folgt:

$$n_A \approx 6,17 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$$

5. Zustandsdichten [7P]

- a) Beschreiben Sie, was man unter dem Begriff Zustandsdichte versteht! [1P]

Die Zustandsdichte bezieht sich auf eine Dichte pro Energieintervall. Das heißt, die Zustandsdichte gibt an, wie viele erlaubte Zustände in einem System in einem infinitesimalen Gebiet zwischen W und $W + dW$ auftreten. Meist wird die Zustandsdichte auf das Volumen des Systems normiert, d.h. wir haben es mit einer Größe der Einheit Zustände pro Energie und pro Volumen zu tun.

- b) Zeigen Sie, dass die Zustandsdichte $g(W)$ für einen 2D-Kristall ohne Normierung auf die Kristallfläche gleich $\frac{mL^2}{\hbar^2\pi}$ ist! Verwenden Sie dabei die Dispersionsrelation $W = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$! [2,5P]

$$W = \frac{\hbar^2 |\vec{k}|^2}{2m} = \frac{\hbar^2 (k_x^2 + k_y^2)}{2m}$$

$$k_x^2 + k_y^2 = \frac{2mW}{\hbar^2}$$

$$k_R = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}$$

$$F_{\text{Zustand}} = \frac{4\pi^2}{L^2}$$

$$N(W) = \frac{F_{\text{Kreis}}}{F_{\text{Zustand}}} = \frac{\pi k_R^2}{\frac{4\pi^2}{L^2}} = \frac{\pi 2mWL^2}{4\hbar^2\pi^2} = \frac{mWL^2}{2\hbar^2\pi}$$

$$D(W) = \frac{dN(W)}{dW} = \frac{mL^2}{2\hbar^2\pi}$$

$$g(W) = 2D(W) = \frac{mL^2}{\hbar^2\pi}$$

- c) Nennen Sie ein Materialsystem, für welches eine solche 2D-Zustandsdichte näherungsweise gilt? [0,5P]

2D-Kristalle: z.B. Kohlenstoff (Graphen), Bornitrid, Wolframselenid,....

-
- d) Was gibt die Fermi-Dirac-Verteilung an? Für welchen Fall ist die Boltzmann-Näherung gültig? [1P]

Die Fermi-Dirac-Verteilung beschreibt die Besetzungswahrscheinlichkeit eines Zustandes einer bestimmten Energie W in Abhängigkeit von der Temperatur, der Fermienergie und der Energie W . Die Boltzmann-Näherung ist gültig, wenn sich erst im Abstand von einigen $\Delta W = k_B T$ vom Fermi-niveau erlaubte Zustände befinden.

Betrachten Sie nun ein 2D-Materialsystem! Das Leitungsband sei durch die untere Bandkante bei der Energie $W_C = 2,25$ eV begrenzt.

- e) Wie viele Zustände N sind bei Raumtemperatur auf einer quadratischen Kristallfläche der Kantenlänge $L = 10$ cm im Leitungsband besetzt, wenn das Fermi-Niveau bei der Energie $W_F = 2$ eV liegt? Dabei sei die Boltzmann-Näherung gültig. Verwenden Sie die Masse des freien Elektrons! (Hinweis: Sie können die Zustandsdichte aus Teilaufgabe b) verwenden!) [2P]

$$N = \int_{W_C}^{\infty} e^{\frac{-(W-W_F)}{k_B T}} \frac{mL^2}{\hbar^2 \pi} dW$$
$$N = \frac{-mL^2 k_B T}{\hbar^2 \pi} \left[e^{\frac{-(W-W_F)}{k_B T}} \right]_{W_C}^{\infty} = \frac{mL^2 k_B T}{\hbar^2 \pi} e^{\frac{-0,25 \text{ eV}}{k_B T}} \approx 7,2 \cdot 10^{10}$$

6. Halbleiter im Nichtgleichgewicht [7P]

TEIL I: pn-Übergang

- a) Betrachten Sie einen pn-Übergang, der sich zunächst im Gleichgewicht befindet. Die p-Seite sei mit der Akzeptorkonzentration n_A , die n-Seite mit der Donatorkonzentration n_D dotiert. Die Raumladungszone erstrecke sich auf der p-Seite von $-l_p \leq x < 0$ und auf der n-Seite von $0 \leq x < l_n$. Gehen Sie von Ladungsneutralität und konstanter Raumladungsdichte aus, d.h. $n_D l_n = n_A l_p$. Für das Potential auf der p-Seite gelte

$$\Phi(x) = \frac{en_A}{2\epsilon_r\epsilon_0} (x + l_p)^2$$

und für das Potential auf der n-Seite gelte

$$\Phi(x) = -\frac{en_D}{2\epsilon_r\epsilon_0} (l_n - x)^2 + U_D$$

Dabei sei U_D die Diffusionsspannung. Für $\Phi(x = 0)$ setzen Sie Stetigkeit voraus. Bestimmen Sie die Gesamtlänge der Raumladungszone für $n_A = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$, $n_D = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$, $U_D = 0,73 \text{ V}$ und $\epsilon_r = 11,9$! [2P]

Mit den beiden Gleichungen für den Potentialverlauf und der Forderung, dass das Potential bei $x = 0$ stetig sein muss, folgt:

$$\frac{en_A}{2\epsilon_r\epsilon_0} l_p^2 = -\frac{en_D}{2\epsilon_r\epsilon_0} l_n^2 + U_D$$

Löst man $n_D l_n = n_A l_p$ nach l_p auf, quadriert sie, setzt sie anschließend in die eben abgeleitete Beziehung ein und formt nach U_D um, so folgt:

$$l_n^2 \left(\frac{en_A}{2\epsilon_r\epsilon_0} \frac{n_D^2}{n_A^2} + \frac{en_D}{2\epsilon_r\epsilon_0} \right) = U_D$$

Auflösen nach l_n ergibt:

$$l_n = \sqrt{\frac{2\epsilon_r\epsilon_0}{e} U_D \frac{\frac{n_A}{n_D}}{n_D + n_A}}$$

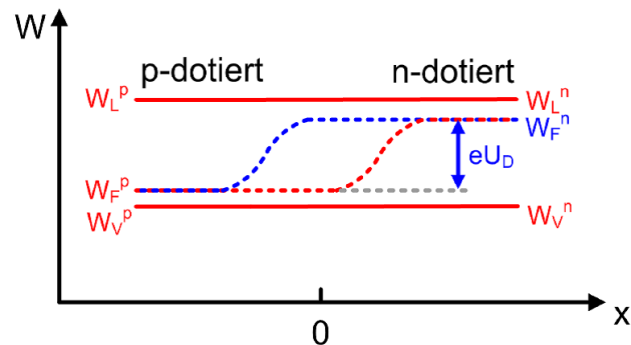
Analog ergibt sich für l_p :

$$l_p = \sqrt{\frac{2\epsilon_r\epsilon_0}{e} U_D \frac{\frac{n_D}{n_A}}{n_D + n_A}}$$

Durch Addition der beiden letzten Gleichungen erhält man die Gesamtlänge der Raumladungszone zu:

$$l = l_p + l_n = \sqrt{\frac{2\epsilon_r\epsilon_0}{e} U_D \left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_D} \right)} \approx 0,98 \text{ } \mu\text{m}$$

- b) Betrachten Sie nun einen pn-Übergang im Nichtgleichgewicht! Skizzieren Sie qualitativ das Banddiagramm unter Anlegen von $U = U_D$ (Diffusionsspannung in Vorwärtsrichtung)! Kennzeichnen Sie das Leitungs- und Valenzband sowie die Quasi-Fermi-Niveaus! [2P]



TEIL II: Halbleiter unter Beleuchtung

- c) Ein stark p-dotierter Halbleiter wird bei Raumtemperatur gemäß Abbildung 4 konstant beleuchtet. Im gesamten Halbleiter werden Elektron-Loch-Paare durch die Beleuchtung homogen mit einer Rate von g_L erzeugt. Gleichzeitig rekombinieren die Ladungsträgerpaare mit einer Rate von $\Delta n/\tau_n$. Es sei kein äußeres elektrisches Feld angelegt und es gelte $\Delta n(t \leq 0) = g_L \tau_n$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird schlagartig die Beleuchtung abgeschaltet. Berechnen Sie unter Angabe aller nötigen Zwischenschritte den zeitlichen Verlauf der Überschussladungsträgerdichte $\Delta n(t)$ für $t > 0$! [3P]

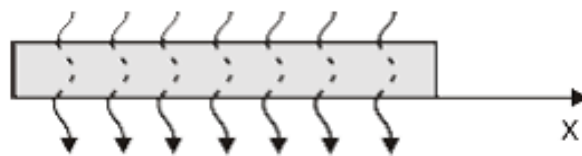


Abbildung 4

Laut Aufgabenstellung gilt $E(x) = 0$, $\frac{\partial \Delta n}{\partial x} = 0$ und $\Delta n(t = 0) = g_L \tau_n$. Für $t > 0$ gilt zudem die Randbedingung $g_L = 0$, da nicht mehr beleuchtet wird. Somit liegt die Kontinuitätsgleichung in Form einer homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten vor:

$$\frac{\partial \Delta n}{\partial t} = -\frac{\Delta n}{\tau_n}$$

$$\frac{\partial \Delta n}{\partial t} + \frac{\Delta n}{\tau_n} = 0$$

Das charakteristische Polynom ergibt sich zu:

$$\lambda + \frac{1}{\tau_n} = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{\tau_n}$$

Das Fundamentalsystem lautet dann:

$$e^{\lambda t} = e^{-\frac{1}{\tau_n} t}$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist also:

$$\Delta n(t) = A e^{-\frac{1}{\tau_n} t}$$

Mit der Randbedingung $\Delta n(t=0) = g_L \tau_n$ folgt für A :

$$A = g_L \tau_n$$

Lösung für $t > 0$:

$$\Delta n(t) = g_L \tau_n e^{-\frac{1}{\tau_n} t}$$

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$=$	$6,63 \cdot 10^{-34}$	Js
	$\hbar$	$=$	$\frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	N_A	$=$	$6,02 \cdot 10^{23}$	mol ⁻¹
Bohr'scher Radius	a_0	$=$	$5,29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$=$	$1,6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	$=$	$1,66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$=$	$9,11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$=$	$1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$=$	$1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$=$	$8,85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	$=$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$=$	$3,0 \cdot 10^8$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	$=$	$1,38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	π	$=$	3,14	
Euler'sche Zahl	e	$=$	2,72	
Imaginäre Einheit	j	$=$	$\sqrt{-1}$	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit → Kilogramm	$1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenvolt → Joule	$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Formeln und Integrale (Bitte beachten Sie auch die Rückseite!)

$$\exp(jkx) + \exp(-jkx) = 2 \cos(kx)$$

$$\exp(jkx) - \exp(-jkx) = 2j \sin(kx)$$

$$\begin{aligned}\int (\sin ax)^2 dx &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax \\ \int (\cos ax)^2 dx &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax \\ \int \sin ax \cos ax dx &= \frac{1}{2a} (\sin ax)^2 \\ \int x (\sin ax)^2 dx &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x \sin 2ax - \frac{1}{8a^2} \cos 2ax\end{aligned}$$

Fortsetzung umseitig!

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a^2} \\
\int x^2 e^{ax} dx &= e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) & \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx &= \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a > 0, n = 0, 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

13 III. Hauptgruppe	14 IV. Hauptgruppe	15 V. Hauptgruppe
5 10,81 2,0 B Bor	6 12,01 2,5 C Kohlenstoff	7 14,007 3,0 N Stickstoff
13 26,98 1,5 Al Aluminium	14 28,09 1,8 Si Silicium	15 30,97 2,1 P Phosphor
31 69,72 1,6 Ga Gallium	32 72,59 1,8 Ge Germanium	33 74,92 2,0 As Arsen
49 114,82 1,7 In Indium	50 118,69 1,8 Sn Zinn	51 121,75 1,9 Sb Antimon
81 204,38 1,8 Tl Thallium	82 207,2 1,8 Pb Blei	83 208,98 1,9 Bi Bismut