

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

E-Mail-Adresse:

Erreichte Punktzahl:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							
Max	7	10	8	10	9	8	52

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 DIN A4 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 52, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 26.
- Eckige Klammern am Aufgabenende geben die maximal erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe an.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf vom KIT bereitgestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Begründungen, Erklärungen und ähnliches können in Stichworten verfasst werden.
- Sofern nicht anders angegeben, ist der Rechenweg nachvollziehbar darzustellen.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. Das Elektron [7P]

- a) In einem Elektronenmikroskop werden Elektronen mit einer de-Broglie Wellenlänge von $\lambda = 5 \cdot 10^{-11}$ m verwendet. Welche kinetische Energie besitzt ein einzelnes Elektron? Die nicht-relativistische Näherung sei gültig! [1P]

$$E = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2}{2m_e} = 0,0965 \text{ fJ} = 603 \text{ eV}$$

- b) Erläutern Sie das Prinzip der „Dispersion“ anhand des freien quantenmechanischen Elektrons! Welche Konsequenz hat das für das Wellenpaket des Elektrons? [1P]

Die Dispersion beschreibt einen Zusammenhang zwischen dem Wellenvektor und der Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle. Im Falle eines freien Elektrons, das als Wellenpaket aus Wellen mit unterschiedlichen Wellenvektoren beschrieben werden kann, führt die Dispersion zu einem Zerlaufen des Wellenpaketes.

Die Wellenfunktion für freie Elektronen im Vakuum sei eine ebene Welle:

$$\psi(x,t) = Ae^{j(kx-\omega t)}$$

mit

$$A \neq 0$$

- c) Leiten Sie die Dispersionsrelation für freie Elektronen aus der **zeitabhängigen Schrödingergleichung** her! [2P]

$$j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t) \right) \psi(x,t)$$

Der Begriff freies Teilchen aus der Aufgabenstellung impliziert $V(x,t) = 0$.

$$\begin{aligned} j\hbar \frac{\partial}{\partial t} Ae^{j(kx-\omega t)} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Ae^{j(kx-\omega t)} \\ j\hbar (-j\omega) Ae^{j(kx-\omega t)} &= -\frac{\hbar^2}{2m} (jk)^2 Ae^{j(kx-\omega t)} \\ \hbar\omega Ae^{j(kx-\omega t)} &= \frac{\hbar^2 k^2}{2m} Ae^{j(kx-\omega t)} \\ \left(\hbar\omega - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) Ae^{j(kx-\omega t)} &= 0 \end{aligned}$$

Diese Beziehung muss für alle Zeiten t und Orte x erfüllt sein. Für die gesuchten Lösungen muss dann für die Parameter ω und k der Term in der Klammer verschwinden. Daraus folgt:

$$W(k) = \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

bzw.

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

- d) Leiten Sie die Phasengeschwindigkeit v_P für ein freies Elektron im Vakuum her! Beginnen Sie mit der Betrachtung eines Punktes zeitlich konstanter Phase und setzen Sie am Ende der Rechnung Ihr Ergebnis aus c) ein! [1,5P]

$$\frac{\partial}{\partial t} (kx - \omega t) = 0$$

$$kv_P - \omega = 0$$

$$v_P = \frac{\omega}{k}$$

$$v_P = \frac{\hbar k}{2m}$$

- e) Geben Sie die Definition für die Gruppengeschwindigkeit v_G des freien Elektrons an und berechnen Sie diese! Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit seiner Phasengeschwindigkeit v_P ! [1,5P]

$$v_G = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} \frac{\hbar k^2}{2m} = \frac{\hbar k}{m} = 2v_P$$

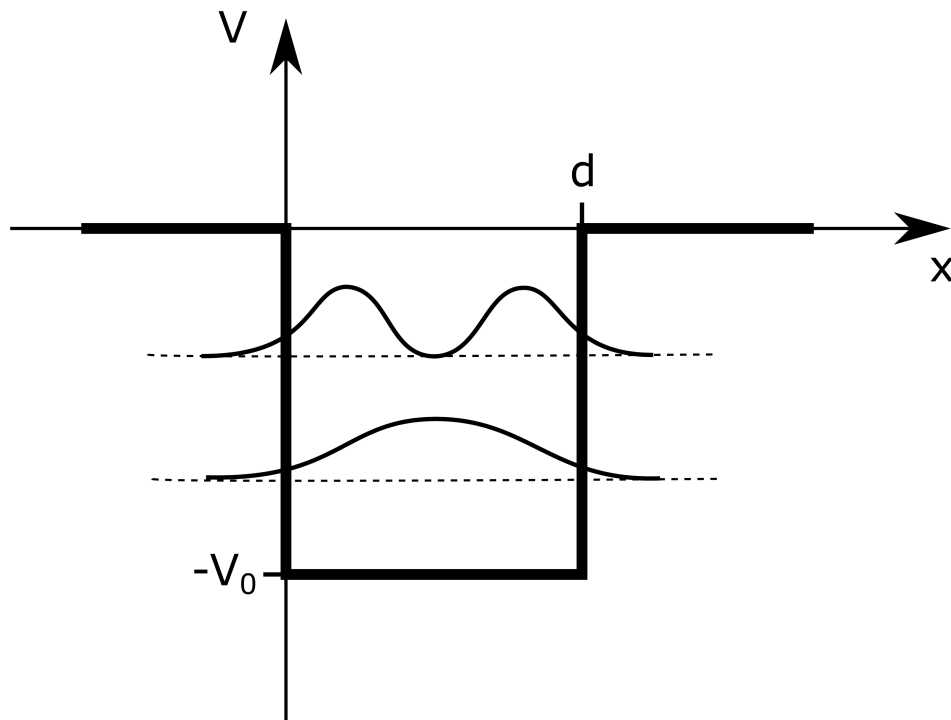
2. Endlicher Potentialtopf [10P]

Gegeben sei folgendes Potential $V(x)$:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \text{ (Bereich 1)} \\ -V_0 & \text{für } 0 \leq x \leq d \text{ (Bereich 2)} \\ 0 & \text{für } d < x \text{ (Bereich 3)} \end{cases}$$

mit $V_0 > 0$ und $d > 0$.

- a) Skizzieren Sie das gegebene Potential $V(x)$! Achten Sie auf eine korrekte Achsenbeschriftung! [0,5P]



- b) Skizzieren Sie im selben Diagramm die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichten für Elektronen der niedrigsten zwei gebundenen Zustände mit $W < 0$! Zeichnen Sie jeweils eine gestrichelte Linie ein, welche eine Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte von 0 markiert! [1,5P]
- c) Worin unterscheiden sich die Wellenfunktionen von Elektronen in Eigenzuständen mit Energien $W < 0$ und $W > 0$ bezüglich ihrer Anzahl und ihrer Form? Welche Besonderheit ergibt sich im Vergleich zu einem unendlichen Potentialtopf für

die gebundenen Zustände innerhalb der Barriere und wie bezeichnet man den resultierenden Effekt? [1,5P]

$W > 0$: unendlich ausgedehnte ebene Welle zu jeder Energie

$W < 0$: Linearkombination ebener Wellen im Topf und exp. Abfall in der Barriere; diskrete Zustände

Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist > 0 in der Barriere; Tunneleffekt

In den folgenden Aufgaben betrachten wir lediglich die gebundenen Zustände, also den Fall $W < 0$.

- d) Stellen Sie allgemeine Lösungsansätze für die Wellenfunktionen $\psi_i(x)$ in jedem Bereich ($i = 1, 2, 3$) auf und geben Sie die Randbedingungen für die Lösungen des Problems an! [1,5P]

Ansatz für Wellenfunktion:

Bereich 1: $\psi_1(x) = Ae^{jk_1x} + Be^{-jk_1x}$

Bereich 2: $\psi_2(x) = Ce^{jk_2x} + De^{-jk_2x}$

Bereich 3: $\psi_3(x) = Ee^{jk_3x} + Fe^{-jk_3x}$

Randbedingungen:

(I): $\psi_1(x=0) = \psi_2(x=0)$

(II): $\psi'_1(x=0) = \psi'_2(x=0)$

(III): $\psi_2(x=d) = \psi_3(x=d)$

(IV): $\psi'_2(x=d) = \psi'_3(x=d)$

- e) Bestimmen Sie die Wellenzahlen k_i ($i = 1, 2, 3$) in den Bereichen 1 bis 3! [1,5P]

Einsetzen der Wellenfunktionen in die stationäre Schr.Gl. und umformen ergibt jeweils:

$$W\psi_i = \left(\frac{-\hbar^2}{2m}(-k_i^2) + V \right) \psi_i$$

$$k_i = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (W - V)}$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{2m(W + V_0)}{\hbar^2}}$$

$$k_3 = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}$$

- f) Setzen Sie die Wellenzahlen aus Aufgabe e) in die Lösungsansätze aus Aufgabe d) ein! Wie ändern sich dadurch die Ansätze? [1,5P]

Da $W < 0$ wird k in Bereich 1 und 3 komplex:

$$k_1 = k_3 = j\sqrt{\frac{-2mW}{\hbar^2}} = j\kappa$$

Die Exponenten der Wellenfunktionen in den Bereichen 1 und 3 werden daher reell:

$$\text{Bereich 1: } \psi_1(x) = Ae^{-\kappa_1 x} + Be^{\kappa_1 x}$$

$$\text{Bereich 2: } \psi_2(x) = Ce^{jk_2 x} + De^{-jk_2 x}$$

$$\text{Bereich 3: } \psi_3(x) = Ee^{-\kappa_3 x} + Fe^{\kappa_3 x}$$

A und F müssen 0 sein damit die Funktionen in der Barriere abfallen:

$$\text{Bereich 1: } \psi_1(x) = Be^{\kappa_1 x}$$

$$\text{Bereich 2: } \psi_2(x) = Ce^{jk_2 x} + De^{-jk_2 x}$$

$$\text{Bereich 3: } \psi_3(x) = Ee^{-\kappa_3 x}$$

- g) Das Potential im Bereich 1 sei nun $V(x < 0) = -V_0$. Damit betrachten wir eine Potentialstufe der Höhe V_0 an der Stelle $x = d$. Welche Energie $W < 0$ benötigt ein von links auf die Potentialstufe eintreffendes Elektron mindestens, damit seine Aufenthaltswahrscheinlichkeit 1 Å innerhalb der Stufe (also bei $x = d + 1\text{Å}$) mindestens 50% der Aufenthaltswahrscheinlichkeit am Rand der Stufe ($x = d$) entspricht? [2P]

$$\frac{|\psi_3(x)|^2}{|\psi_3(d)|^2} = 0,5$$

$$\frac{|Ee^{-\kappa x}|^2}{|Ee^{-\kappa d}|^2} = 0,5$$

$$e^{2\kappa(d-x)} = 0,5$$

$$2\kappa(d-x) = \ln(0,5) = \ln(2^{-1}) = -\ln(2)$$

$$\kappa = \frac{-\ln(2)}{2(d-x)}$$

für κ den Wurzelterm einsetzen und nach W umformen:

$$\sqrt{\frac{-2mW}{\hbar^2}} = \frac{-\ln(2)}{2(d-x)}$$

$$W = \frac{\hbar^2}{-2m} \left(\frac{-\ln(2)}{2(d-x)} \right)^2$$

$$W = \frac{(1,0546 \cdot 10^{-34})^2}{-2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}} \left(\frac{-\ln(2)}{-2 \cdot 10^{-10}} \right)^2 \frac{J^2 \cdot s^2}{kg \cdot m^2}$$

$$W = -7,332 \cdot 10^{-20} J = -0,458 eV$$

3. Kristalle [8P]

- a) Was versteht man unter dem Begriff „Einheitszelle“? [0,5P]

Die Einheitszelle ist eine kleine Einheit eines Kristalls, die benutzt werden kann, um den kompletten Kristall zu reproduzieren.

- b) Geben Sie den Abstand zwischen zwei nächsten Nachbaratomen in einem einfachen kubischen Gitter als Vielfaches der Gitterkonstante a an. [0,5P]

Richtige Antwort: 1

- c) Was versteht man unter dem Begriff „Basis eines Kristallgitters“? [0,5P]

Die Basis einer Kristallstruktur besteht aus Atomen, Ionen oder Molekülen (auch einzelnes Atom möglich). Sie stellt die kleinste Gruppe dieser Elemente dar, die sich periodisch im dreidimensionalen Raum deckungsgleich an den Punkten des Kristallgitters wiederholt. Gemeinsam mit dem Kristallgitter bildet die Basis den eigentlichen Kristall: Gitter + Basis = Kristall.

- d) Wie viele Atome befinden sich in der Einheitszelle eines kubisch-flächenzentrierten (fcc) Kristallgitters mit einatomiger Basis? [0,5P]

$$\text{Anzahl Atome} = 8 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

- e) Silber kristallisiert in einem fcc-Gitter mit einatomiger Basis und hat eine Dichte von $10,49 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ und eine molare Masse von $107,87 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$. Zeichnen Sie die Gitterpunkte des Kristalls in die vorgegebene Zeichnung ein und berechnen Sie die Gitterkonstante a ! [1,5P]

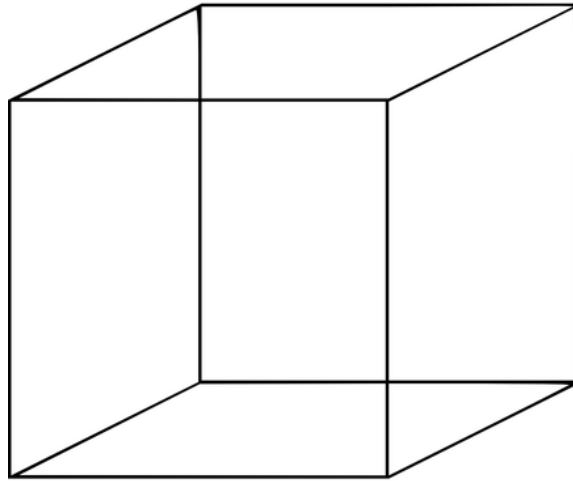


Abbildung 1: Vorlage für fcc-Gitter

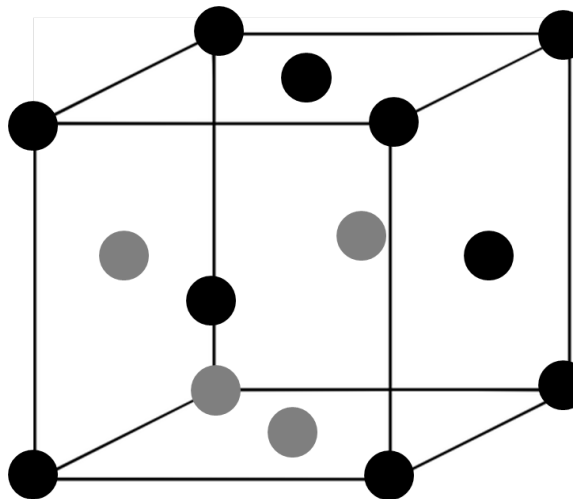


Abbildung 2: fcc-Gitter

Mit einer einatomigen Basis beträgt die Gitterkonstante a :

$$a = \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot M \cdot \frac{1}{N_A}}{\rho}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 107,87 \frac{g}{mol} \cdot \frac{1}{6,02 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}}}{10,49 \frac{g}{cm^3}}} \approx 4,09 \cdot 10^{-8} cm = 0,409 nm$$

- f) Erklären Sie mithilfe des Ergebnisses aus e), warum eine Kristallstruktur nicht unter einem Lichtmikroskop analysiert werden kann! [0,5P]

Die Wellenlänge eines Photons im Lichtmikroskop ist viel zu groß ($5 \cdot 10^{-7} nm$), um Strukturen mit Gitterkonstanten aus e) ($5 \cdot 10^{-10} nm$) zu detektieren, da Auflösungslimit $d \approx \frac{\lambda}{2}$.

Zur Bestimmung der Kristallstruktur wird ein Beugungs-Experiment mittels Röntgenstrahlung durchgeführt.

- g) Wie lautet dabei die Braggsche Beugungsbedingung? Erklären Sie die darin verwendeten Parameter! [1P]

$$2d\sin\theta = n\lambda$$

d : Abstand zweier Kristallebenen

θ : Einfallswinkel der Röntgenstrahlung

λ : Wellenlänge der Röntgenstrahlung

n : ganze Zahlen 1,2,3,...

Die periodische Anordnung der Atome in Kristallen führt zur Ausbildung von sogenannten Energiebändern. In Abbildung 3 ist die eindimensionale Bandstruktur zweier Halbleiter schematisch dargestellt.

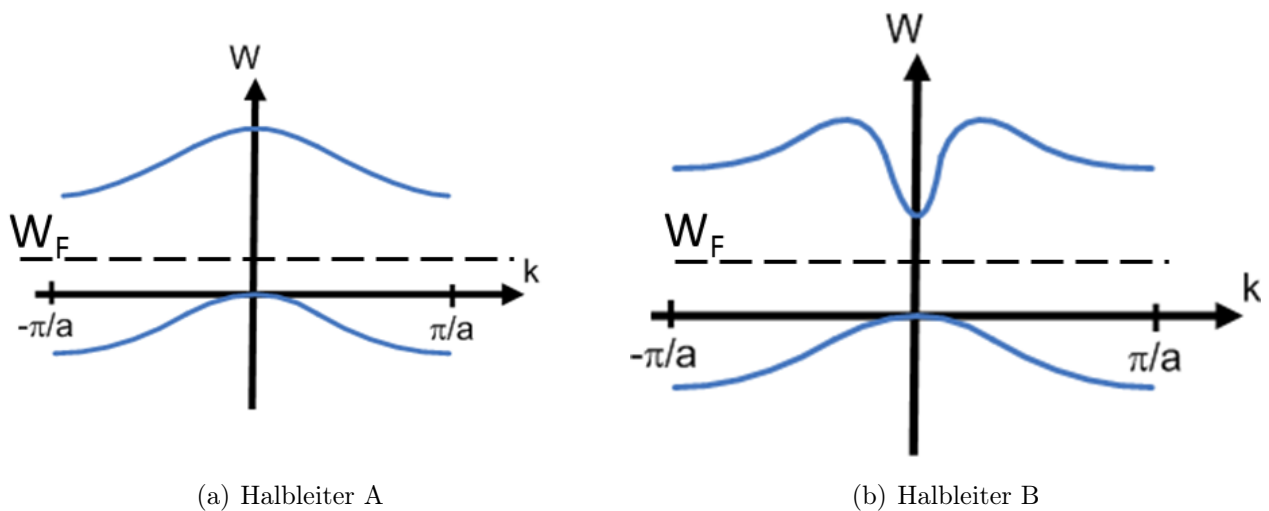


Abbildung 3: Eindimensionale schematische Darstellung der Bandstrukturen zweier Halbleiter.

- h) Beschriften Sie in der Abbildungen 3(a) und 3(b) jeweils Valenzband und Leitungsband! [1P]

siehe Zeichnung

- i) Tragen Sie in die Abbildungen 3(a) und 3(b) jeweils die Energie der Bandlücke W_g ein. Geben Sie jeweils an, ob es sich um einen direkten oder indirekten Halbleiter handelt! [2P]

siehe Zeichnung

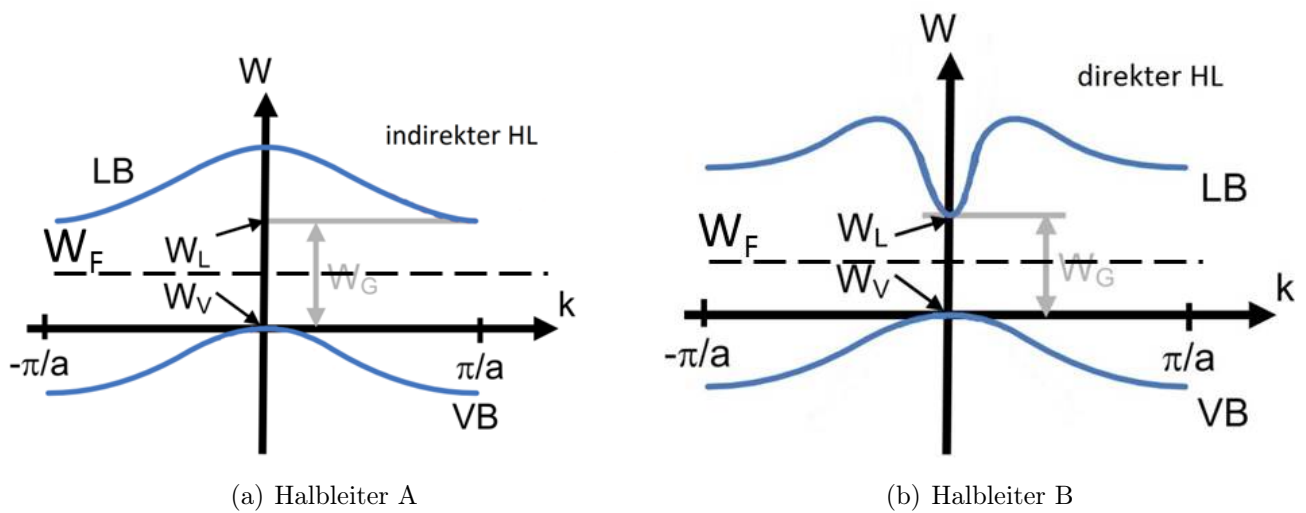


Abbildung 4: Lösung: Eindimensionale schematische Darstellung der Bandstrukturen zweier Halbleiter.

4. Zustandsdichte und Fermi-Dirac-Verteilung [10P]

- a) Beschreiben Sie, was man unter dem Begriff „Zustandsdichte“ versteht! [1P]

Die Zustandsdichte bezieht sich auf eine Dichte pro Energieintervall. Das heißt, die Zustandsdichte gibt an, wie viele erlaubte Zustände in einem System in einem infinitesimalen Gebiet zwischen W und $W + dW$ auftreten. Meist wird die Zustandsdichte auf das Volumen des Systems normiert, d.h. wir haben es mit einer Größe der Einheit Zustände pro Energie und pro Volumen zu tun.

- b) Leiten Sie die Zustandsdichte $g_{1D}(W)$ für einen eindimensionalen Quantendraht der Länge L her! Die parabolische Näherung für das Leitungsband sei gültig. Gehen Sie von einem eindimensionalen k -Raum aus! [3P]

$$W = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$k^2 = \frac{2mW}{\hbar^2}$$

$$k_R = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}$$

Länge eines Zustandes auf der k -Achse: $\frac{2\pi}{L}$

$$N(W) = \frac{L_{\text{Strecke}}}{L_{\text{Zustand}}} = \frac{2k_R}{\frac{2\pi}{L}} = \frac{\sqrt{2mW}L}{\hbar\pi}$$

$$D(W) = \frac{dN(W)}{dW} = \frac{\sqrt{m}L}{\hbar\pi\sqrt{2W}}$$

$$g(W) = 2\frac{1}{L}D(W) = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar\pi} \frac{1}{\sqrt{W}}$$

- c) Die Leitungsbandkante W_L in einem zweidimensionalen Halbleiter liege bei 1 eV. Die Zustandsdichte im Leitungsband eines zweidimensionalen Halbleiters lautet

$$g(W)_{2D} = \frac{m}{\pi\hbar^2} \sum_n \theta(W - W_n) \quad n \in \mathbb{N}^+$$

mit

$$W_n = n^2 \cdot W_L$$

und

$$\theta(W - W_n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } W - W_n \geq 0 \\ 0 & \text{wenn } W - W_n < 0 \end{cases}$$

Wir betrachten nun den Energiebereich zwischen $5,49 \cdot W_L$ und $5,51 \cdot W_L$. Welche

Fläche muss der Halbleiter haben, damit es im genannten Energiebereich mindestens $1,69 \cdot 10^{11}$ Zustände gibt? Es gelte $m = m_e$. [3P]

$$\text{Zustandsdichte} = \frac{\text{Anzahl der Zustände}}{\text{Energieintervall} \cdot \text{Fläche}}$$

$$\text{Fläche} = \frac{\text{Anzahl der Zustände}}{\text{Energieintervall} \cdot \text{Zustandsdichte}}$$

$$g(\approx 5,5 \cdot W_L)_{2D} = \frac{2m}{\pi \hbar^2} = 5,26 \cdot 10^{37} \frac{1}{Jm^2} \text{ (wegen Heavisidefunktion!)}$$

Energieintervall:

$$0,02eV = 3,2 \cdot 10^{-21} J$$

$$\text{Fläche des Kristalls} \geq \frac{1,69 \cdot 10^{11}}{3,2 \cdot 10^{-21} J \cdot 5,26 \cdot 10^{37} \frac{1}{Jm^2}} \approx 10^{-6} m^2 = 1 mm^2$$

- d) Wie lautet die Formel für die Fermi-Dirac-Verteilung $f_{FD}(W,T)$ und was beschreibt diese? [1P]

$$f_{FD}(W,T) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{W-W_F}{k_B T}\right)}$$

Die Fermi-Dirac-Verteilung beschreibt die Besetzungswahrscheinlichkeit eines Zustandes einer bestimmten Energie W in Abhängigkeit von der Temperatur, der Fermienergie und der Energie W .

- e) In welchem Fall kann statt der Fermi-Dirac-Funktion die Boltzmann-Verteilung verwendet werden? [0,5P]

Die Boltzmann-Näherung ist gültig für $W - W_F \gg k_B T$.

- f) Wir gehen nun von einem intrinsischen dreidimensionalen Halbleiter mit gleichen effektiven Massen für Elektronen und Löcher bei Raumtemperatur aus. Zeichnen Sie folgende Zusammenhänge in die dafür vorgesehenen Schaubilder in Abbildung 5: [1,5P]

- Energie über der Zustandsdichte für Elektronen und Löcher $g_L(W)$ und $g_V(W)$

- Energie über Fermi-Dirac-Verteilung $f_{FD}(W)$
- Energie über Ladungsträgerdichte $n(W)$ und $p(W)$

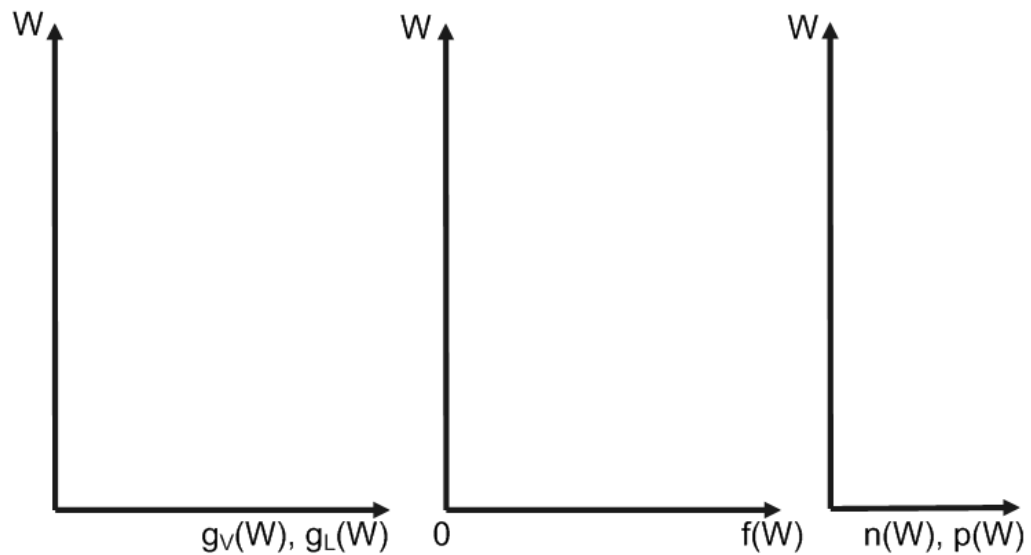


Abbildung 5: Energie über Zustandsdichte, Fermi-Dirac-Verteilung und Ladungsträgerdichte

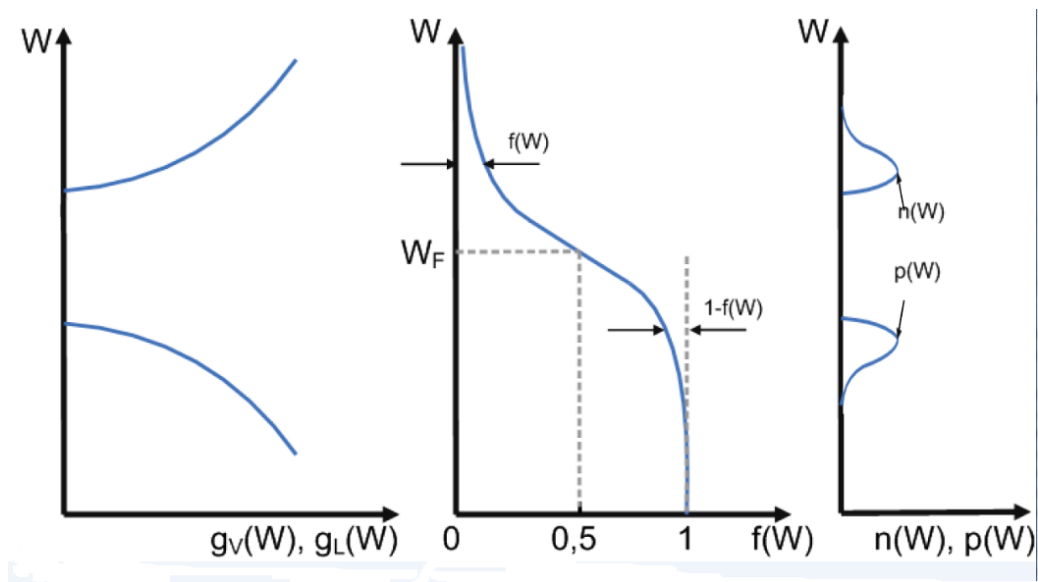


Abbildung 6: Energie über Zustandsdichte, Fermi-Dirac-Verteilung und Ladungsträgerdichte

5. Intrinsische und dotierte Halbleiter [9P]

- a) Berechnen Sie die intrinsische Ladungsträgerkonzentration von Germanium bei einer Temperatur von $300K$. Die effektiven Zustandsdichten für das Leitungs- und Valenzband sind $N_L = 1,5 \cdot 10^{19} cm^{-3}$ und $N_V = 6 \cdot 10^{18} cm^{-3}$ (Hinweis: Germanium absorbiert Licht bis zu einer Wellenlänge von $\lambda = 1,88\mu m$). [1,5P]

Die intrinsische Ladungsträgerkonzentration berechnet sich zu:

$$n_i = \sqrt{N_V N_L} \cdot e^{-\frac{W_g}{2k_B T}}$$

Mit der Absorptionskante bei $\lambda = 1,88\mu m$ kann die Bandlücke berechnet werden:

$$n_i = \sqrt{N_V N_L} \cdot e^{-\frac{h \cdot c}{2k_B T \lambda}}$$

$$n_i = \sqrt{1,5 \cdot 10^{19} \cdot 6 \cdot 10^{18}} \cdot e^{-\frac{h \cdot c}{2k_B \cdot 300K \cdot 1,88 \cdot 10^{-6} m}}$$

$$n_i = 2,7 \cdot 10^{13} cm^{-3}$$

- b) Germanium kristallisiert wie Silizium in der Diamantstruktur und hat demnach 8 Atome pro Einheitszelle. Die Gitterkonstante beträgt $5,66 \text{ \AA}$. Verwenden Sie die berechnete Eigenleitungsträgerdichte aus Aufgabe a)! Wie hoch darf der relative Anteil von Fremdatomen zu Germanium Atomen höchstens sein, damit die Eigenleitung den Ladungstransport dominiert? [1P]

Die Konzentration der Germanium-Atome berechnet sich zu:

$$\frac{8}{(5,66 \cdot 10^{-8} cm)^3} = 4,4 \cdot 10^{22} \text{ Ge-Atome/cm}^3$$

Damit die Eigenleitung den Ladungstransport dominiert muss die Fremdatomdichte kleiner sein als die intrinsische Ladungsträgerkonzentration n_i .

Der maximale relative Anteil von Fremdatomen zu Germanium-Atomen ist demnach:

$$\frac{2,7 \cdot 10^{13} cm^{-3}}{4,4 \cdot 10^{22} cm^{-3}} = 0,61 \cdot 10^{-9}$$

- c) Nennen Sie zwei Dotierelemente, die prinzipiell als Akzeptoren in den Germaniumkristall eingebracht werden können! Wie nennt man diese Form der Dotierung?[1P]

B, Al, Ga, In, Tl

p-Dotierung

- d) In Abbildung 7 sind Lochkonzentrationen p in Abhängigkeit der Temperatur abgebildet. Ordnen Sie die beiden Kurven einem intrinsischen und einem dotierten Halbleiter zu und unterteilen Sie den Verlauf in drei signifikante Bereiche! Beschriften Sie diese! [2,5P]

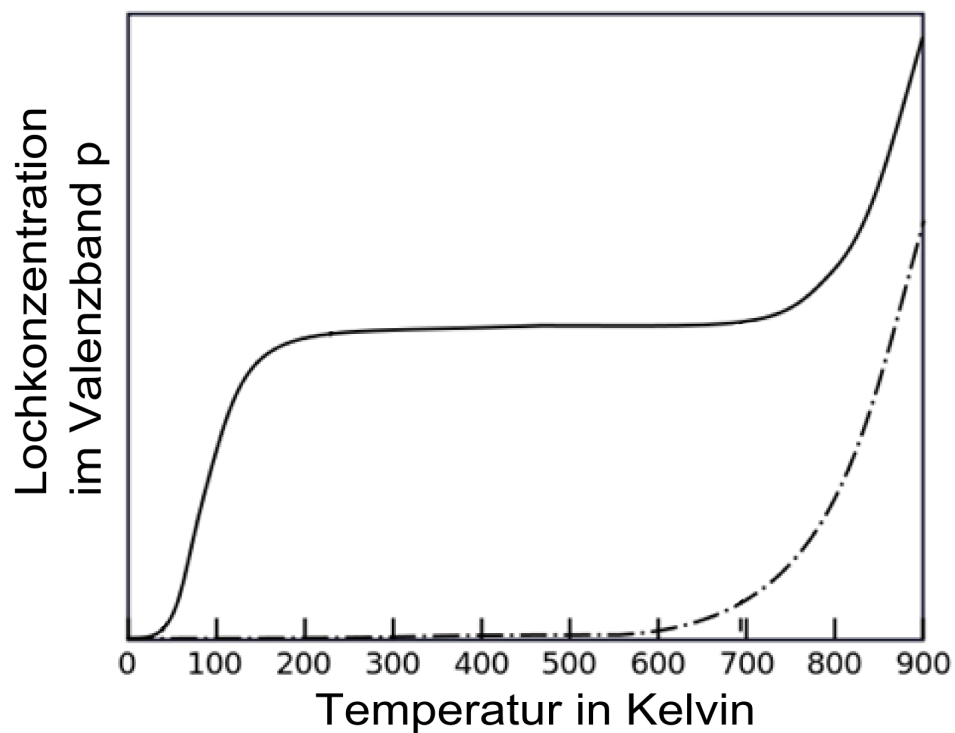


Abbildung 7: Lochkonzentrationen im Valenzband in Abhängigkeit von der Temperatur

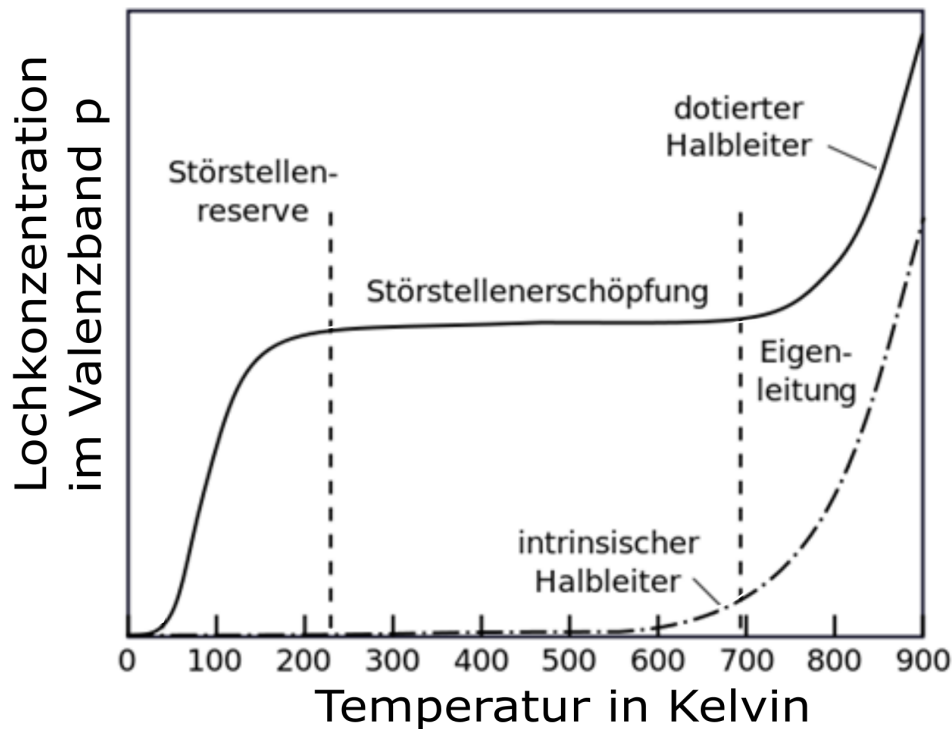


Abbildung 8

- e) Betrachten Sie nun einen mit Akzeptoren dotierten Ge-Kristall mit einer Akzeptorenkonzentration von $n_A = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ bei einer Temperatur von 300 K . Die Ionisierungsenergie des Akzeptors im Germanium liegt bei 10 meV . Alle Akzeptoren seien ionisiert. Berechnen Sie die Lage des Fermi-niveaus W_F relativ zum Akzeptor-niveau W_A und zum Valenzband W_V und geben Sie diese jeweils in eV an! [2P]

Aufgrund der p-Dotierung und Störstellenerschöpfung entspricht die Lochkonzentration der Akzeptorenkonzentration:

$$p = p_0 + n_A^- = p_0 + n_A \sim n_A$$

Damit kann man die Formel für die Lochkonzentration n_A gleich setzen und nach $W_F - W_V$ umstellen:

$$p = N_V \cdot e^{-\frac{W_F - W_V}{k_B T}} = n_A$$

$$W_F - W_V = -k_B T \ln(n_A / N_V) = 0,225 \text{ eV}$$

$W_F - W_A$ berechnet sich durch Beachtung der Ionisierungsenergie $W_A - W_V = 10 \text{ meV}$ zu:

$$W_F - W_A = W_F - W_V + (W_V - W_A) = 0,225 \text{ eV} - 0,01 \text{ eV} = 0,215 \text{ eV}$$

- f) Berechnen Sie die Leitfähigkeit des dotierten Halbleiters! Die Beweglichkeit der Löcher und Elektronen ist jeweils $\mu_p = 10^3 \frac{cm^2}{Vs}$ und $\mu_e = 4 \cdot 10^3 \frac{cm^2}{Vs}$. [1P]

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p)$$

Da p-dotiert kann der Beitrag der Elektronen vernachlässigt werden.

$$\sigma = ep\mu_p$$

$$\sigma = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{15} \cdot 10^3 \frac{A}{V \cdot cm} = 0,16 \frac{A}{V \cdot cm} = 16 \frac{A}{V \cdot m}$$

Falls der Beitrag der Elektronen nicht vernachlässigt wird, muss die Elektronenkonzentration über das Massenwirkungsgesetz berechnet werden:

$$n_i^2 = n \cdot p$$

$$n = \frac{n_i^2}{p} = \frac{2,7^2 \cdot 10^{26}}{10^{15}} cm^{-3} = 7,29 \cdot 10^{11} cm^{-3}$$

Daraus berechnet sich dann die Leitfähigkeit zu:

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p) = 1,6 \cdot 10^{-19} (10^{15} \cdot 10^3 + 7,29 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^3) \frac{A}{V \cdot cm}$$

$$\sigma = 0,16047 \frac{A}{V \cdot cm} = 16,047 \frac{A}{V \cdot m}$$

Anhand dieser Rechnung wird nochmal deutlich, dass man den Beitrag der Elektronen vernachlässigen kann.

6. pn-Übergang [8P]

- a) In einem Gedankenexperiment bringt man einen n- und einen p-dotierten Halbleiter in Kontakt. Erläutern Sie, was dabei passiert! Beziehen Sie sich auf die Bewegung der Ladungsträger und die Fermienergie vor und nach der Kontaktierung! [1,5P]

Die Fermienergie im n- und p-dotierten Halbleiter unterscheiden sich aufgrund der Dotierung. Im n-Halbleiter liegt es näher am Leitungsband und im p-Halbleiter näher am Valenzband. Dieser Unterschied ist gleichbedeutend mit einer unterschiedlichen Elektronen- bzw. Lochkonzentration in den beiden Halbleitern. Wenn man diese in Kontakt bringt, führt der Konzentrationsgradient zu einem Diffusionsstrom von Elektronen in den p-Halbleiter und Löchern in den n-Halbleiter. Die zurückbleibenden entgegengesätzlich geladenen Atomrümpfe erzeugen ein elektrisches Feld, welches einen dem Diffusionsstrom entgegenwirkenden Driftstrom zur Folge hat. Wenn sich diese beiden Ströme gerade aufheben, befindet sich der pn-Übergang im Gleichgewicht. Die Fermienergie ist dann im gesamten Halbleiter konstant.

Wir betrachten nun einen **linearen** pn-Übergang, wie er in Abbildung 9 schematisch dargestellt ist. Dabei ändert sich die Dotierung von n-Dotierung nach p-Dotierung nicht abrupt, sondern linear über eine Distanz d . Die Raumladungszone (RLZ) erstreckt sich von $-L/2$ bis $+L/2$ und liegt innerhalb dieses linearen Verlaufs ($L < d$). Die Ladungsdichte $\rho(x)$ in der RLZ lautet:

$$\rho(x) = e \cdot a \cdot x ,$$

mit der Elementarladung e und dem Dotiergradienten a .

- b) Berechnen Sie den Verlauf des elektrischen Feldes $E(x)$ in der RLZ! Berechnen Sie zudem das Minimum (Maximum des Betrags) des elektrischen Feldes! [1,5P]

Es gilt:

$$\frac{dE(x)}{dx} = \frac{\rho(x)}{\epsilon}$$

Das elektrische Feld lässt sich berechnen indem man über die Ladungsdichte integriert:

$$E(x) = \frac{1}{\epsilon} \int_{-L/2}^x \rho(x) dx = \frac{e \cdot a}{\epsilon} \int_{-L/2}^x x dx$$
$$E(x) = \frac{e \cdot a}{\epsilon} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-L/2}^x = \frac{e \cdot a}{\epsilon} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{L^2}{8} \right)$$

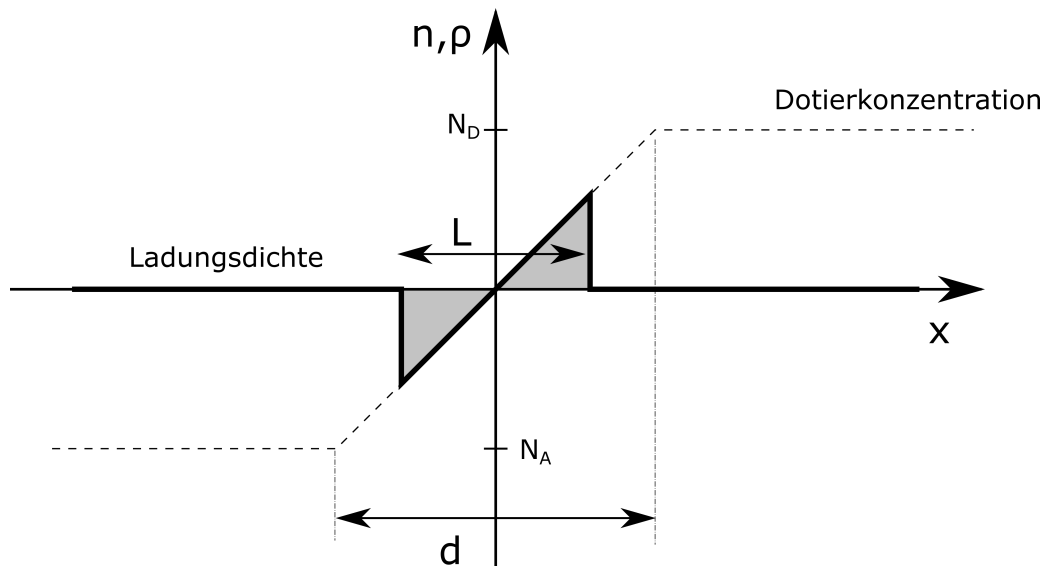


Abbildung 9: Dotierkonzentration (gestrichelte Linie) und Ladungsdichte (durchgehende Linie) eines linearen pn-Übergangs. Die Raumladungszone (eingegrauter Bereich) liegt innerhalb des linearen Verlaufs der Dotierkonzentration.

Das elektrische Feld hat sein Minimum bei $x=0$:

$$E(x=0) = \frac{-e \cdot a \cdot L^2}{8\epsilon}$$

- c) Berechnen Sie aus dem elektrischen Feld $E(x)$ die Potentialdifferenz $\Delta\phi$ zwischen Anfang und Ende der RLZ! Leiten Sie dann einen Ausdruck für die Breite der RLZ L in Abhängigkeit der Potentialdifferenz $\Delta\phi$ her! [2P]

Es gilt:

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = -E(x)$$

Die Potentialdifferenz $\Delta\phi$ lässt sich berechnen indem man $E(x)$ über die RLZ integriert:

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= - \int_{-L/2}^{+L/2} E(x) dx = \frac{-e \cdot a}{\epsilon} \int_{-L/2}^{+L/2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{L^2}{8} \right) dx \\ \Delta\phi &= \frac{-e \cdot a}{\epsilon} \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x \cdot L^2}{8} \right]_{-L/2}^{+L/2} \\ \Delta\phi &= \frac{-e \cdot a}{\epsilon} \left[\frac{L^3}{48} - \frac{L^3}{16} - \left(\frac{-L^3}{48} - \frac{-L^3}{16} \right) \right] \\ \Delta\phi &= \frac{-e \cdot a}{\epsilon} \left(\frac{2L^3}{48} - \frac{2L^3}{16} \right) \\ \Delta\phi &= \frac{-e \cdot a}{\epsilon} \left(\frac{2L^3}{48} - \frac{6L^3}{48} \right) = \frac{-e \cdot a}{\epsilon} \frac{-4L^3}{48} = \frac{e \cdot a \cdot L^3}{12\epsilon} \\ \Delta\phi &= \frac{e \cdot a \cdot L^3}{12\epsilon} \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck kann man nach L umformen:

$$L = \sqrt[3]{\frac{12\epsilon\Delta\phi}{e \cdot a}}$$

- d) Nehmen Sie an, die Dotierkonzentration ändert sich in einem Silizium pn-Übergang linear von $N_A = 10^{16} \text{cm}^{-3}$ auf $N_D = 10^{16} \text{cm}^{-3}$ über eine Distanz von $d = 2\mu\text{m}$. Berechnen Sie die Breite der Raumladungszone L bei einer eingebauten Spannung von $\Delta\phi = 0,7\text{V}$! Die relative Permittivität von Silizium ist $\epsilon_{Si} = 11,7$. [1,5P]
Falls Sie Aufgabe c) nicht lösen konnten, verwenden Sie folgenden Ausdruck für L :

$$L = \sqrt[3]{\frac{12\epsilon\Delta\phi}{e \cdot a}}$$

Der Dotiergradient a berechnet sich aus den Dotierkonzentrationen des n - und p -dotierten Bereichs und der Breite des linearen Verlaufs d zu:

$$a = \frac{N_D - (-N_A)}{d} = 10^{20} \frac{\text{cm}^{-3}}{\text{cm}}$$

Nun kann man alles in die Formel einsetzen und L berechnen:

$$L = \sqrt[3]{\frac{12\epsilon\Delta\phi}{e \cdot a}}$$

$$L = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 11,7 \cdot 0,7}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{20}} \cdot \frac{CV \cdot 10^{-2}\text{m}}{VmC\text{cm}^{-3}}} = 0,816 \cdot 10^{-4}\text{cm} = 0,816\mu\text{m}$$

- e) Welche Spannung darf in Sperrrichtung maximal angelegt werden, damit die RLZ gerade noch im linearen Bereich bleibt (d.h. $L = d$) ? [1,5P]

Die Potentialdifferenz setzt sich zusammen aus der eingebauten Spannung und der angelegten Spannung:

$$\Delta\phi = 0,7\text{V} + U_{bias}$$

Die Potentialdifferenz in Abhängigkeit von der Breite der RLZ $L = 2\mu\text{m}$ berechnet sich zu:

$$\Delta\phi = \frac{e \cdot a \cdot L^3}{12\epsilon}$$

$$\Delta\phi = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{20} \cdot (2 \cdot 10^{-4})^3}{12 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 11,7} \cdot \frac{C\text{cm}^{-3}\text{cm}^3Vm}{10^{-2}mC} = 10,3\text{V}$$

$$U_{bias} = \Delta\phi - 0,7\text{V} = 9,6\text{V}$$

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$= 6,63 \cdot 10^{-34}$	Js
	$\hbar$	$= \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	N_A	$= 6,02 \cdot 10^{23}$	mol ⁻¹
Bohr'scher Radius	a_0	$= 5,29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$= 1,6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	$= 1,66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$= 9,11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$= 1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$= 1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$= 8,85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	$= 4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$= 3,0 \cdot 10^8$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	$= 1,38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	π	$= 3,14$	
Euler'sche Zahl	e	$= 2,72$	
Imaginäre Einheit	j	$= \sqrt{-1}$	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit → Kilogramm	$1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenvolt → Joule	$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Formeln und Integrale (Bitte beachten Sie auch die Rückseite!)

$$\exp(jkx) + \exp(-jkx) = 2 \cos(kx)$$

$$\exp(jkx) - \exp(-jkx) = 2j \sin(kx)$$

$$\int (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int (\cos ax)^2 dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int \sin ax \cos ax dx = \frac{1}{2a} (\sin ax)^2$$

$$\int x (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x \sin 2ax - \frac{1}{8a^2} \cos 2ax$$

Fortsetzung auf Rückseite!

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a^2} \\
\int x^2 e^{ax} dx &= e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) & \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx &= \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a > 0, n = 0, 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

13 III. Hauptgruppe	14 IV. Hauptgruppe	15 V. Hauptgruppe
5 10,81 2,0 B Bor	6 12,01 2,5 C Kohlenstoff	7 14,007 3,0 N Stickstoff
13 26,98 1,5 Al Aluminium	14 28,09 1,8 Si Silicium	15 30,97 2,1 P Phosphor
31 69,72 1,6 Ga Gallium	32 72,59 1,8 Ge Germanium	33 74,92 2,0 As Arsen
49 114,82 1,7 In Indium	50 118,69 1,8 Sn Zinn	51 121,75 1,9 Sb Antimon
81 204,38 1,8 Tl Thallium	82 207,2 1,8 Pb Blei	83 208,98 1,9 Bi Bismut